

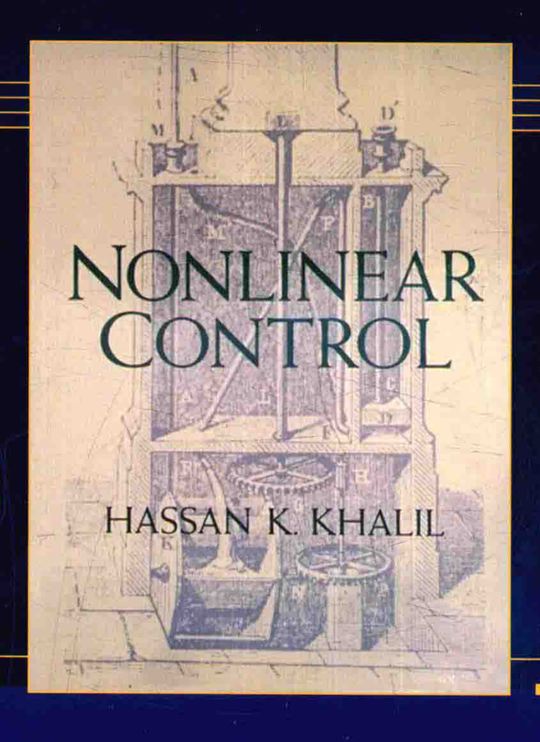
PEARSON

非线性控制

[美] 哈森 K. 哈里尔（Hassan K. Khalil）著

韩正之 王划 王少华 刘磊坡 谢七月 译

Nonlinear Control

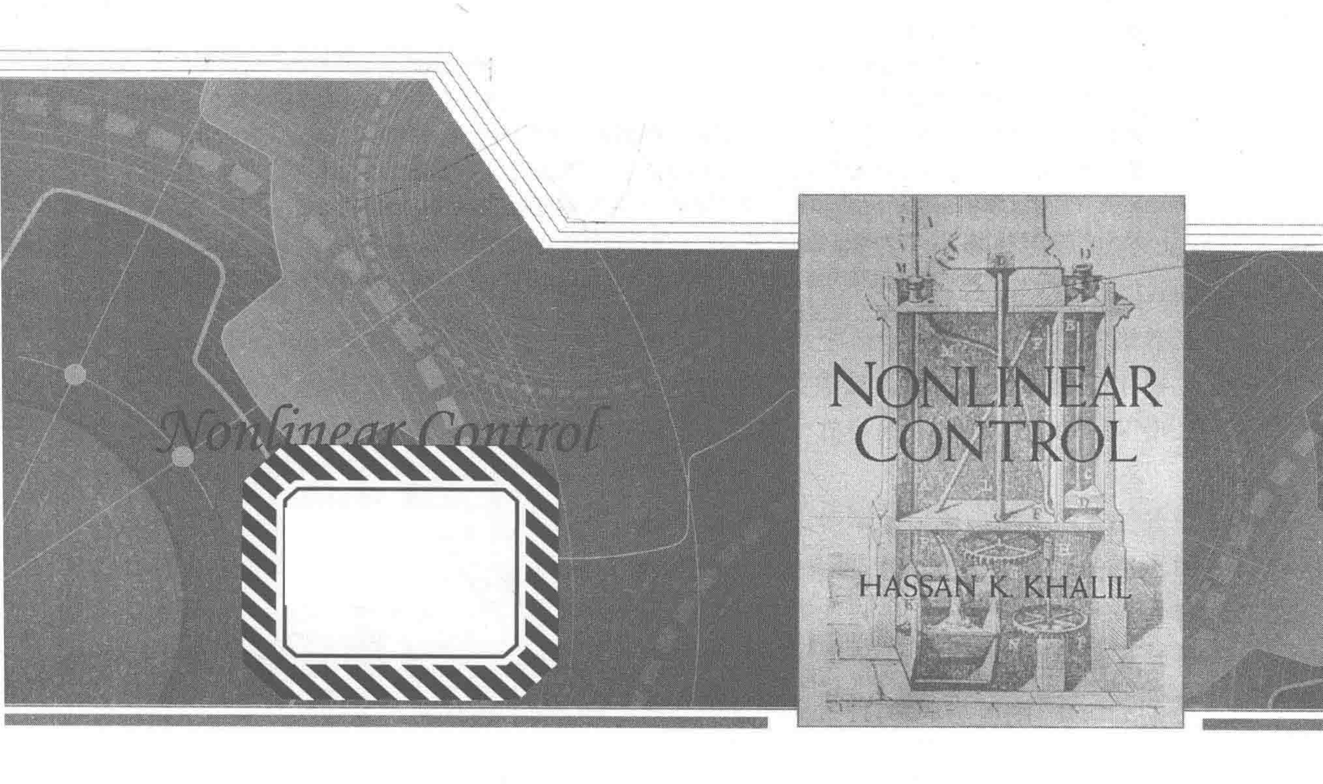




非线性控制

[美] 哈森 K. 哈里尔（Hassan K. Khalil）著

韩正之 王划 王少华 刘磊坡 谢七月 译



机械工业出版社
China Machine Press

图书在版编目（CIP）数据

非线性控制 /（美）哈里尔（Khalil, H. K.）著；韩正之等译．—北京：机械工业出版社，2016.2

（工业控制与智能制造丛书）

书名原文：Nonlinear Control

ISBN 978-7-111-52888-3

I. 非… II. ①哈… ②韩… III. 非线性控制系统 – 高等学校 – 教材 IV. TP273

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 025433 号

本书版权登记号：图字：01-2014-2706

本书是非线性控制理论的入门教程。第 1 章给出了非线性现象的特征和全书的介绍。第 2~8 章讲述非线性控制系统的分析。第 9~13 章介绍非线性控制系统的设计，设计的核心是镇定，具体讲述了镇定设计的各种方法，为了讲述输出反馈，还专门讨论观测器的设计，考虑设计的鲁棒性，并推广到跟踪和调节问题。最后是附录，包括实际示例、数学知识和定理证明。这些实例是本书的重要内容，它们涉及全书的例题和练习，作为验证结论之用。

本书起点较低，论述相对浅显，而内容非常全面，可以作为大学本科讲授非线性控制系统理论的入门教材，也可以供从事控制工程设计的人员参考使用。

出版发行：机械工业出版社（北京市西城区百万庄大街 22 号 邮政编码：100037）

责任编辑：张梦玲	责任校对：董纪丽
印　　刷：北京市荣盛彩色印刷有限公司	版　　次：2016 年 3 月第 1 版第 1 次印刷
开　　本：185mm × 260mm 1/16	印　　张：18.5
书　　号：ISBN 978-7-111-52888-3	定　　价：79.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

客服热线：（010）88378991 88361066　　投稿热线：（010）88379604

购书热线：（010）68326294 88379649 68995259　　读者信箱：hzjsj@hzbook.com

出版者的话

文艺复兴以来，源远流长的科学精神和逐步形成的学术规范，使西方国家在自然科学的各个领域取得了垄断性的优势；也正是这样的传统，使美国在信息技术发展的六十多年间名家辈出、独领风骚。在商业化的进程中，美国的产业界与教育界越来越紧密地结合，信息学科中的许多泰山北斗同时身处科研和教学的最前线，由此而产生的经典科学著作，不仅擘划了研究的范畴，还揭示了学术的源变，既遵循学术规范，又自有学者个性，其价值并不会因年月的流逝而减退。

近年，在全球信息化大潮的推动下，我国的信息产业发展迅猛，对专业人才的需求日益迫切。这对我国教育界和出版界都既是机遇，也是挑战；而专业教材的建设在教育战略上显得举足轻重。在我国信息技术发展时间较短的现状下，美国等发达国家在其信息科学发展的几十年间积淀和发展的经典教材仍有许多值得借鉴之处。因此，引进一批国外优秀教材将对我国教育事业的发展起到积极的推动作用，也是与世界接轨、建设真正的世界一流大学的必由之路。

机械工业出版社华章公司较早意识到“出版要为教育服务”。自1998年开始，我们就将工作重点放在了遴选、移译国外优秀教材上。经过多年的不懈努力，我们与Pearson、McGraw-Hill、Elsevier、John Wiley & Sons、CRC、Springer等世界著名出版公司建立了良好的合作关系，从他们现有的数百种教材中甄选出Alan V. Oppenheim Thomas L. Floyd、Charles K. Alexander、Behzad Razavi、John G. Proakis、Stephen Brown、Allan R. Hambley、Albert Malvino、Peter Wilson 、H. Vincent Poor、Hassan K. Khalil、Gene F. Franklin、Rex Miller等大师名家的经典教材，以“国外电子与电气技术丛书”和“国外工业控制与智能制造丛书”为系列出版，供读者学习、研究及珍藏。这些书籍在读者中树立了良好的口碑，并被许多高校采用为正式教材和参考书籍。其影印版“经典原版书库”作为姊妹篇也越来越多被实施双语教学的学校所采用。

权威的作者、经典的教材、一流的译者、严格的审校、精细的编辑，这些因素使我们的图书有了质量的保证。随着电气与电子信息学科建设的不断完善和教材改革的逐渐深化，教育界对国外电气与电子信息教材的需求和应用都将步入一个新的阶段，我们的目标是尽善尽美，而反馈的意见正是我们达到这一终极目标的重要帮助。华章公司欢迎老师和读者对我们的工作提出建议或给予指正，我们的联系方法如下：

华章网站：www. hzbook. com

电子邮件：hzjsj@hzbook. com

联系电话：(010)88379604

联系地址：北京市西城区百万庄南街1号

邮政编码：100037



华章科技图书出版中心

译者序

非常感谢机械工业出版社让我来翻译 Khalil 著的《Nonlinear Control》，这给了我一个推动国内的非线性控制系统理论教学和研究的机会。

1988 年 5 月，我通过博士学位论文答辩，当时，张钟俊教授担任答辩委员会主席，答辩结束后，老先生不容置辩地对我说，今天这里的答辩已经结束了，明天到上海交通大学报到，开展博士后的研究工作。他给我以及由我担任博士生副导师的研究团队的任务是开展对非线性控制系统理论的研究。记得他说过，线性系统的理论已经相对完善，控制理论肯定会向非线性系统发展，我们应该争得这个先机。当时现代非线性理论的代表是微分几何理论，能找到的教材只有 A. Isidori 著的《Nonlinear Control Systems》。记得我们首先学懂的是反馈线性化理论，谈自忠教授介绍过相关结论，但是为了真正弄明白，我们花了很多时间钻研微分几何。Froubinus 定理对于工科学生，即使是博士研究生也仍然是非常玄乎的东西，为了向学生解释向量场、分布和这个定理确实花了很多心思，包括向老先生解释这个定理的意义。

从那个时候开始，为了向我协助指导的和以后由我担任导师的博士生讲授非线性控制理论，我一直在寻觅一本理想的教材。尽管我们也按照“线性化、标准型、镇定、零动态方法、反步法、观测器、无源性理论”主题整理了大量的素材，但是一直没有定下心来编著这样一本教材。在我的研究室里，学生们广泛使用的是 Khalil 著的《Nonlinear Systems》，开始是英文版，后来有了中文译本。我们普遍觉得这本书非常全面，是一本辞书类的参考书，但不适宜做教材。即使我小范围地给学生讲解，也嫌内容多，但若挑部分内容来讲，由于破坏了原书的系统性，不免要时时补充讲解，很不方便，更不用说将其用作大班课堂教材了。

这次看到 Khalil 著的这本《Nonlinear Control》，读完它的前言，就觉得这是一本我们盼望已久的可以选为教材的书，于是欣然接受了翻译的任务。我翻译了前言和第 1 章，谢七月博士翻译了第 2 章～第 5 章、刘磊坡博士翻译了第 6 章～第 9 章，王划博士翻译了第 10 章～第 13 章，附录由她的同事王少华老师完成。他们的译稿经我审改和统稿，同时，我带的博士研究生吴海对照原文做了非常认真的校对。

作为教材，建议先让学生自学附录 A 的例子，在第一次课可以花 45 分钟介绍这些例子的内容和原理，而将具体的数学模型留给学生推导。从第二次课开始，讲述本书内容，基本上每次课(100 分钟)介绍一章。这样共用去 14 次课。在课堂上主要介绍结论和讲解例题，重点是这些内容的意义及其在全书中的作用。本书的各章内容相对独立，因此作为教师，进行适当的总结比较就显得很重要了。例如讲完第 4 章，可以总结一下关于稳定性的各种定义以及对应的 Lyapunov 判据；讲到第 10 章，可以总结三种系统设计方法，比较它们的设计特点和适用范围等。现在上海交通大学研究生课程每个学期是 16 周教学时间，每周两节课正好讲完全书。

尽管译者们都很熟悉非线性控制理论，翻译时也是斟酌再三，但错误仍然难免，原书也有一些明显的错误，虽然都做了处理，但恐有遗漏，敬请同行和读者赐教。

韩正之

2015 年 10 月

前　言

这本书可以看成是从我早期编写的《Nonlinear Systems》演化而来的，它不是那本书的第4版，也不能取代它。本书的宗旨和结构与《Nonlinear Systems》完全不同。《Nonlinear Systems》的定位是讲述非线性系统分析及其在控制中的应用的参考书或者教材，但是本书旨在作为非线性控制的入门教材，它用于一个学期大约40课时的教学。众所周知，严谨是非线性系统理论的特点，写作本书的定位是既不失严谨性，又能让最广大的受众可以接受，因此只有当证明过程对于结论的理解是必要的时候，我们才给出，其余的都给出了参考文献，需要的读者可以按需索骥。对于有些证明，部分读者寻找起来可能有困难，因此我们将它们罗列在本书的附录中。本书的篇幅大约只有《Nonlinear Systems》的一半，割舍了不少内容。那些被割舍的部分并非不重要，只是我觉得不适合入门学习而已。习惯使用《Nonlinear Systems》的教师可能不同意这样的裁减，所以他们依然可以将删减的内容融合进这本教材中，一起讲授。

教师们可以从出版商那里得到本书的电子版练习解答，还可获得部分题目的Simulink模型。本书的配套网站(http://www.pearsonhighered.com/khalil)还提供本书的勘误链接，用户可以通过此网站提交发现的内容错误，还可以从该网站获得本书的PDF课件，以及部分例子的Simulink模型。

书中的计算是通过MATLAB和Simulink完成的，插图是由MATLAB或LATEX的图形工具生成的。英文书封面背景描绘的是公元前3世纪埃及克特西比乌斯的水钟，这是有记录以来第一个反馈控制装置。

在本书的写作过程中，我得到了很多同事、学生以及《Nonlinear Systems》的读者、本书审稿人的帮助。感谢密西根州立大学为我的写作提供了一个良好的写作环境，也感谢美国自然科学基金会为我在非线性反馈控制研究中提供的资助。

Hassan Khalil

目 录

第1章 引 论

1.1 节定义了一类非线性系统的状态模型。这类模型将在全书得到广泛的应用。针对这类模型，该节还简要地讨论了三个相关概念：解的存在性与唯一性、变量替换、平衡点。1.2 节试图给出一个说明，解释在非线性系统的分析和设计中需要用到的一些非线性工具，以及说明我们为什么需要用到这些工具。1.3 节对随后的 12 章进行了一个简单的介绍。

1.1 非线性模型

考虑用一阶常微分方程组描述的动态系统

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= f_1(t,x_1,\cdots,x_n,u_1,\cdots,u_m)\\
\dot{x}_2 &= f_2(t,x_1,\cdots,x_n,u_1,\cdots,u_m)\\
\vdots\ \ &\quad\ \vdots\\
\dot{x}_n &= f_n(t,x_1,\cdots,x_n,u_1,\cdots,u_m)
\end{aligned}$$

其中，$\dot{x}_i$ 表示变量 x_i 关于时间 t 的导数，u_1，u_2，…，u_m 是输入变量，x_1, x_2，…，x_n 称为状态变量，它们用来表示动态系统对于以前行为的一种记忆。我们常常用向量的形式将这个方程组写成一种紧凑的形式。如果记

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\\vdots\\x_n\end{bmatrix},\quad u=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_m\end{bmatrix},\quad f(t,x,u)=\begin{bmatrix}f_1(t,x,u)\\f_2(t,x,u)\\\vdots\\\vdots\\f_n(t,x,u)\end{bmatrix}$$

那么前面这 n 个一阶微分方程组就可以写成一个一阶的 n 维向量微分方程

$$\dot{x}=f(t,x,u) \tag{1.1}$$

我们称式(1.1)是以 x 为状态、u 为输入的状态方程。有的时候，会有另一个方程

$$y=h(t,x,u) \tag{1.2}$$

与式(1.1)一起出现。这个方程定义了一个 q 维的输出向量 y，向量 y 的分量是一些我们在研究中特别感兴趣的变量，例如那些可以物理测量到的信息或者用来刻画一些具体特征的变量。我们称式(1.2)为输出方程，而将式(1.1)和式(1.2)一起称为系统的状态空间模型，或者简称为状态模型。本书的附录 A 和本章后面的练习会给出一些非线性系统的状态模型。对于线性系统，式(1.1)和式(1.2)可以写成

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= A(t)x+B(t)u\\
y &= C(t)x+D(t)u
\end{aligned}$$

有的时候，我们考虑式(1.1)的一种特殊情况，即系统不含有输入 u，这时就将式(1.1)写成

$$\dot{x}=f(t,x) \tag{1.3}$$

对应的系统就称为无控制系统。之所以要考虑式(1.3)描述的系统，是因为如果系统已经指定了输入 $u=\gamma(t)$，或者采用了一个状态反馈 $u=\gamma(x)$ 或 $u=\gamma(t, x)$，在将它们代入系统后，式(1.1)中就不再出现输入 u 了，式(1.1)也就演变成无控制系统的式(1.3)。

在式(1.3)中，通常要求在讨论的范围内函数 $f(t, x)$ 关于时间 t 是分段连续的，而关于状态 x 是局部 Lipschitz 的。对于一个固定的 x，称 $f(t, x)$ 关于 t 在区间 $J\subset R$ 上是分段连续的意思是，对于有界子区间组成的集合 $J_0\subset J$，在 J_0 上 f 是连续的，而在 J_0 外的有限个点上可能存在跃度有限的跳跃。采用这样的假设是因为 $f(t, x)$ 是依赖于输入 $u(t)$ 的，而它可能会随着时间产生阶跃型改变。对于一个给定的 $t\in J\subset R$，称 $f(t, x)$ 在点 x_0 附近关于 x 是局部 Lipschitz 的，即存在 x_0 的一个邻域 $N(x_0, r)$($N(x_0, r)=\{\|x-x_0\|<r\}$) 和正常数 L，使得 $f(t, x)$ 对一切 $t\in J$ 和 x，$y\in N(x_0, r)$ 满足所谓的 Lipschitz 条件

$$\|f(t,x)-f(t,y)\|\leqslant L\|x-y\| \tag{1.4}$$

其中，范数 $\|x\|$ 定义成

$$\|x\|=\sqrt{x^{\mathrm{T}}x}=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$$

函数 $f(t, x)$ 称为在其定义域(这里总要求定义域是开的和连通的) $D\subset R^n$ 上是局部 Lipschitz 的，意思是它在 D 上的任意一点 $x_0(\in D)$ 是局部 Lipschitz 的。W 是一个集合，如果对 W 上任意两个点 x、$y(\in W)$，式(1.4)都成立，而且 L 与 x、y 的选择无关，那么称 $f(t, x)$ 在 W 上是 Lipschitz 的。在 D 上局部 Lipschitz 的函数可以不是 Lipschitz 的，因为在 D 上，Lipschitz 常数 L 可能不是一致的，即它可能依赖于 x。然而对于 D 中的一个紧子集(即有界闭集)来讲，局部 Lipschitz 的函数必定是 Lipschitz 的。如果一个函数在 R^n 上是 Lipschitz 的，则称它是全局 Lipschitz 的。

当 $n=1$ 的时候，如果 f 仅依赖于单个变量 x，这时 Lipschitz 条件就可以写成

$$\frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|}\leqslant L$$

这个不等式说明在 $x-f(x)$ 的图像上，连接任意两点的直线的斜率绝对值不会大于 L。因此任何一个在某点具有无穷大斜率的函数不可能在这点是局部 Lipschitz 的。例如对于任意一个不连续的函数，在其不连续的点处不可能是局部 Lipschitz 的。又如函数 $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ 在 $x=0$ 处不是局部 Lipschitz 的，因为 $f(x)'=\left(\frac{1}{3}\right)x^{-\frac{2}{3}}$，当 $x\to 0$ 时，$f(x)'=\left(\frac{1}{3}\right)x^{-\frac{2}{3}}\to\infty$。然而如果 $f'(x)$ 在 x_0 处是连续的，那么 $f(x)$ 在 x_0 处是局部 Lipschitz 的。这是因为如果 $f'(x)$ 在 x_0 处连续，那么 $f'(x)$ 在 x_0 的一个邻域中有界，即存在常数 k，使得 $|f'(x)|\leqslant k$ 对这个邻域中的所有 x 成立，于是 $f(x)$ 在这个邻域中满足局部 Lipschitz 条件(见式(1.4))，并且它的 Lipschitz 常数可以取成 $L=k$。

更一般的结论如下：如果对 $t\in J\subset R$，$x\in D\subset R^n$(这里的 D 是开的连通的集，此后称这样的集合为区域)，$f(t, x)$ 及其偏导数 $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ 都是连续的，那么 $f(t, x)$ 在 D 上是局部 Lipschitz 的[⊖]。如果 $f(t, x)$ 及其偏导数 $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ 在 $x\in R^n$ 上都是连续的，那么 $f(t, x)$ 是全局 Lipschitz 的充分必要条件是 $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ 全局有界并关于 t 是一致的，即存在一个不依赖于 (t, x) 的

⊖ 见文献[74，引理 3.2]中关于命题的证明。

常数 k，使得对于一切 $t\in J$ 和 $x\in R^n$，$\left|\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|$ 小于或等于 k [㊀]。 3

例 1.1 函数

$$f(x)=\begin{bmatrix}-x_1+x_1x_2\\ x_2-x_1x_2\end{bmatrix}$$

在 R^2 上是连续可导的，所以它是局部 Lipschitz 的。因为 $\dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}$ 和 $\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}$ 在 R^2 上不是一致有界的，所以它不是全局 Lipschitz 的。可以证明在 R^2 的任意紧子集上它是 Lipschitz 的。假设我们想求在集合 $W=\{|x_1|\leqslant a,\ |x_2|\leqslant a\}$ 上的 Lipschitz 常数，需计算

$$|f_1(x)-f_1(y)|\leqslant|x_1-y_1|+|x_1x_2-y_1y_2|$$
$$|f_2(x)-f_2(y)|\leqslant|x_2-y_2|+|x_1x_2-y_1y_2|$$

应用不等式

$$|x_1x_2-y_1y_2|=|x_1(x_2-y_2)+y_2(x_1-y_1)|\leqslant a|x_2-y_2|+a|x_1-y_1|$$

和

$$|x_1-y_1||x_2-y_2|\leqslant\frac{1}{2}|x_1-y_1|^2+\frac{1}{2}|x_2-y_2|^2$$

得到：

$$\|f(x)-f(y)\|^2\leqslant|f_1(x)-f_1(y)|^2+|f_2(x)-f_2(y)|^2\leqslant(1+2a)^2\|x-y\|^2$$

所以 $f(x)$ 在 W 上是 Lipschitz 的，并且它的 Lipschitz 常数 $L=1+2a$。 ◀

例 1.2 函数

$$f(x)=\begin{bmatrix}x_2\\ -\operatorname{sat}(x_1+x_2)\end{bmatrix}$$

不是 R^2 上的连续可导函数。根据饱和函数的特征 $|\operatorname{sat}(\eta)-\operatorname{sat}(\xi)|\leqslant|\eta-\xi|$（关于饱和函数的定义，请参阅 10.1 节），可以得到

$$\begin{aligned}\|f(x)-f(y)\|^2&\leqslant(x_2-y_2)^2+(x_1+x_2-y_1-y_2)^2\\&\leqslant(x_1-y_1)^2+2(x_1-y_1)(x_2-y_2)+2(x_2-y_2)^2\end{aligned}$$

利用不等式

$$a^2+2ab+2b^2=\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}^{\mathrm T}\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}\leqslant\lambda_{\max}\left\{\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}\right\}\times\left\|\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}\right\|^2$$

可以得到

$$\|f(x)-f(y)\|\leqslant\sqrt{2.618}\|x-y\|,\quad\forall x,y\in R^2$$

这里我们应用了半正定矩阵的性质：$x^{\mathrm T}Px\leqslant\lambda_{\max}(P)x^{\mathrm T}x$ 对所有 $x\in R^n$ 成立，其中的 $\lambda_{\max}(P)$ 表示矩阵 P 的最大特征值。我们还可以通过下面的不等式得到一个保守一些的 Lipschitz 常数，由

$$a^2+2ab+2b^2\leqslant2a^2+3b^2\leqslant3(a^2+b^2)$$

可以得到 Lipschitz 常数 $L=\sqrt{3}$。 ◀ 4

$f(t,x)$ 的局部 Lipschitz 性质用来保证状态方程式(1.3)的解的存在性和唯一性，具体见下面的引理[㊁]。

㊀ 见文献[74，引理 3.3]中关于命题的证明。

㊁ 证明参见文献[74，定理 3.1]，也可以参考文献[56，62，95]，那里有关于解的存在性与唯一性的进一步论述和非线性微分方程的定性分析。

引理 1.1 设 $f(t, x)$关于 t 是分段连续的，并且对所有的 $t\in[t_0, t_1]$，$f(t, x)$在 x_0 处是局部 Lipschitz 的，那么存在 $\delta>0$，使得状态方程 $\dot{x}=f(t, x)$的初值问题 $x(t_0)=x_0$ 在$[t_0, t_0+\delta]$上存在唯一解。

如果没有局部 Lipschitz 条件，解的唯一性可能得不到保证。例如考虑状态方程 $\dot{x}=x^{\frac{1}{3}}$，它的右端是连续的，但在 $x=0$ 处不是局部 Lipschitz 的。当初值取成 $x(0)=0$ 时，有两个不同的解 $x(t)=\left(\frac{2t}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$ 和 $x(t)\equiv0$。

引理 1.1 只是一个局部的结论，因为它只保证了在区间$[t_0, t_0+\delta]$上解的存在和唯一，这个区间可能小于给定的$[t_0, t_1]$。下面例子说明了确实存在这样的方程，解在一段时间之后便不存在了。

例 1.3 考虑一维系统 $\dot{x}=-x^2$，函数 $f(x)=-x^2$ 对于所有的 x 都是局部 Lipschitz 的。但是如果将初值取成 $x(0)=-1$，它的解是 $x(t)=\frac{1}{t-1}$。当 $t\to1$ 时，$x(t)\to-\infty$。◀

“有限逃逸时间”就是用来描述这种现象的，它是指当时间 t 趋向一个有限值，解却趋向无穷大。在例 1.3 中，我们可以称这个解具有有限逃逸时间 $t=1$。

在下面的引理 1.2 和引理 1.3 中⊖，我们将给出解全局存在和唯一的条件。引理 1.2 要求函数 $f(t, x)$是全局 Lipschitz 的，而引理 1.3 只要求 $f(t, x)$是局部 Lipschitz 的，但需要一个附加的条件，即解是有界的。在例 1.3 中，函数 $f(x)=-x^2$ 对于所有的 x 是局部 Lipschitz 的，但是它不是全局 Lipschitz 的，因为 $f'(x)=-2x$ 不是全局有界的。

引理 1.2 设 $f(t, x)$关于 t 是分段连续的，并且对所有的 $t\in[t_0, t_1]$，$f(t, x)$是全局 Lipschitz 的，那么状态方程 $\dot{x}=f(t, x)$的初值问题 $x(t_0)=x_0$ 在$[t_0, t_1]$上存在唯一解。

如下的线性系统满足全局 Lipschitz 条件，

$$\dot{x}=A(t)x+g(t)$$

其中，$\|A(t)\|\leqslant L$ 对所有的 $t\geqslant t_0$ 成立。引理 1.2 给出的全局 Lipschitz 条件对于一般的非线性系统来讲是一个过强的限制条件。下面的引理可以不需要这个条件。

引理 1.3 设 $f(t, x)$关于 t 是分段连续的，并且对所有的 $t\geqslant t_0$，在关于 x 的区域 $D\subset R^n$ 上 $f(t, x)$是局部 Lipschitz 的。设 W 是 D 中的一个紧子集，$x_0\in W$，并进一步设

$$\dot{x}=f(t,x),\quad x(t_0)=x_0$$

5

的解在 $t\geqslant t_0$ 时都在 W 内，那么这个解是 $t\geqslant t_0$ 的唯一解。

应用引理 1.3 的技巧在于只要判别解是否都包含在一个紧集之内，而不必解出状态方程。在第 3 章我们会看到，用于稳定性分析的 Lyapunov 方法是验证这个事实的一种有用的工具。下面的例子可以说明这个引理的应用。

例 1.4 考虑一维系统

$$\dot{x}=-x^3=f(x)$$

的函数 $f(x)$在 R 上是局部 Lipschitz 的，但是因为 $f'(x)=-3x^2$ 不是全局有界的，因此 $f(x)$不是全局 Lipschitz 的。如果在任何时候 $x(t)$总是正的，那么 $\dot{x}(t)$总是负的，所以 $x(t)$是递减的。同样，如果在任何时候 $x(t)$总是负的，那么 $\dot{x}(t)$总是正的，所以 $x(t)$是递

⊖ 证明分别参见文献[74，定理 3.2]、文献[74，定理 3.3]。

增的。因此满足初始条件 $x(0)=a$ 的解不会离开紧集 $\{|x|\leqslant a\}$。应用引理 1.3 可以断定，对于任意 $t\geqslant 0$，方程的解是唯一的。 ◀

式(1.3)的一种特殊情况是 f 不显含变量 t，即

$$\dot{x} = f(x)$$

这样的状态方程称为是自治的，或者是时不变的。自治系统的特性是对时间做变换不会影响系统性质，这是因为将时间 t 变成 $\tau=t-a$，方程的右面是不变的。不是自治的系统就称为非自治的或者是时变的。

更一般地，如果在状态模型式(1.1)和式(1.2)中都不显含 t，那么称这个系统是时不变的，这时

$$\dot{x} = f(x,u), \quad y = h(x,u)$$

如果 f 和 h 中有一个显含 t，那么这个状态模型就称为时变的。时不变状态模型有这样一个性质：如果将初始时间从 t_0 变为 t_0+a，在输入信号中用 t_0+a 代替 t_0，那么状态模式是不变的。具体说，如果用($x(t)$、$y(t)$)表示初始时刻为 t_0、初始状态 $x(t_0)=x_0$、输入为 $u(t)$时 $t\geqslant t_0$ 的状态和输出在 t 时刻的值，用($\tilde{x}(t)$、$\tilde{y}(t)$)表示初始时刻为 t_0+a、初始状态 $\tilde{x}(t_0+a)=x_0$、输入为 $u(t)$时 $t\geqslant t_0+a$ 的状态和输出在 t 时刻的值，那么 $\tilde{x}(t)=x(t-a)$ 和 $\tilde{y}(t)=y(t-a)$ 对一切 $t\geqslant t_0+a$ 成立。因此不失一般性，对于时不变系统，可以固定初始时刻为 $t_0=0$。

用变量替换 $z=T(x)$ 可以将状态方程中的 x 坐标转换成 z 坐标，这种转换是一种非常有用的分析工具。在线性系统中，这种变换就是坐标变换 $z=Px$，其中要求 P 是一个非奇异矩阵。对于非线性系统，变换 $z=T(x)$ 中映射 T 必须是可逆的，即它必须存在逆映射 $T^{-1}(\cdot)$，使得 $x=T^{-1}(z)$ 对所有的 $z\in T(D)$ 成立，这里的 D 是 T 定义的区域。进一步，由于要求 z 和 x 的导数都是连续的，所以要求 $T(\cdot)$ 和 $T^{-1}(\cdot)$ 都是连续可导的。一个连续可导的映射同时又存在连续可导的逆映射，那么这个映射就称为微分同胚。称一个映射 $T(x)$ 在点 x_0 处局部微分同胚，是指 x_0 存在一个邻域 N，使得 T 限制在 N 上是一个微分同胚。如果它是 R^n 上的微分同胚，而且 $T(R^n)=R^n$，那么它就是全局的微分同胚。用 $\left[\frac{\partial T}{\partial x}\right]$ 表示 T 的 Jacobi 矩阵，即它的第(i，j)元素是偏微分 $\frac{\partial T_i}{\partial x_j}$。下面的引理给出 $z=T(x)$ 是局部或者全局微分同胚的条件[⊖]。

6

引理 1.4 如果 Jacobi 矩阵 $\left[\frac{\partial T}{\partial x}\right]$ 在 x_0 处是可逆的，则连续可导映射 $z=T(x)$ 在 x_0 处是局部微分同胚。如果 Jacobi 矩阵 $\left[\frac{\partial T}{\partial x}\right]$ 在所有 $x\in R^n$ 上是可逆的，而且是正则的，即 $\lim_{\|x\|\to\infty}\|T(x)\|=\infty$，则连续可导映射 $z=T(x)$ 在 x_0 处是全局微分同胚。

例 1.5 附录 A.4 节给出了两个负阻振荡器的微分模型。通过下面的变换

$$z = T(x) = \begin{bmatrix} -h(x_1) - \dfrac{x_2}{\varepsilon} \\ x_1 \end{bmatrix}$$

⊖ 局部的结论可以从逆函数定理得到，参考文献[3，定理 7.5]。关于全局的证明可以在文献[117]或[150]中找到。

可以看出这两个模型是关联的。假设$h(x_1)$是连续可导的，那么$T(x)$的 Jacobi 矩阵就是

$$\frac{\partial T}{\partial x}=\begin{bmatrix}\frac{\partial T_1}{\partial x_1} & \frac{\partial T_1}{\partial x_2}\\ \frac{\partial T_2}{\partial x_1} & \frac{\partial T_2}{\partial x_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-h'(x_1) & -\frac{1}{\varepsilon}\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

它的行列式是$\frac{1}{\varepsilon}$，是一个正数。进一步，因为

$$\|T(x)\|^2=[h(x_1)+\frac{x_2}{\varepsilon}]^2+x_1^2$$

所以$\lim\limits_{\|x\|\to\infty}\|T(x)\|=\infty$，即$T(x)$是正则的。特别地，如果$|x_1|\to\infty$，则$\|T(x)\|\to\infty$；如果$x_1$是有限的，而$|x_2|\to\infty$，则$\left[h(x_1)+\frac{x_2}{\varepsilon}\right]^2\to\infty$，从而$\|T(x)\|\to\infty$。◀

平衡点是状态方程的重要特性。x^*称为方程$\dot{x}=f(t,x)$的平衡点，如果这个方程有常数解$x(t)\equiv x^*$。对于时不变方程$\dot{x}=f(x)$，平衡点就是方程$f(x)=0$的实数解。

如果一个平衡点附近没有其他平衡点，那么这个平衡点就是孤立的，否则就是连续的平衡点。对于线性方程$\dot{x}=Ax$，如果A是非奇异的，那么$x=0$就是孤立平衡点；如果A是奇异的，那么A的零空间就是连续的平衡点；如果x_a和x_b是两个平衡点，那么经过x_a和x_b的直线$\alpha x_a+(1-\alpha)x_b$上所有的点都是平衡点，因此线性方程不可能有多个孤立的平衡点。但是一个非线性状态方程可以具有多重的孤立平衡点，例如下面的单摆方程

7

$$\dot{x}_1=x_2,\quad \dot{x}_2=-\sin x_1-bx_2$$

$x_1=n\pi$，$x_2=0(n=0，\pm1，\pm2，\cdots)$都是孤立的平衡点。

1.2 非线性现象

对于线性系统而言，*叠加原理*是一个非常有用的工具。当我们将视线从线性转向非线性的时候，就会发现情形变得复杂了，叠加原理不再成立，相关分析和研究涉及一些更现代的数学方法。鉴于人们对线性系统已经能应用自如，所以研究非线性系统的第一步就是将它线性化。在操作点附近将它线性化，然后再分析、研究得到线性模型。这是工程中常用的一种手段，也是非常有效的一种手段。然而，这样的线性化很有局限性，主要表现为两方面：首先，这种线性化只是在操作点附近对原系统的一种近似，只能揭示一个非线性系统在操作点附近的**局部**习性，它无法揭示远离该操作点的**非局部**的性质，更不能反映系统在整个状态空间的**全局**性质；其次，非线性系统的动态特性远比线性系统来得丰富，那些称为**本质非线性**的现象只可能在非线性模型中发生，在线性模型中是不可能得到反映的。下面给出一些本质非线性现象。

- *有限逃逸时间*。一个不稳定的线性系统，它的状态在时间趋于无穷大时可能会趋向无穷大；然而一个非线性系统，它的状态可能会在有限时间内就趋向无穷大。
- *多重孤立平衡点*。一个线性系统只能有一个孤立的平衡点，这意味着稳态工作点只有一个。不管初始条件是什么，达到稳态的时候，状态都趋向这个值。一个非线性系统可以有不止一个孤立平衡点，这意味着可以有多个稳态工作点，这样系统最后的稳态值就会依赖初始条件，初始条件不同会使系统稳态处于不同的工作点。
- *极限环*。如果一个线性系统产生振荡，那么它必然有一对纯虚数特征值。这个条件不是鲁棒的，因为稍有扰动，系统的特征值就会漂移而偏离虚轴。而且即使有振荡，

这个振荡的幅值也与初始条件有关。在现实世界中，稳定的振荡只能出现在非线性系统中。非线性系统能够产生固定幅值和固定频率的振荡，这些频率和幅值都与初始条件无关。这种类型的振荡被称为极限环。

8

- 次谐振、谐振或概周期振荡。对一个稳定的线性系统输入一个周期信号，那么会输出一个同频率的周期信号。但是对一个非线性系统输入一个周期信号，输出则可能是输入频率分频或者倍频的振荡，甚至会产生概周期的振荡。一个典型的概周期振荡例子是所产生的振荡即为几个不是同一基频倍数的周期振荡的叠加。
- 混沌。非线性系统可能产生比平衡点、周期振荡或者概周期振荡更复杂的稳态现象，这种现象称为混沌。某些混沌有点像随机现象，但却是系统确定性的特性。
- 响应呈多重模态。同一个非线性系统可能产生多于一个的模态。例如对于一个没有控制输入的系统可能存在不止一个极限环；对于一个具有输入的的系统，随着输入频率或者幅值的不同，可能产生次谐振、谐振或者概周期振荡等复杂的稳态现象。甚至是，输入只是光滑地改变了振幅和频率，输出却会产生不连续的跳跃。

本书主要集中于讨论前三种非线性现象[⊖]。在例 1.3 中我们已经给出了有限逃逸时间的例子，关于其他两种情形的例子将在下一章给出。

1.3 全书概况

本书关于非线性控制的研究是从介绍非线性分析工具开始的，因为在以后的非线性系统分析和设计中会频繁地应用这些工具。

第 2 章引进了二维系统的相平面分析并列举了一些本质非线性特性。随后 5 章讨论了非线性系统的稳定性分析。第 3 章定义和研究了时不变系统平衡点的稳定性；给出了线性系统、线性化和一维系统的一些基本结论；介绍了 Lyapunov 稳定性理论(它是非线性系统稳定性研究的主要工具)。Lyapunov 理论的关键在于寻找一个定义在状态变量上的标量函数，这个函数和它的导数需要满足一定的条件，这类函数称为 Lyapunov 函数。可以说在 Lyapunov 理论中最具有挑战性的工作就是寻找 Lyapunov 函数。一直到第 7 章结束，读者都可以看到很多设计 Lyapunov 函数的范例，并且可以在附录 C 中找到进一步的相关知识。第 4 章将 Lyapunov 稳定性理论推广到时变系统，读者可以看到它在扰动系统分析中是如何发挥作用的。这章还推导出了系统的输入-状态稳定性。第 5 章讨论了一类特殊的非线性系统，这类系统具有耗散能量的特性。这一章强调了无源性和 Lyapunov 稳定性之间的关系。第 6 章讨论输入-输出稳定性，指出这种稳定性也可以采用 Lyapunov 函数来研究。第 5 章和第 6 章介绍的那些理论将在第 7 章得到应用，第 7 章将给出由两个稳定系统连接起来的复合系统保持稳定的条件。

9

最后的 6 章讨论非线性系统的控制。第 8 章给出一些特殊形式的非线性系统，这些系统在非线性系统设计中扮演着重要的角色。第 9 章～第 13 章考虑非线性控制问题，其中包含了非线性观测器的设计。将要研究的非线性控制技术可以分成下列 5 个范畴。

- 非线性近似。
- 非线性补偿。
- 主导非线性。

⊖ 关于后三种现象，读者可以参考文献[52，55，136，146]。

- 固有性质的利用。
- 分割和综合。

线性化是非线性近似最重要的范例。反馈线性化可以看作非线性补偿的一个例子。建立于经典高增益反馈技术上的鲁棒控制可以认为是一种主导型非线性技术。基于系统无源性的控制可以认为是基于系统本质的一种控制技术。随着非线性系统维数的增长，研究的复杂度也迅速增长，一种有效的方法就是将这些系统分解成维数较低的子系统，而这些子系统可能比较容易研究和设计。在这些子系统设计完成后再来研究整个系统的设计，这就是分割与综合。反步法可以是分割和综合的一个实例。

在本书的最后给出了 4 个附录，它们分别给出非线性状态空间模型的例子、数学基础、构造复合 Lyapunov 函数的过程以及一些定理的证明。本书介绍的内容可能与一些优秀的教程有重复之处，而这些教程可以供有兴趣的读者进一步学习，具体包括文献[10，53，63，66，92，118，129，132，144]。本书内容的主要来源是文献[74]，该书提供了很多参考资料，建议读者通过书中的注释和参考资料来获取进一步的参考知识。

1.4 练习

1.1 单输入单输出的非线性系统常常可以用一个 n 阶的微分方程

$$y^{(n)} = g(t, y, \dot{y}, \cdots, y^{(n-1)}, u)$$

10

来描述。其中，u 是输入，y 是输出。试写出它的状态模型。

1.2 一个具有单关节的机械臂在忽略了阻尼作用之后可以用下面的非线性动态方程组来描述[135]，

$$I\ddot{q}_1 + MgL\sin q_1 + k(q_1 - q_2) = 0, \quad J\ddot{q}_2 - k(q_1 - q_2) = u$$

其中，q_1 和 q_2 是转角，I 和 J 是转动惯量，k 是弹性系数，M 是总的质量，L 是距离，u 是输入的力矩。

(1) 用 q_1、$\dot{q}_1$ 和 q_2、$\dot{q}_2$ 作为状态变量，写出它的状态方程。

(2) 证明当 u 取常数时，上述方程的右端是全局 Lipschitz 的。

(3) 取 $u=0$，找出系统的平衡点。

1.3 接入无限母线时同步发电机可以描述成[103]

$$M\ddot{\delta} = P - D\dot{\delta} - \eta_1 E_q \sin\delta, \quad \tau\dot{E}_q = -\eta_2 E_q + \eta_3 \cos\delta + E_F$$

其中，δ 是转角，E_q 是电压，P 是输入的机械能，E_F 是输出电压，D 是阻尼常数，M 是惯性常数，τ 是时间常数，η_1、η_2 和 η_3 是一些正常数。

(1) 用 δ、$\dot{\delta}$ 和 E_q 作为状态变量，写出它的状态方程。

(2) 当 P 和 E_F 都是常数时，证明上述方程的右端是局部 Lipschitz 的，它是全局 Lipschitz 的吗？

(3) 当 P 和 E_F 都是常数时，并满足 $0 < P < \frac{\eta_1 E_F}{\eta_2}$，证明状态方程在 $0 \leqslant \delta \leqslant \frac{\pi}{2}$ 内有唯一的平衡点。

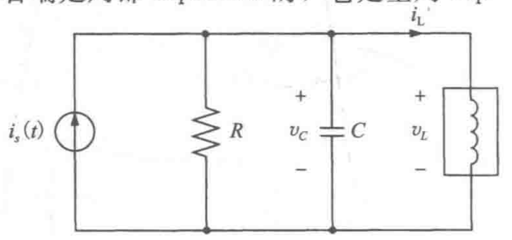


图 1.1 练习 1.4 和练习 1.5

1.4 图 1.1 所示的电路具有一个非线性电感和时变的电流源。假设非线性电感采用

Josephson式连接[25]，即可以用 $i_L = I_0 \sin k\phi_L$ 来描述，其中，ϕ_L 是磁链，I_0 和 k 都是常数。

(1) 用 ϕ_L 和 v_C 作为状态变量，写出状态方程。

(2) 当 i_s 是常数时，证明右端的方程是局部 Lipschitz 的，它是全局 Lipshitz 的吗？

(3) 设 $i_s = I_s$，取常数值，找出在 $0 < I_s < I_0$ 时系统的平衡点。

1.5 再做上面的练习 1.4，其中的非线性电感换成 $i_L = k_1\phi_L + k_2\phi_L^3$，$k_1$、$k_2$ 都是正常数，在第(3)问中 $0 < I_s$。

1.6 图 1.2 给出一辆汽车在坡度是 θ 的路上行驶，其中的 v 是汽车的速度，M 是其质量，F 是电动机产生的驱动力。设摩擦是 Coulomb 型的，即线性粘性摩擦，正比于速度 v^2。将 F 看成控制输入，将 θ 看成扰动输入，写出系统的状态模型。

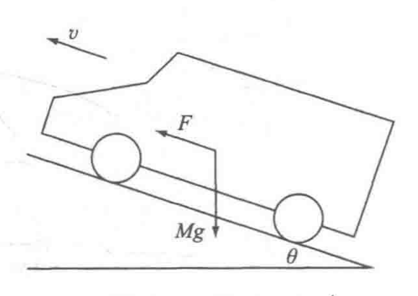


图 1.2 练习 1.6

11

1.7 锁相环可以用图 1.3 来描述[45]。设 $G(s)$ 是严格正则的单输入-单输出系统，它的最小实现是 $\{A, B, C\}$，假设 A 的特征根都具有负实部，$G(0) \neq 0$，θ_i 为常数。设 z 是实现 $\{A, B, C\}$ 的状态变量。

(1) 证明闭环系统可以表示成

$$\dot{z} = Az + B\sin e, \quad \dot{e} = -Cz$$

(2) 求出系统的平衡点。

1.8 质量-弹性系统如图 1.4 所示，假设弹簧是线性的，而阻尼是粘性的，粘性阻尼可以描写成 $c_1\dot{y} + c_2\dot{y}|\dot{y}|$，求描述这个系统的状态方程。

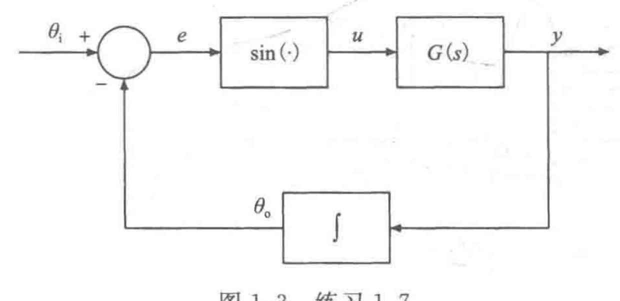


图 1.3 练习 1.7

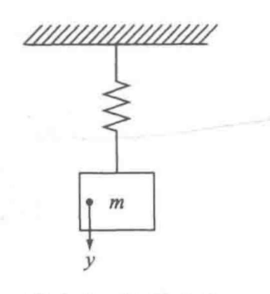


图 1.4 练习 1.8

以下的 3 个问题都是关于液压系统的[27]。

1.9 图 1.5 给出一个液压系统，液体是储存在一个开口的容器中，容器的截面积 $A(h)$ 是液面高 h 的函数，于是，液体的体积 v 就是 $\int_0^h A(\lambda)\mathrm{d}\lambda$。假设液体的密度是 ρ，绝对压强就是 $p = \rho g h + p_a$，其中 p_a 是大气压，g 是重力加速度，假设它们都是常数。注入容器的液体流速为 w_i，液体经过一个阀门流出，流速满足关系 $w_o = k\sqrt{p - p_a}$。体积 v 变化的速率满足 $\dot{v} = w_i - w_o$。将 w_i 看成系统的控制输入，h 作为输出。

12

(1) 将 h 选为状态变量，写出它的状态模型。

(2) 将 $(p - p_a)$ 作为状态变量，写出它的状态模型。

(3) 求出一个常数输入，它使得液面高度 h 等于一个常数值 r。

1.10 考虑图 1.6 所示的液压系统，左端常速的离心泵向容器注入液体，液体经右端的管

子和阀门后流出，流出的速度满足 $w_o = k\sqrt{p-p_a}$，泵的特性为 $p-p_a=\beta\sqrt{1-\frac{w_i}{\alpha}}$，其中的 α 和 β 为已知常数。设容器的截面积是恒定的，从而 $v=Ah$，$p=p_a+\frac{\rho g v}{A}$。本题中未解释的变量和上题的相同。

(1) 将$(p-p_a)$作为状态变量，写出它的状态模型。

(2) 求出系统的平衡点。

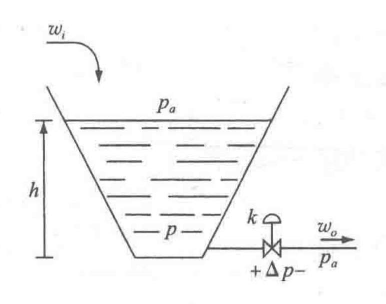


图 1.5 练习 1.9

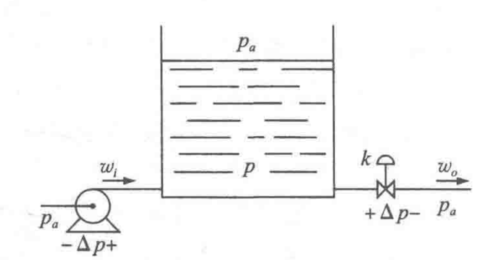


图 1.6 练习 1.10

1.11 考虑图 1.7 所示的液压系统，其中，液体经过阀门的流速满足：$w_1=k_1\sqrt{p_1-p_2}$ 和 $w_2=k_2\sqrt{p_2-p_a}$。泵的特性为 $p_1-p_a=\beta\sqrt{1-\frac{w_p}{\alpha}}$，题中未解释的变量和上面两题中的相同。

(1) 用(p_1-p_a)和(p_2-p_a)作为状态变量，写出它的状态模型。

(2) 求出系统的平衡点。

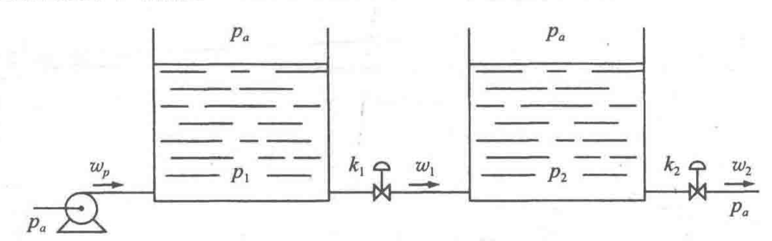


图 1.7 练习 1.11

1.12 研究下列系统的局部或全局 Lipschitz 性质，假设所有的输入都是连续函数。

(1) 单摆，式(A.2)。

13

(2) 质量-弹性系统，式(A.6)。

(3) 隧道二极管电路，式(A.7)。

(4) van der Pol 振荡器，式(A.13)。

(5) 升压转换器，式(A.16)。

(6) 生化反应器，式(A.19)，其中，v 由式(A.20)定义。

(7) DC 电动机，式(A.25)，其中，f_e 和 f_l 是线性函数。

(8) 磁悬浮系统，式(A.30)～(A.32)。

(9) 静电执行器，式(A.33)。

(10) 双关节机器臂，式(A.35)～(A.37)。

(11) 车载倒立摆，式(A.41)～(A.44)。

(12) TORA 系统，式(A.49～(A.52)。

1.13 求全局微分同胚 $z=T(x)$，使得

$$\dot{x}_1 = x_2 + g_1(x_1), \quad \dot{x}_2 = x_3 + g_2(x_1, x_2), \quad \dot{x}_3 = g_3(x) + g_4(x)u, \quad y = x_1$$

转化成

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = z_3, \quad \dot{z}_3 = a(z) + b(z)u, \quad y = z_1$$

其中，g_1 到 g_4 是光滑的。

1.14 求全局微分同胚 $z=T(x)$，使得

$$\dot{x}_1 = \sin x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1^2 + u, \quad y = x_1$$

转化成

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = a(z) + b(z)u, \quad y = z_1$$

并给出 a 和 b 的定义式。

14

第2章
二维系统

二维时不变系统的解可用平面上的曲线表示，这样有利于直观地分析非线性系统的定性性质，因而在非线性系统的研究中占有重要的地位。本章以二维系统为基础，引入关于非线性系统的一些基本概念，尤其是非线性系统平衡点附近的特性及非线性振荡现象[⊖]。

二维时不变系统可由两个联立的微分方程表示

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2), \quad \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \tag{2.1}$$

假设 f_1 与 f_2 在所关注区域上是局部 Lipschitz 的。有时候也称式(2.1)为一个系统。令 $x(t)=(x_1(t), x_2(t))$是方程式(2.1)初始状态为 $x(0)=(x_{10}, x_{20})\stackrel{\text{def}}{=}x_0$ 的解，那么当 $t\geqslant 0$ 增长时，解$x(t)$会在 x_1-x_2 平面上画出一条经过点 x_0 的曲线，该曲线就称为方程式(2.1)始于点 x_0 的轨线或轨道。平面 x_1-x_2 通常称为状态平面或相平面。用向量符号可以把方程式(2.1)改写为

$$\dot{x} = f(x)$$

其中，$f(x)$为向量$(f_1(x), f_2(x))$。上述方程表示 $f(x)$在 x 处与轨线相切。如果把 $f(x)$ 看成状态平面上的一个向量场，即对状态平面上每一点 x 都赋一个向量 $f(x)$，同时为了易于观察，把 $f(x)$“叠加”在 x 上，即将它画成起点在 x、终点是 $x+f(x)$的有向线段。例如，如果 $f(x)=(2x_1^2, x_2)$，那么在 $x=(1, 1)$处画一个箭线，它始于(1, 1)，指向(1, 1)+(2, 1)=(3, 2)(见图 2.1)。

对平面上的每一点叠加一个方程右端的向量 $f(x)$，即得到微分方程的向量场图。图 2.2所示为无摩擦力时单摆方程的向量场图。

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\sin x_1$$

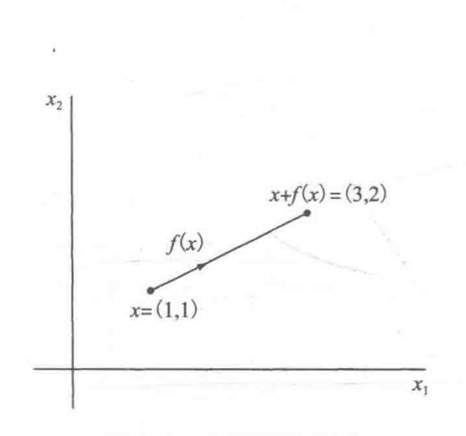


图 2.1 向量场的表示

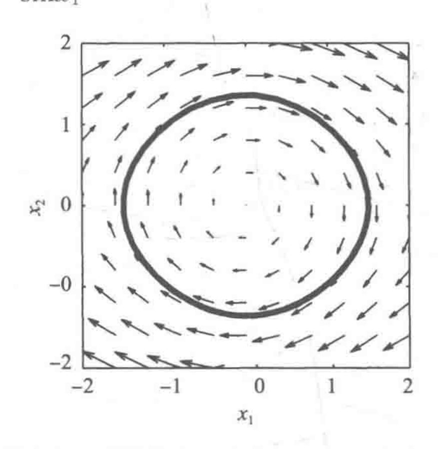


图 2.2 无摩擦力时单摆方程的向量场图

对于图中的一个给定点 x，其所带的箭线长度正比于 $f(x)$的长度，即正比于 $\sqrt{f_1^2(x)+f_2^2(x)}$。但有时为了方便，将各点所带的箭线都画成等长的。因为每点的向量场是通过该点轨线的

⊖ 本章基本采用文献[25]的表述方式。

切线，因此实际上可以从向量场图做出微分方程的轨线。从给定的初始点 x_0 出发，沿向量场移动一段距离得到一个终点，将该终点作为起点重复前过程，就可以得到一段折线。只要把相邻点选得充分近，这条折线就是一条合理的近似轨线。在图 2.2 中，仔细地按照上述步骤画图，可以看出轨线是经过(1.5，0)的一条闭合曲线。

在相平面上画出的所有轨线的图称为方程式(2.1)的相图。相图的(近似)图形可以在相平面 x_1-x_2 上尽量多地挑选初始状态，并从这些初始状态出发作轨线来完成。目前已有不少解非线性微分方程的现成程序，因此很容易通过计算机仿真来构造相图(2.5 节将会给出关于绘图的一些提示)。注意由于轨线中未出现时间，所以不可能从轨线恢复出解$(x_1(t), x_2(t))$。因此在这个意义上，轨线只是定性地给出解的特性，还不算是定量特性。例如，一条闭合轨线表明方程有一个周期解，即系统具有持续振荡；如轨线是一条向中心收缩的螺线，则表明系统存在减幅振荡。本章的其余部分将应用相图来定性地分析二维系统的特性。 16

2.1 线性系统的定性性质

考虑线性时不变系统

$$\dot{x} = Ax \tag{2.2}$$

其中，A 为 2×2 实矩阵。对于给定初始状态 x_0，方程(2.2)的解为

$$x(t) = M\exp(J_r t)M^{-1}x_0$$

其中，J_r 为 A 的实约旦型，M 是实非奇异矩阵，使得 $M^{-1}AM=J_r$。这里只关注 A 具有互异非零的特征值的情形[⊖]，这时约旦型其实为下面两种形式之一：

$$\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix} \quad 或 \quad \begin{bmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{bmatrix}$$

当特征值为实数时出现第一种形式，当特征值为共轭复数时出现第二种形式(本书称之为实约旦型)。我们分别讨论如下。

第一种情况：两个特征值都为实数

此时，$M=[v_1, v_2]$，其中 v_1 与 v_2 分别是和 λ_1 与 λ_2 对应的特征向量。进行坐标变换 $z=M^{-1}x$，则系统转化为两个解耦的标量(一维)微分方程

$$\dot{z}_1 = \lambda_1 z_1, \quad \dot{z}_2 = \lambda_2 z_2$$

对于给定的初始状态(z_{10}, z_{20})，其解为

$$z_1(t) = z_{10}e^{\lambda_1 t}, \quad z_2(t) = z_{20}e^{\lambda_2 t}$$

从两个方程中消去 t，得

$$z_2 = cz_1^{\lambda_2/\lambda_1} \tag{2.3}$$

其中，$c=\dfrac{z_{20}}{(z_{10})^{(\lambda_2/\lambda_1)}}$，它可以取任意值。系统的相图可由式(2.3)生成的一组曲线给出，相图的形状与 λ_1 和 λ_2 的符号有关。

首先考虑两个特征值都为负数的情况。不失一般性，设 $\lambda_2<\lambda_1<0$。这样当 $t\to\infty$时，两个指数项 $e^{\lambda_1 t}$与 $e^{\lambda_2 t}$都趋于零。此外，由于 $\lambda_2<\lambda_1<0$，$e^{\lambda_2 t}$比 $e^{\lambda_1 t}$更快地趋于零，因此称 λ_2 为快特征值，λ_1 为慢特征值。为了便于以后参考，我们称为 v_2 为快特征向量，v_1 为慢特征向量。 17

⊖ 当 A 有零或多重特征值的情况，参见文献[74，2.1 节]。

当比值$\frac{\lambda_2}{\lambda_1}>1$，沿着式(2.3)的曲线，轨线趋于$z_1-z_2$平面的原点，在$z_1-z_2$平面上曲线的斜率为

$$\frac{\mathrm{d}z_2}{\mathrm{d}z_1}=c\frac{\lambda_2}{\lambda_1}z_1^{\left[\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)-1\right]}$$

由于$\left[\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)-1\right]$为正，当$|z_1|\to 0$时，曲线斜率趋于零，当$|z_1|\to\infty$时，曲线斜率趋于$\infty$，因此当轨线趋于原点时，与$z_1$轴相切，而当轨线趋于$\infty$时，与$z_2$轴平行。由此，可画出一组典型的轨线，如图2.3所示。当变换到x坐标系时，即可得到如图2.4a所示的一组典型相图。注意，在x_1-x_2平面，当轨线趋于原点时，与慢特征值向量v_1相切，而远离原点时，与快特征向量v_2平行。这种情况下，平衡点$x=0$称为**稳定节点**(或**吸引节点**)。

18

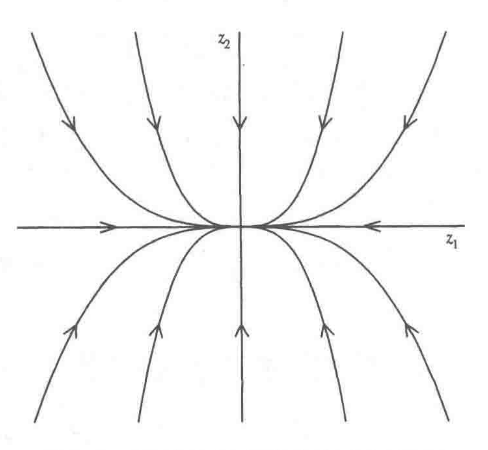
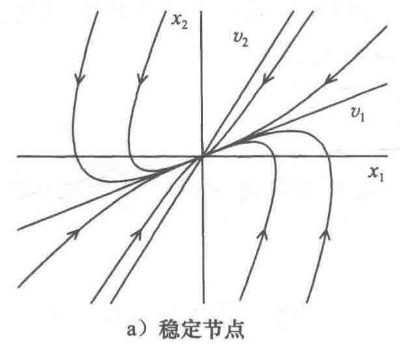
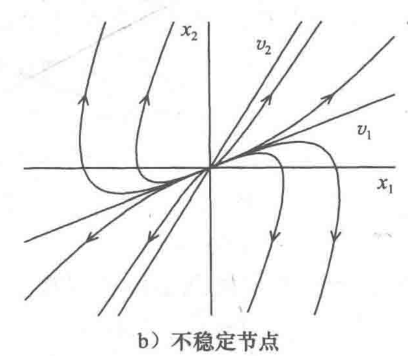


图2.3　规范坐标中稳定节点的相图

当λ_1和λ_2均为正时，相图会保持图2.4a的特性，但轨线方向相反，这是由于指数项$\mathrm{e}^{\lambda_1 t}$和$\mathrm{e}^{\lambda_2 t}$随t的增大按指数规律增加，图2.4b所示为$\lambda_2>\lambda_1>0$时的相图，此时平衡点$x=0$称为**不稳定节点**(或**发散节点**)。



a）稳定节点



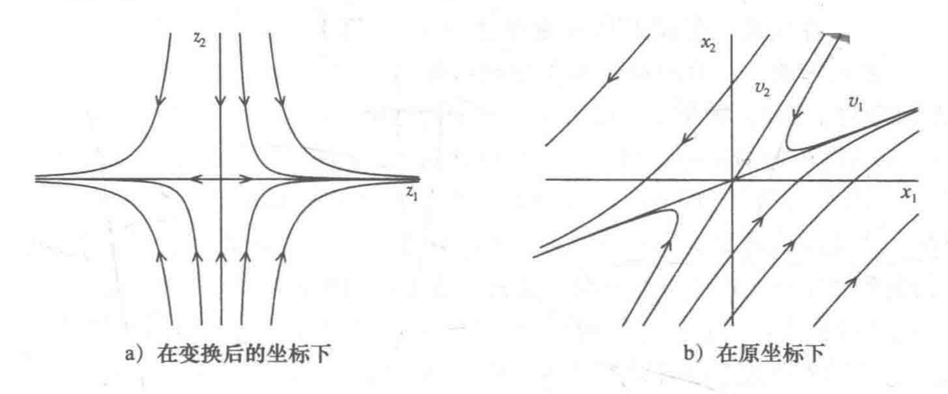
b）不稳定节点

图2.4　相图

现在假设两个特征值符号相反，例如，设$\lambda_2<0<\lambda_1$，当$t\to\infty$时，$\mathrm{e}^{\lambda_1 t}\to\infty$，而当$t\to 0$时，$\mathrm{e}^{\lambda_2 t}\to 0$。因此，称$\lambda_2$为稳定特征值，$\lambda_1$为不稳定特征值。相应地，$v_2$和$v_1$分别称为稳定特征向量和不稳定特征向量。式(2.3)中的指数$\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)$为负，因此这组轨线在$z_1-z_2$平面上呈现图2.5a所示的典型形式，即双曲线形状。当$|z_1|\to\infty$时轨线与z_1轴相切，当$|z_1|\to 0$时，轨线与z_2轴相切。只有四条沿着坐标轴的轨线与这些双曲线形状不同，两条沿z_2轴的轨线当$t\to\infty$时趋于原点，因此被称为稳定轨线，而另两条沿z_1轴的轨线当$t\to\infty$时趋于无穷大，因此称为不稳定轨线。在x_1-x_2平面上的相图如图2.5b所示，其中沿稳定向量v_2的是稳定轨线，而沿不稳定向量v_1的是不稳定轨线，此时的平衡点称为**鞍点**。

第二种情况：复特征值：$\lambda_{1,2}=\alpha\pm \mathrm{j}\beta$

坐标变换$z=M^{-1}x$可将系统(2.2)转换为



a）在变换后的坐标下　　b）在原坐标下

图 2.5　鞍点的相图

$$\dot{z}_1 = \alpha z_1 - \beta z_2, \quad \dot{z}_2 = \beta z_1 + \alpha z_2$$

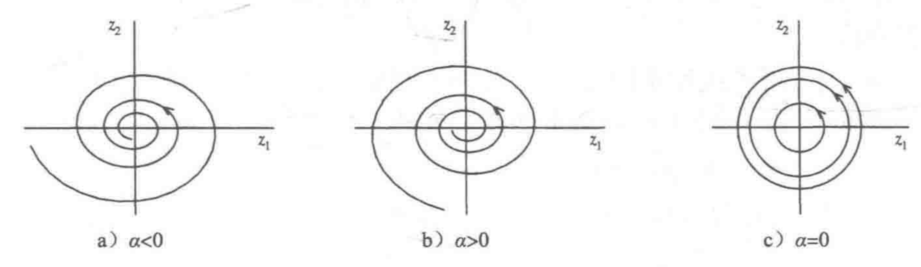
该方程的解是振荡的，做极坐标变换 $z_1 = r\cos\theta$ 和 $z_2 = r\sin\theta$，则在极坐标下可以将上述方程转变成两个解耦的标量微分方程

$$\dot{r} = \alpha r, \quad \dot{\theta} = \beta$$

对于给定初始状态(r_0，θ_0)，其解为

$$r(t) = r_0 e^{\alpha t}, \quad \theta(t) = \theta_0 + \beta t$$

在 $z_1 - z_2$ 平面上，上述解表现为对数螺旋曲线。图 2.6 给出了 α 取不同值时轨线的形状。当 $\alpha < 0$ 时，螺线收敛于原点；当 $\alpha > 0$ 时，螺线由原点向外发散；当 $\alpha = 0$ 时，轨线为半径为 r_0 的圆。图 2.7 为在 $x_1 - x_2$ 平面内的轨线，如果 $\alpha < 0$，平衡点 $x = 0$ 称为稳定焦点(也称螺线汇聚点)；如果 $\alpha > 0$，平衡点 $x = 0$ 称为不稳定焦点(螺线源点)，如果 $\alpha = 0$，平衡点 $x = 0$ 就称为中心。



a）$\alpha<0$　　b）$\alpha>0$　　c）$\alpha=0$

图 2.6　特征值为复数时的典型轨线



a）稳定焦点　　b）不稳定焦点　　c）中心

图 2.7　相图

非线性系统在平衡点附近的局部特性可以先在平衡点对系统进行线性化，然后通过分析所得到的线性系统来确定。而这个线性系统具有多大的准确性，很大程度上取决于这个线性系统在扰动下其相图是否可以保持原有形态。下文以线性扰动这一特殊情况为例，说明线性系统解

在遭受扰动后的特性变化。假设矩阵 A 受扰动变成 $A+\Delta A$，其中 ΔA 的元素的绝对值非常小。根据矩阵扰动理论[⊖]，矩阵特征值连续地依赖其参数变化。这意味着，对给定任意正数 ε，存在相应的正数 δ，如果 ΔA 的每个元素的绝对值都小于 δ，扰动矩阵 $A+\Delta A$ 的特征值就位于以 A 的特征值为中心、以 ε 为半径的开圆内。从而，位于开右半平面（实部为正）或开左半平面（实部为负）的特征值，在经非常小的扰动后将继续保持在各自的半平面内。然而，虚轴上的特征值在受扰动后可能进入右或左半平面，这是因为圆心位于虚轴的圆不论半径 ε 多小都会与左、右半平面相交。因此，我们可以推断：如果 $\dot{x}=Ax$ 的平衡点 $x=0$ 为节点、焦点或鞍点，则在充分小的扰动 ΔA 下，$\dot{x}=(A+\Delta A)x$ 的平衡点 $x=0$ 将具有相同类型。但当平衡点为中心时的情况则完全不同。考虑平衡点为中心的线性系统，其扰动为如下实约旦型形式

$$\begin{bmatrix} \mu & 1 \\ -1 & \mu \end{bmatrix}$$

其中，μ 为扰动参数。当 μ 为正数时，扰动系统的平衡点为不稳定焦点；当 μ 为负时，平衡点为稳定焦点。不管 μ 的绝对值多小，只要不为零，这个结论都是正确的。稳定与不稳定焦点的相图与中心的相图完全不同，所以在扰动下平衡点可能不再是中心。节点、焦点与鞍点平衡点称为是**结构稳定的**，因为它们在充分小的扰动下将维持既定特性[⊜]，而中心不是结构稳定的。造成这两种不同情况的原因是 A 特征值的位置，位于虚轴的特征值易受扰动影响。上述分析带来了**双曲平衡点**的概念：如果一个矩阵 A 没有零实部的特征值[⊜]，则称它是双曲的。

2.2 平衡点附近的定性性质

读者在本节将会看到，除了一些特殊情况，非线性系统平衡点附近的特性可由该点的**线性化模型**来确定。

设 $p=(p_1, p_2)$ 是非线性系统式(2.1)的一个平衡点，并假设函数 f_1 和 f_2 连续可微。在 (p_1, p_2) 处将 f_1 和 f_2 做 Taylor 级数展开，可得

$$\dot{x}_1 = f_1(p_1,p_2) + a_{11}(x_1-p_1) + a_{12}(x_2-p_2) + \text{H.O.T.}$$
$$\dot{x}_2 = f_2(p_1,p_2) + a_{21}(x_1-p_1) + a_{22}(x_2-p_2) + \text{H.O.T.}$$

其中，

$$a_{11} = \left.\frac{\partial f_1(x_1,x_2)}{\partial x_1}\right|_{x_1=p_1,x_2=p_2}, \quad a_{12} = \left.\frac{\partial f_1(x_1,x_2)}{\partial x_2}\right|_{x_1=p_1,x_2=p_2}$$
$$a_{21} = \left.\frac{\partial f_2(x_1,x_2)}{\partial x_1}\right|_{x_1=p_1,x_2=p_2}, \quad a_{22} = \left.\frac{\partial f_2(x_1,x_2)}{\partial x_2}\right|_{x_1=p_1,x_2=p_2}$$

H.O.T. 表示展开式中的高阶项，即形如 $(x_1-p_1)^2$、$(x_2-p_2)^2$、$(x_1-p_1)(x_2-p_2)$ 等项。因为 (p_1, p_2) 为平衡点，故有

$$f_1(p_1,p_2) = f_2(p_1,p_2) = 0$$

由于我们只对 (p_1, p_2) 附近的轨线感兴趣，因此定义 $y_1=x_1-p_1$，$y_2=x_2-p_2$，并将上述状态方程改写为

⊖ 参见文献[51，第 7 章]。
⊜ 结构稳定性的严格且更为一般的定义参见文献[62，第 16 章]。
⊜ 双曲平衡点的定义可推广到高维系统。通过在平衡点线性化系统的特征值，可将此概念推广到非线性的平衡点。

$$\dot{y}_1 = \dot{x}_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \text{H.O.T.}$$
$$\dot{y}_2 = \dot{x}_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \text{H.O.T.}$$

如果只是关注平衡点附近足够小的邻域，那么高阶项就可以忽略。舍去这些高阶项并用线性状态方程

$$\dot{y}_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2, \quad \dot{y}_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2$$

逼近非线性状态系统式(2.1)。上式用向量形式表示，则是

$$\dot{y} = Ay, \quad \text{其中}, A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \left.\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}\right|_{x=p} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=p}$$

矩阵$\left[\dfrac{\partial f}{\partial x}\right]$称为$f(x)$的Jacobi矩阵，$A$是Jacobi矩阵$\left[\dfrac{\partial f}{\partial x}\right]$在$x=p$处的值。

我们有理由认为在平衡点的一个充分小的邻域内，非线性系统的轨线非常接近在该平衡点线性化所得线性系统的轨线。实际上，如果线性化后方程的原点是一个稳定(或不稳定)节点、稳定(或不稳定)焦点或鞍点，那么在平衡点的一个小邻域内，非线性状态方程的轨线就会具有像稳定(或不稳定)节点、稳定(或不稳定)焦点或鞍点的特性⊖。如此，就根据线性化后的状态方程的平衡点性质，将非线性状态方程式(2.1)的平衡点称为稳定(或不稳定)节点、稳定(或不稳定)焦点或鞍点。

22

上述线性化特征仅仅讨论了线性化状态方程没有在虚轴上的特征值的情况，即当原点是线性系统的双曲平衡点时。我们把这个定义推广到非线性系统中，如果Jacobi矩阵在平衡点处的值在虚轴上没有特征值，则我们称该平衡点为双曲的。如果Jacobi矩阵有在虚轴上的特征值，则非线性状态方程在平衡点附近的特性与其线性化系统在该平衡点附近的特性可能截然不同。由于之前已经讨论过线性扰动对线性系统特性的影响，因此读者对该结果应该不会感到惊讶。

下面的例子讨论线性化方程原点是中心的情况，可以进一步帮助读者理解这个结论。

例2.1 考虑系统

$$\dot{x}_1 = -x_2 - \mu x_1(x_1^2 + x_2^2), \quad \dot{x}_2 = x_1 - \mu x_2(x_1^2 + x_2^2)$$

的原点是它的一个平衡点。在原点做线性化，得到线性状态方程的特征值为±j。因此，原点是线性方程的中心。考虑极坐标变换$x_1 = r\cos\theta$、$x_2 = r\sin\theta$，这时方程为

$$\dot{r} = -\mu r^3, \quad \dot{\theta} = 1$$

这表明非线性系统的轨线当$\mu>0$时与稳定焦点相似，当$\mu<0$时与不稳定焦点相似。◀

上面的例子说明，线性化后，状态方程如呈中心特性，则不能确定原非线性状态方程也具有呈中心特征的平衡点。确定有中心的非线性系统必须通过非线性分析实现。例如，通过构造无摩擦的单摆方程的相图(见图2.2)，可以看出在原点(0，0)的平衡点是中心平衡点。

通过线性化模型确定平衡点类型的方法为构造二维系统相图提供了有用信息。事实上，构造相图的第一步就是找出所有的孤立平衡点，并通过线性化方程确定这些平衡点的类型，平衡点的分类将给它所在邻域相图的大致情况一个清晰的判断。

23

⊖ 文献[58]有该线性化性质的证明。假设$f_1(x_1, x_2)$和$f_2(x_1, x_2)$在平衡点(p_1, p_2)的一个邻域内有连续一阶偏导数，那么这个性质成立。关于高维系统的一个相关的但不相同的线性化结果将在第3章介绍(定理3.2)。

2.3 多重平衡点

如果 A 没有零特征值，即 $\det A \neq 0$，那么 $x=0$ 是线性系统 $\dot{x}=Ax$ 的孤立平衡点。当 $\det A=0$ 时，系统具有连续型平衡点[㊀]，这是线性系统才可能具有的一类平衡点。非线性系统可以有多重的孤立平衡点。在下面的两个例子中，我们探讨附录 A.3 中隧道二极管电路和附录 A.1 中单摆方程的特性，这两个系统都具有多重孤立平衡点。

例 2.2 隧道二极管电路的状态模型为

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{C}[-h(x_1)+x_2], \quad \dot{x}_2 = \frac{1}{L}[-x_1 - Rx_2 + u]$$

假设电路参数[㊁]分别为：$u=1.2\text{V}$，$R=1.5\text{k}\Omega=1.5\times10^3\Omega$，$C=2\text{pF}=2\times10^{-12}\text{F}$，以及 $L=5\mu\text{H}=5\times10^{-6}\text{H}$。时间单位为纳秒，电流 x_2 与 $h(x_1)$ 的单位为 mA。这时状态模型为

$$\dot{x}_1 = 0.5[-h(x_1)+x_2] \stackrel{\text{def}}{=} f_1(x)$$
$$\dot{x}_2 = 0.2(-x_1 - 1.5x_2 + 1.2) \stackrel{\text{def}}{=} f_2(x)$$

假设 $h(\cdot)$ 为

$$h(x_1) = 17.76x_1 - 103.79x_1^2 + 229.62x_1^3 - 226.31x_1^4 + 83.72x_1^5$$

平衡点由曲线 $x_2=h(x_1)$ 与直线 $1.5x_2=1.2-x_1$ 的交点所确定。应用给定数值可以算出这两条线相交于三点：$Q_1=(0.063, 0.758)$，$Q_2=(0.285, 0.61)$ 与 $Q_3=(0.884, 0.21)$，如图 A.5 中的实线交点。

$f(x)$ 的 Jacobi 矩阵为

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} -0.5h'(x_1) & 0.5 \\ -0.2 & -0.3 \end{bmatrix}$$

其中，

$$h'(x_1) = \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x_1} = 17.76 - 207.58x_1 + 688.86x_1^2 - 905.24x_1^3 + 418.6x_1^4$$

24

分别计算 Jacobi 矩阵在平衡点 Q_1、Q_2 与 Q_3 处的值，得到

$$A_1 = \begin{bmatrix} -3.598 & 0.5 \\ -0.2 & -0.3 \end{bmatrix}; \quad \text{特征值：} -3.57, -0.33$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1.82 & 0.5 \\ -0.2 & -0.3 \end{bmatrix}; \quad \text{特征值：} 1.77, -0.25$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -1.427 & 0.5 \\ -0.2 & -0.3 \end{bmatrix}; \quad \text{特征值：} -1.33, -0.4$$

因此，Q_1 为稳定节点，Q_2 为鞍点，Q_3 为稳定节点。仔细检查图 2.8 中的相图可看出，除了趋向鞍点 Q_2 的两条稳定轨线，其他轨线都趋向 Q_1 或 Q_3。将鞍点的两条稳定轨线连接起来得到一条曲线，该曲线把平面分成两部分：所有始于左半边的轨线都逼近 Q_1，而所有始于右半边的轨线都逼近 Q_3。这条特殊曲线就称为分界线，因为它把平面分成两个具有不同特性的区域[㊂]。根据经验，我们可以根据电容电压和电感电流的初始值，确定电路将趋向两个稳态工作点 Q_1 或 Q_3 的哪一个。实际上，人们从不注意平衡点 Q_2，因为总是存在的物

㊀ 这时平衡点充满一个子空间。——译者注

㊁ 数据取自文献[25]。

㊂ 一般来说，状态平面分解成几个区域，每个区域的轨线可能显示不同的特性。分隔这些区域的曲线称为分界线。

理上的扰动会使轨线由 Q_2 点发散，即使是那些初始值在趋向 Q_2 的稳定轨线上的轨线。

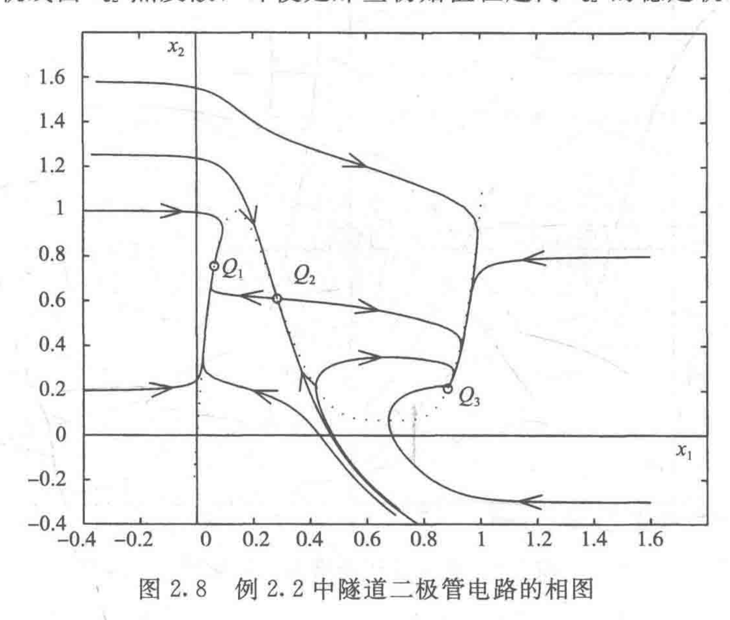


图 2.8　例 2.2 中隧道二极管电路的相图

25

图 2.8 所示的相图给出了隧道二极管电路的全局特性，尽管图中边框限制了初值的选取范围，但是由于系统只有三个平衡点，因此在这一范围外的相图不会具有任何新特性。◀

例 2.3 有摩擦力的单摆方程为

$$\dot{x}_1 = x_2 \overset{\text{def}}{=} f_1(x)$$

$$\dot{x}_2 = -\sin x_1 - 0.3x_2 \overset{\text{def}}{=} f_2(x)$$

$(n\pi, 0)$，其中 $n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ 都是平衡点。对于下列的 Jacobi 矩阵

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x_1 & -0.3 \end{bmatrix}$$

计算在平衡点(0，0)和(π，0)处 Jacobi 矩阵的值，分别得到

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -0.3 \end{bmatrix};\quad \text{特征值：} -0.15 \pm \mathrm{j}0.9887$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -0.3 \end{bmatrix};\quad \text{特征值：} -1.1612, 0.8612$$

因此，(0，0)为稳定焦点，而(π，0)为鞍点，相图如图 2.9 所示，x_1 以 2π 为周期。因而，只要画出介于 $-\pi \leqslant x_1 \leqslant \pi$ 一个竖框内的相图即可得到系统全部特性。因为平衡点(0，0)、(2π，0)、(−2π，0)等都与竖框内的平衡点(0，0)一样，这些平衡点都为稳定焦点。另一方面，在(π，0)、(−π，0)等处的平衡点对应于竖框内的平衡点(π，0)，这些平衡点均为鞍点。趋向鞍点(π，0)和(−π，0)的稳定轨线形成了两条分界线。分界线所包含的区域内的所有轨线都向内趋近于平衡点(0，0)。图形呈周期性重复，轨线可以逼近不同的平衡点，至于逼近哪个平衡点与其所在位置、速度有关。例如，始于 A 点和 B 点的轨线初始位置相同，但速度不同，始于 A 点的轨线趋向平衡点时做减幅振荡，而始于 B 点的轨线因其初始动能较大，在开始减幅振荡前会有一次速度和位移增加过程。还要注意，“不稳定”平衡点(π，0)在实际中无法维持，因为噪声会引起原来趋向它的轨线从某个位置开始发散。◀

26

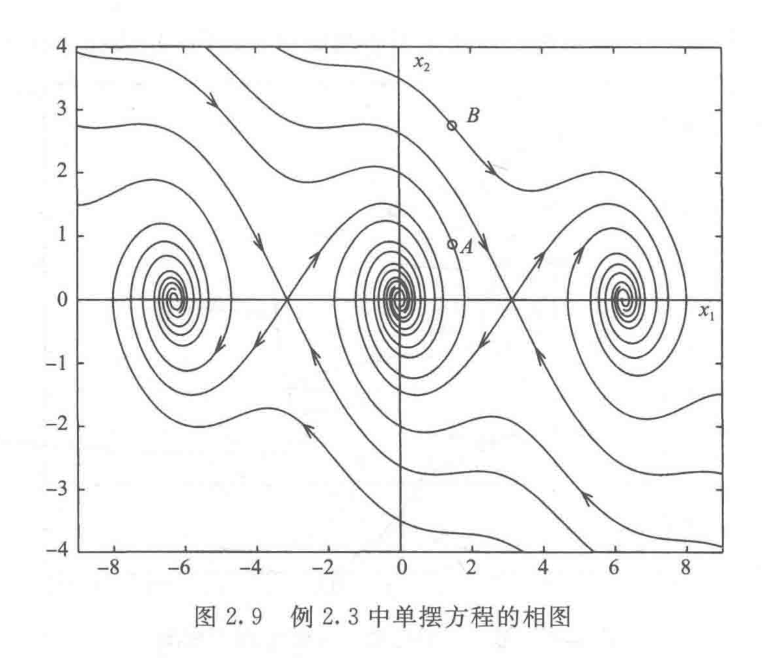


图 2.9 例 2.3 中单摆方程的相图

2.4 极限环

振荡是动态系统最重要的特征之一，当系统具有一个非平凡周期解

$$x(t+T)=x(t),\quad \forall t \geqslant 0$$

时就会振荡，其中 $T>0$ 称为周期。这里的“非平凡”一词排除了对应于平衡点的常数解。常数解满足上述方程，但在讨论振荡解或周期解时不需要考虑这种情形，因此除非特别指出，所提及的周期解都是“非平凡”的。在相图中周期解的轨线是一条闭合的曲线，通常称为周期轨道或闭轨道。

在 2.1 节中我们已经看到一个振荡的例子，特征值为 $\pm \mathrm{j}\beta$ 的二阶线性系统。系统的原点是中心，且其轨线是闭合轨道。当系统变换为实约旦型时，其解为

$$z_1(t)=r_0\cos(\beta t+\theta_0),\quad z_2(t)=r_0\sin(\beta t+\theta_0)$$

其中，

$$r_0=\sqrt{z_1^2(0)+z_2^2(0)},\quad \theta_0=\tan^{-1}\left(\frac{z_2(0)}{z_1(0)}\right)$$

因此系统有一个幅值为 r_0 的持续振荡，这种系统通常称为谐振器。图 2.10 给出的线性 LC 电路就是一个谐振器，我们可以看出，导致振荡的物理机制是储存在电容电场里的能量与储存在电感磁场里的能量交换，且无耗散现象发生。但是，这类线性振荡器存在两个基本问题，一个是鲁棒性问题，等式右边只要有一点小的扰动就可能破坏振荡，即线性振荡器不是结构稳定的。事实上不可能用 LC 电路实现谐振器，因为无论初始储存在电容和电感中的能量有多少，都要被线圈中存在的电阻损耗掉。第二个问题是即使成功地建立了线性振荡，但是振荡的幅值取决于初始条件，而非系统结构特性。

27

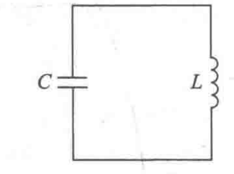


图 2.10 线性 LC 电路谐振器

非线性系统的振荡中没有线性振荡存在的这两个基本问题，因此可以构建具体的物理

非线性振荡器，这类振荡器具有下列特征：

- 振荡是结构稳定的。
- 振荡幅度(稳态时)与初始条件无关。

附录 A.4 节给出的负阻振荡器就是具有上述特征的非线性振荡器。系统的状态模型为

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 - \varepsilon h'(x_1)x_2$$

其中，函数 h 满足附录 A.4 节所述的条件，系统只有一个平衡点 $x_1 = x_2 = 0$，在该点的 Jacobi矩阵为

$$A = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\varepsilon h'(0) \end{bmatrix}$$

由于 $h'(0)<0$，原点是不稳定节点或不稳定焦点，究竟是哪类取决于 $\varepsilon h'(0)$的值。在这两种情况中，所有始于原点附近的轨线都会偏离原点而发散。这种排斥特性是由电阻性元件在原点附近的负阻抗特性引起的，这就是说电阻性元件是“有源的”，即能够提供能量。 28 这一点也可从能量的变化率看出。在任意时刻 t，储存在电容和电感中的总能量为

$$E = \frac{1}{2}C v_C^2 + \frac{1}{2}L i_L^2$$

根据附录 A.4 节，$v_C = x_1$ 和 $i_L = -h(x_1) - \frac{x_2}{\varepsilon}$。由于 $\varepsilon = \sqrt{\frac{L}{C}}$，将它代入能量表达式可得

$$E = \frac{1}{2}C\{x_1^2 + [\varepsilon h(x_1) + x_2]^2\}$$

于是，能量的变化率为

$$\begin{aligned}\dot{E} &= C\{x_1 \dot{x}_1 + [\varepsilon h(x_1) + x_2][\varepsilon h'(x_1)\dot{x}_1 + \dot{x}_2]\} \\ &= C\{x_1 x_2 + [\varepsilon h(x_1) + x_2][\varepsilon h'(x_1)x_2 - x_1 - \varepsilon h'(x_1)x_2]\} \\ &= -\varepsilon C x_1 h(x_1)\end{aligned}$$

根据上述表达式和图 2.11，在原点附近，即$|x_1|$较小时，$x_1 h(x_1)$为负值，所以轨线获得能量。它也说明存在一个带型区域$-a \leqslant x_1 \leqslant b$，轨线在带内获得能量，在带外失去能量。带的边界$-a$ 和 b 是 $h(x_1)=0$ 的解，如图 2.11 所示。随着轨线从带内向外或由带外向内移动，在带内获得的能量和在带外失去的能量会发生抵充。如果在一个循环内沿着一条轨线的正负能量正好抵充，就会发生稳定振荡，这样的轨线是闭轨道。上述讨论说明了负阻抗振荡器会有一个孤立的闭轨道，这在下面的例子——van der Pol 振荡器中会有进一步的说明。

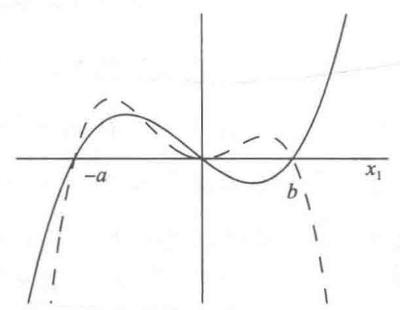


图 2.11 $h(x_1)$(实线)和$-x_1 h(x_1)$(虚线)，由图可知当$-a \leqslant x_1 \leqslant b$时$\dot{E}$是正的

例 2.4 图 2.12a、图 2.12b 和图 2.13a 分别给出了下列 van der Pol 方程在参数 ε 取 0.2、1.0 和 5.0 时的相图

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + \varepsilon(1 - x_1^2)x_2$$ 29

这三种情况下的相图都说明系统存在唯一的闭轨道，而且除了原点处的零解之外所有的轨线都被它吸引。当 $\varepsilon=0.2$ 时，这个闭轨道接近于半径为 2 的圆，这是 ε 较小时(如 $\varepsilon<0.3$)的典型情况。当 $\varepsilon=1.0$ 时，闭轨道的形状像一个扭曲的圆，如图 2.12b 所示。当 ε 较大为

5.0 时，闭轨道严重扭曲，如图 2.13a 所示。在这种情况下，如果选择状态变量为 $z_1=i_L$、$z_2=v_C$，可得到一个更有启发性的相图。此时状态方程为

$$\dot{z}_1=\frac{1}{\varepsilon}z_2,\quad \dot{z}_2=-\varepsilon\left(z_1-z_2+\frac{1}{3}z_2^3\right)$$

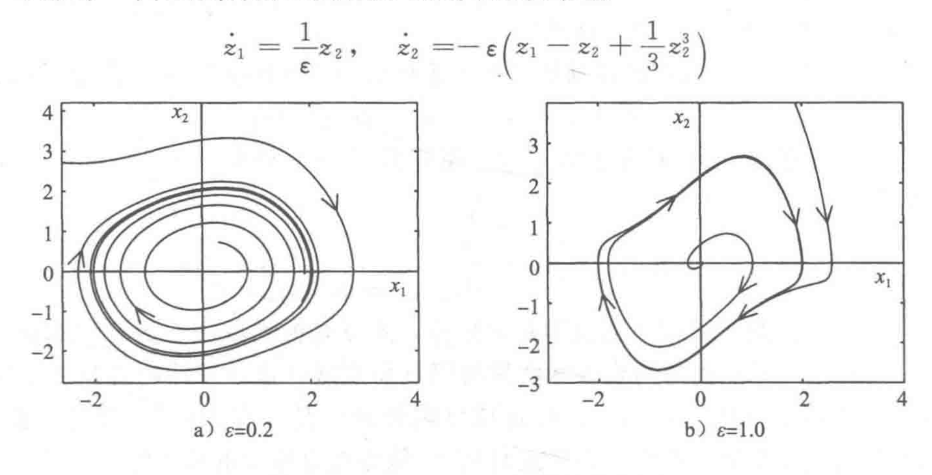


图 2.12 van der Pol 振荡器的相图

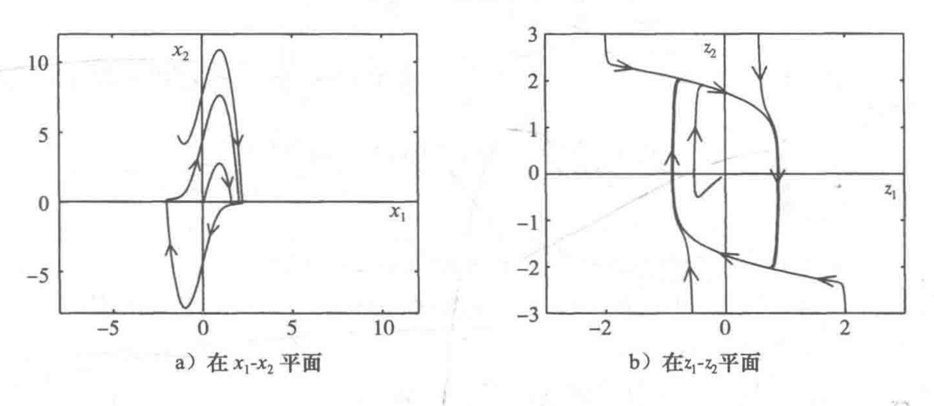


图 2.13 当 ε=5.0 时 van der Pol 振荡器的相图

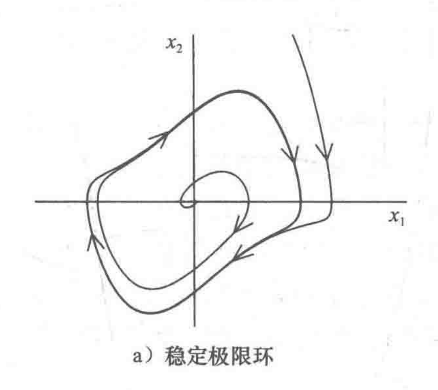
图 2.13b 为 ε=5.0 时，在 z_1-z_2 平面上的相图，相图上有一个闭轨道，左右两边接近竖直，而上下两边非常接近曲线 $z_1=z_2-\frac{1}{3}z_2^3$ 的两个分支。闭轨道的竖直部分可看成当轨道到达转角时，它从曲线的一个分支跳到另一个分支。发生跳跃现象的振荡通常称为*松弛振荡*，图 2.13b 给出的是 ε 较大时(如 ε>3.0)的典型相图。◀

30

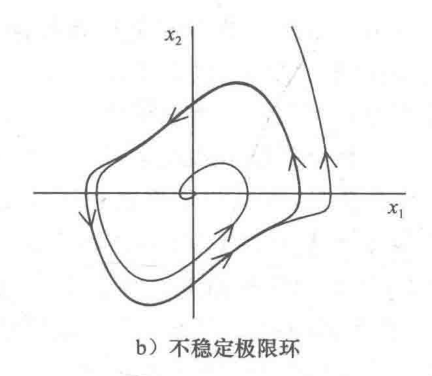
例 2.4 中的闭轨道与谐振器的闭轨线不同。在谐振中有一串连续的闭轨线，而在 van der Pol 系统中的振荡只有一个孤立的闭轨道，这种孤立的闭轨道称为*极限环*。van der Pol 系统的极限环具有如下性质：当时间趋向无穷时，极限环领域内的所有轨线最终都趋于极限环，具有这一性质的极限环称为*稳定极限环*。我们还将遇到*不稳定极限环*，其性质为：随着时间进展，所有始于极限环附近的任意轨线都将远离极限环。下面是一个不稳定极限环的例子，如图 2.14b 所示，它是一个时间反向的 van der Pol 方程，即

$$\dot{x}_1=-x_2,\quad \dot{x}_2=x_1-\varepsilon(1-x_1^2)x_2$$

该系统的相图除箭头方向与图 2.14a 的相反外，其余与 van der Pol 振荡器(见图 2.12a 或图 2.14a)完全相同，此极限环是不稳定的。



a）稳定极限环



b）不稳定极限环

图 2.14 稳定极限环和不稳定极限环

2.5 绘制相图的数字化方法

现有大量可用的求解常微分方程数值的计算机程序，用这些程序可有效地构造二维系统的相图[一]。本节将以这方面内容给初学者做一些介绍[二]。

31

绘制相图的第一步是求出所有平衡点，然后通过线性化确定那些孤立平衡点的类型。

画轨线包括三项任务[三]：

- 在状态平面内选定一个边界框，画出框内轨线。设边界框为

$$x_{1\min} \leqslant x_1 \leqslant x_{1\max}, \quad x_{2\min} \leqslant x_2 \leqslant x_{2\max}$$

- 在边界框内选定初始点(初始条件)。
- 计算并绘制轨线。

对于轨线计算。为求出通过点 x_0 的轨线，要先求解正向时间(t 为正)和反向时间(t 为负)的方程

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0$$

在解反向时间的时候，实际是按照正向时间解方程

$$\dot{x} = -f(x), \quad x(0) = x_0$$

所求出的解与反向时间的解相等，由于做了变量代换 $\tau = -t$，改变了方程式右边的符号。注意反向时间轨线的箭头与求出解的箭头指向相反，后者是指向初始条件的。解反向时间方程是得到不稳定焦点、不稳定节点和不稳定极限环的邻域内相图的唯一方法。注意轨线在边界框内是连续的。如果关注计算程序的运行时间，可以当轨线趋向平衡点时用轨线和平衡点间的距离设置一个停止运算的判据。

边界框的选择应能显示出轨线的所有重要特性，由于有些特性预先并不知道，所以当发现问题时应及时调整边界框。最初的设定应该是从所有已知信息出发的。例如，所有平衡点都应包含在框内。当发现轨线会走出框时应注意，该轨线可能趋向无穷，也可能被一个稳定极限环吸引，而后者应该扩大边界框。

选择初始点的最简单方法是将平衡点均匀地分布在边界框内。但是，如果初始条件也均匀地分布在边界框内，则很难保证轨线在框内的均匀分布。一个较好的方法是画出已计

[一] 一个基于 MATLAB 画相图的有效程序为 pplane。

[二] 见参考文献[104]的第 10 章，其中包含较多关于如何产生更丰富相图的内容。

[三] 省略了第四步，即给轨线加上箭头，这可以很方便地用手工画出。

算好的轨线后，根据满意度调整初始条件。由于大多数计算机程序都有成熟的绘图工具，所以这类根据满意度的调整是非常可行的。

对于鞍点，可利用线性化模型产生稳定和不稳定轨线，这是有用的方法，如例 2.2 和例 2.3 所示，鞍点的稳定轨线定义了一条分界线。如线性化模型的特征值为$\lambda_1>0>\lambda_2$，对应的特征向量为 v_1 和 v_2。如果这个线性化模型是在平衡点 p 处得到的，那么非线性系统趋近于平衡点 p(鞍点)的稳定轨线和不稳定轨线将分别与稳定特征向量 v_2 和不稳定特征向量 v_1 相切。因此，从初始点 $x_0=p\pm\alpha v_1$ 处可产生两条不稳定轨线，同样从初始点 $x_0=p\pm\alpha v_2$ 处可产生两条稳定轨线。不稳定轨线的主要部分由正向时间的解产生，而稳定轨线的主要部分由反向时间的解产生。

32

2.6 练习

2.1 对下列各系统：

(1) 找出所有平衡点并确定其类型。

(2) 画出相图并讨论。

1) $\dot{x}_1=-x_1^3+x_2$，　$\dot{x}_2=x_1-x_2^3$

2) $\dot{x}_1=x_2$，　$\dot{x}_2=x_1-x_2-0.5(x_1+x_2)^2$

3) $\dot{x}_1=x_2$，　$\dot{x}_2=2x_1+3x_1^2+x_1^3-x_2$

4) $\dot{x}_1=-x_2+\frac{1}{4}x_2^3$，　$\dot{x}_2=4x_1-2x_2$

5) $\dot{x}_1=x_2$　$\dot{x}_2=-x_1+x_2(1-x_1^2+0.1x_1^4)$

6) $\dot{x}_1=-x_1+2x_2+x_1x_2+x_2^2$，　$\dot{x}_2=-x_1-x_1^2-x_1x_2$

7) $\dot{x}_1=x_2$，　$\dot{x}_2=-\frac{(x_1+x_2)}{(x_1+2)}$(定义在集合$\{x_1>-2\}$上)

8) $\dot{x}_1=-x_2$　$\dot{x}_2=2x_1+3x_2+2\text{sat}(-3x_2)$

9) $\dot{x}_1=x_2$，　$\dot{x}_2=-x_1+\frac{1}{16}x_1^3+x_2-\frac{1}{3}x_2^3$

2.2 考虑例 2.2 中的隧道二极管电路，除了 u 外，所有的参数相同。画出下列情况的相图并讨论。

(1) $u=0.4$

(2) $u=2$

2.3 考虑生物化学反应器(见式(A.19))，其中 v 由式(A.20)定义，设 $\alpha=23$，$\beta=0.39$，$\gamma=0.57$。画出在域$\{x_1\geqslant0,\ x_2\geqslant0\}$上的相图并进行讨论，$u$ 分别取下列值。

33

(1) $u=0.5$

(2) $u=1$

(3) $u=1.5$

2.4 画出负阻振荡器(见附录 A.10 节)的相图并讨论，其中

(1) $h(v)=-v+v^3-\frac{v^5}{5}+\frac{v^7}{98}$且 $\varepsilon=1$

(2) $h(v)=-v+v^3-\frac{v^5}{5}+\frac{v^7}{84}$且 $\varepsilon=1$

2.5 文氏电桥振荡器的一种等效电路如图2.15所示[26]，其中 $g(v_2)$ 为非线性电压控制的电压源。

(1) 以 $x_1=\dfrac{(C_1v_1+C_2v_2)}{(C_1+C_2)}$ 与 $x_2=v_2$ 为状态变量，证明状态模型为

$$\dot{x}_1=-\frac{1}{R_2(C_1+C_2)}x_2,\quad \dot{x}_2=\frac{C_1+C_2}{C_1C_2R}(x_1-x_2)+\frac{1}{C_2R_1}g(x_2)-\frac{1}{C_2R_2}x_2$$

(2) 设 $C_1=C_2=C$，$R_1=R_2=R$ 及 $g(v)=3.234v-2.195v^3+0.666v^5$，画出用 $\tau=\dfrac{t}{CR}$ 作为时间单位的相图并讨论。

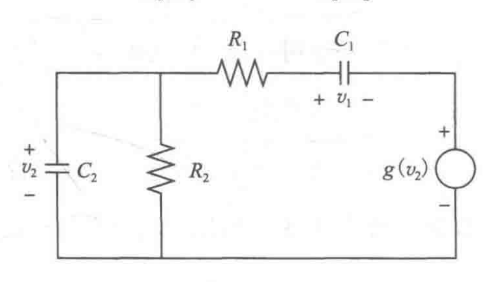


图2.15 练习2.5

2.6 如果时间常数 T 足够小，可得到微静电执行器的降阶模型(见附录A.33节)。将 $\dot{x}_3$ 的方程写成 $T\dot{x}_3=(\cdot)$，再设 $T=0$，并通过代数方程消去 x_3，可以得出：

$$\dot{x}_1=x_2,\quad \dot{x}_2=-x_1+2\zeta x_2+\frac{4u^2}{27(1-x_1)^2}$$

其中，$0\leqslant x_1\leqslant 1-\delta$。设 u 为常数输入：$u(t)\equiv U<1$。

(1) 证明存在两个平衡点，并确定平衡点的类型。

(2) 画出 $\zeta=\dfrac{1}{2}$ 和 $U=\dfrac{3}{4}$ 时的相图并进行讨论。

34

2.7 考虑当 $a=1$ 时的倒立摆方程(见附录(A.47))。

(1) 当 $u=0$ 时，找出所有的平衡点并确定其类型。

(2) 定义能量函数 $E=1+\cos x_1+\dfrac{1}{2}x_2^2$，使得在上平衡点(0，0)处 $E=2$，且在下平衡点(π，0)处 $E=0$。为了使倒立摆摆动，需要吸收能量。证明控制 $u=k(2-E)x_2\cos(x_1)$ 时，其中 $k>0$，将使得 $\dot{E}>0$，其中 $E<2$ 和 $x_2\cos(x_1)\neq 0$。

(3) 考虑在上述控制下的闭环系统，画出 $k=0.1$ 时的相图并做讨论。

2.8 考虑系统

$$\dot{x}_1=x_2,\quad \dot{x}_2=-0.5x_1+1.5x_2+0.5u$$

分别画出 $u=0$、反馈控制 $u=0.9x_1-3.2x_2$，以及饱和反馈控制 $u=\mathrm{sat}(0.9x_1-3.2x_2)$ 时系统的相图并讨论。

2.9 分别画出系统

$$\dot{x}_1=x_2,\quad \dot{x}_2=x_1-x_2+\mu\,\mathrm{sat}\left(-2x_1+\frac{1}{2}x_2\right)$$

在 $\mu=0.25$、$\mu=1$ 以及 $\mu=3$ 时的相图并讨论。

2.10 中枢神经系统的基本处理单元是神经元。FitzHugh-Naguno 模型[49]是试图描述单神经元动力系统的无量纲模型，模型如下

$$\dot{u}=u-\frac{1}{3}u^3-w+I,\quad \dot{w}=\varepsilon(b_0+b_1u-w)$$

其中，u、w 以及 $I\geqslant 0$ 分别为隔膜电压、恢复变量以及实时电流。常数 ε、b_0 与 b_1 为正数。

(1) 当 $b_1>1$ 时，找出所有平衡点并确定其类型。

(2) 当 $b_1<1$ 时，再做(1)。

(3) 设 $\varepsilon=0.1$、$b_0=2$ 以及 $b_1=1.5$，当 $I=0$ 或 $I=2$ 时，分别画出相图并讨论系统的特性。

(4) 当 $b_1=0.5$ 时，再做(3)。

2.11 考虑在反馈控制 $u=-1+\text{sat}\left(\frac{1}{2}-x_1-x_2\right)$下的磁悬浮系统(见附录式(A.29))。

(1) 分别找出 $c=1$ 及 $c\neq 1$ 但 $\left|\frac{(1-c)}{c}\right|<1$ 两种情况下的所有平衡点，并确定平衡点的类型。

35

(2) 当 $b=0.01$ 和 $c=\frac{2}{3}$时，若约束条件为 $0\leqslant x_1\leqslant 5$，画出系统的相图并讨论。

2.12 考虑非线性系统[77]

$$\dot{x}_1=x_2,\quad \dot{x}_2=0.1x_2^3+u$$

采用反馈控制 $u=-\gamma^2x_1-\gamma x_2$，其中 $\gamma>0$。在原点处的线性化系统有特征值 $\left(\frac{\gamma}{2}\right)(-1\pm \text{j}\sqrt{3})$，因此增加 γ 可以加快线性化系统的响应。为了研究 γ 增加时对非线性系统特性的影响，可选择变量替换 $z_1=\sqrt{\gamma}x_1$，$z_2=\frac{x_2}{\sqrt{\gamma}}$与 $\tau=\gamma t$。

(1) 证明在时间尺度变换后，状态方程为

$$\dot{z}_1=z_2,\quad \dot{z}_2=-z_1-z_2+0.1z_2^3$$

(2) 在 z_1-z_2 平面上画出相图并讨论。

36

(3) 讨论 γ 增加时对 x_1-x_2 平面的相图影响。

第3章 平衡点的稳定性

稳定性理论在系统理论与工程中有重要作用，在动态系统的研究中许多问题都涉及稳定性，而且会涉及不同的稳定性。本章讨论时不变系统平衡点的稳定性，在随后的章节中，我们还将讨论时不变系统其他的稳定性定义，如输入-状态稳定性和输入-输出稳定性。如果所有始于平衡点附近的解始终保持在该点附近，那么称该平衡点是稳定的，否则平衡点是不稳定的。如果所有始于平衡点附近的解不但保持在该点附近，而且随着时间趋于无穷而趋向该平衡点，则称该平衡点是渐近稳定的。3.1 节会对这些概念做精准的阐述。在这节中，我们将讲述如何研究线性系统或标量(一维)非线性系统的平衡点的稳定性。在 3.2 节中，我们运用线性化方法研究非线性系统平衡点的稳定性。3.3 节介绍 Lyapunov 方法，该方法的扩展被称为不变性原理，该部分内容将在 3.4 节给出。3.5 节和 3.6 节详细讨论 3.1 节中介绍的两个概念：指数稳定性与吸引域。最后，在 3.7 节中介绍了两个 Lyapunov 逆定理，一个是关于渐近稳定性的，而另一个则是关于特殊情况下指数稳定性的。

3.1 基本概念

考虑 n 维时不变系统

$$\dot{x} = f(x) \tag{3.1}$$

其中，f 是区域 $D \subset R^n$ 上的局部 Lipschitz 函数。假设 $\bar{x} \in D$ 为方程(3.1)的平衡点，即 $f(\bar{x})=0$。本章旨在描述并研究 $\bar{x}$ 的稳定性。为方便起见，这里所有的定义与定理都假设平衡点是 R^n 中的原点，即都是针对 $\bar{x}=0$ 而言的。这样做并不失一般性，因为经过变量替换总可以把其他的平衡点变换到原点。即如果 $\bar{x} \neq 0$，经 $y=x-\bar{x}$ 变换后，y 的导数为

$$\dot{y} = \dot{x} = f(x) = f(y+\bar{x}) \overset{\text{def}}{=} g(y), \quad \text{其中}, g(0) = 0$$

对于新变量 y，原点是系统的平衡点。因此，不失一般性，我们总假设 $f(x)$ 满足 $f(0)=0$，并只研究 $x=0$ 的稳定性。

定义 3.1 设 $D \subset R^n$ 是包含原点的一个区域，$f(x)$ 是定义在 D 上的局部 Lipschitz 函数，且 $f(0)=0$，则 $\dot{x}=f(x)$ 的平衡点 $x=0$ 是：

- 稳定的，对于每个 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$(δ 可能依赖于 ε)，使得

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geqslant 0$$

- 不稳定的，该平衡点不是稳定的；
- 渐近稳定的，该平衡点是稳定的，且可适当地选择 δ，使得

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t\to\infty} x(t) = 0$$

这种 ε-δ 稳定性定义被称为采用了“挑战-回应”的模式。为了证明原点是稳定的，对于任何指定的 ε，都要去找一个 δ，这个 δ 可能与 ε 有关，使得从原点的 δ 邻域内出发的轨线始终在 ε 邻域内。附录 A.1 中的单摆系统可用来说明定义 3.1 给出的三种稳定性类型。单摆方程为

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\sin x_1 - bx_2$$

该方程有两个平衡点，分别是(0，0)与(π，0)。忽略摩擦力，即设 $b=0$，从第2章的图2.2可以看出，原点附近邻域内的轨线是闭轨道的，从而可以保证始于与该平衡点足够近处的轨线始终在以该平衡点为中心的特定球域内，因此满足稳定性的 ε-δ 要求。但是原点不是渐近稳定的。因为这些轨线最终并未趋向原点，而是保持为闭轨道。当考虑存在摩擦力时($b>0$)，原点处的平衡点变为稳定焦点。从稳定焦点的相图可以看出，轨线满足稳定的 ε-δ 要求。此外，始于平衡点近处的轨线随着时间趋于无穷而趋向该平衡点。在 $x_1=\pi$ 处的平衡点是鞍点，显然不能满足稳定的 ε-δ 条件，因为对于任何充分小的 $\varepsilon>0$，总存在一条轨线会离开闭球$\{\|x-\bar{x}\|\leqslant\varepsilon\}$，即使 $x(0)$任意地接近平衡点 $\bar{x}$。

38

定义了平衡点的稳定性和渐近稳定性后，自然希望找出用于判断并确定是何种稳定性的方法。从上述单摆的例子可以看出，判别稳定性依赖于相图。应用这种方法就需要画出状态方程的相图，但是做到这一点是很困难的，有时甚至是不可能的。Lyapunov 方法为我们提供了一个研究平衡点稳定性的工具，它不需要求解状态方程。然而，有两种特殊情况，即标量系统与线性系统是不需要用 Lyapunov 方法也可以方便地确定稳定性的。

在标量(即一维)情况下，$x(t)$在原点邻域内的行为可以通过分析 $f(x)$的符号来确定。特别是，如果无论在原点 $x=0$ 的哪一边都有 $xf(x)>0$，那么稳定性的 ε-δ 要求将不能得到满足，因为该情况下不管初始点如何接近原点，任何轨线必将远离原点，即找不到 δ，使得轨线保持在 ε 邻域内。图3.1给出这种情形的一些例子。因此，原点稳定的一个必要条件是：在原点的某个邻域内有 $xf(x)\leqslant 0$，不难看出该条件也是充分的。对于渐近稳定性，我们需要证明存在原点的一个邻域，使得始于该邻域的轨线随着时间趋于无穷而收敛到零。显然，如果 $f(x)$在原点某一侧恒等于零，系统不满足渐近稳定的要求，见图3.2中的例子。再次，不难看出，当且仅当在原点的某个邻域内有 $xf(x)<0$，原点才是渐近稳定的，满足该条件的函数例子如图3.3所示。应该注意到图3.3中的两个例子是有重要区别的。如果函数 $f(x)$如图3.3a所示，那么只有当初始状态在集合$\{-a<x<b\}$中时，才有 $\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=0$；而若 $f(x)$如图3.3b所示，那么对于所有的初始状态，该极限都会收敛到0。第一种情况中，称集合$\{-a<x<b\}$为吸引域，而第二种情况中，称原点是全局渐近稳定的。下面的定义将吸引域和全局稳定性推广到 n 维系统。

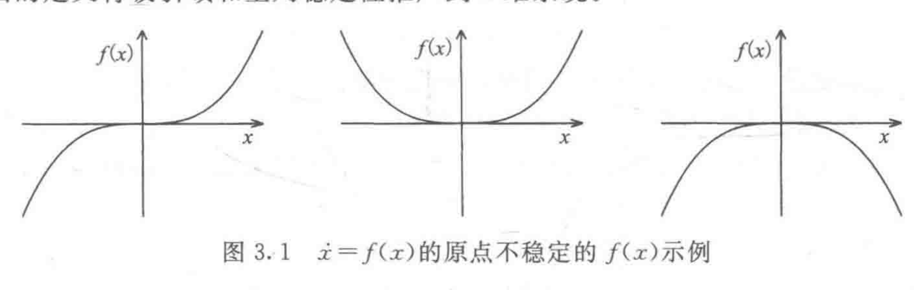


图3.1 $\dot{x}=f(x)$的原点不稳定的 $f(x)$示例

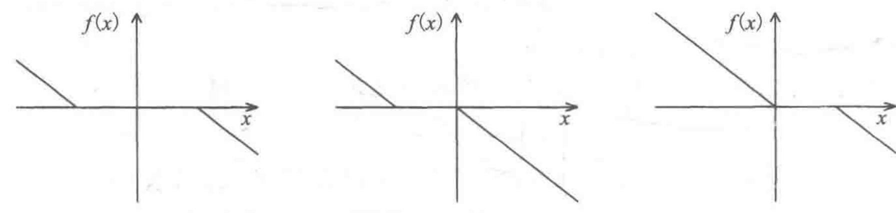


图3.2 $\dot{x}=f(x)$的原点稳定但不是渐近稳定的 $f(x)$示例

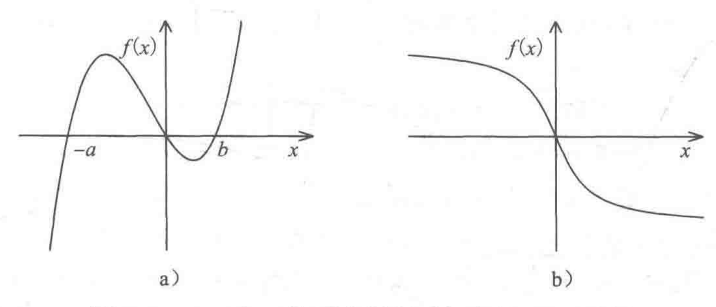


图 3.3　$\dot{x}=f(x)$的原点是渐近稳定的 $f(x)$示例

定义 3.2　设原点为系统 $\dot{x}=f(x)$的渐近稳定平衡点，$D\subset R^n$是包含原点的一个区域，$f(x)$为定义在 D 上的局部 Lipschitz 函数，则：

- 原点的吸引域(也称为渐近稳定域、吸引区或吸引盆)是这样的一个集合，如果 $x_0\in D$并在吸引域内，那么对于所有 $t\geqslant 0$，

$$\dot{x}=f(x),\quad x(0)=x_0$$

的解存在，且随着时间趋于无穷，这个解收敛到原点；
- 如果吸引域为整个空间 R^n，则称原点是全局渐近稳定的平衡点。

39

如果原点为系统的全局渐近稳定平衡点，则原点必定为唯一平衡点。因为如果存在另一平衡点 $\bar{x}$，始于 $\bar{x}$ 的轨线将对所有 $t\geqslant 0$ 保持在 $\bar{x}$ 处，从而不能趋近原点，这与原点是全局渐近稳定的结论矛盾。因此，全局渐近稳定性不适用于研究像单摆方程的多平衡点系统。

线性时不变系统

$$\dot{x}=Ax \tag{3.2}$$

的原点的稳定性可由矩阵 A 的特征值的位置确定。回想线性系统理论[⊖]，当初始状态 $x(0)$ 给定后，方程式(3.2)的解为

40

$$x(t)=\exp(At)x(0) \tag{3.3}$$

对于任意的矩阵 A，总存在非奇异矩阵 P(可能为复数的)，可把 A 变换成 Jordan 标准型，即

$$P^{-1}AP=J=\text{block diag}[J_1,J_2,\cdots,J_r]$$

其中，J_i 为对应于矩阵 A 的特征值 λ_i 的 Jordan 块。一阶 Jordan 块的形式为 $J_i=\lambda_i$，而当 Jordan 块 J_i 的阶 $m_i>1$ 时，其形式如下

$$J_i=\begin{bmatrix}\lambda_i & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 & & 0\\ \vdots & & \ddots & & & \vdots\\ \vdots & & & \ddots & & 0\\ \vdots & & & & \ddots & 1\\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_i\end{bmatrix}_{m_i\times m_i}$$

因此，

$$\exp(At)=P\exp(Jt)P^{-1}=\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{m_i}t^{k-1}\exp(\lambda_i t)R_{ik} \tag{3.4}$$

其中，m_i 为 Jordan 块 J_i 的阶。如果 $n\times n$ 矩阵 A 有代数重数为 q_i 的特征值 λ_i，则对应于

⊖ 可参见文献[2][22][59][62][70]或[114]等。

λ_i 的所有 Jordan 块的阶都为 1 的充要条件是 $\text{rank}(A-\lambda_i I)=n-q_i$。下一个定理将给出线性系统原点的稳定性。

定理 3.1 当且仅当 A 的所有特征值满足 $\text{Re}[\lambda_i]\leqslant 0$，且对于每个 $\text{Re}[\lambda_i]=0$ 的特征值 λ_i，其代数重数 $q_i\geqslant 2$，且满足 $\text{rank}(A-\lambda_i I)=n-q_i$，其中 n 为 x 的维数，$\dot{x}=Ax$ 的平衡点 $x=0$ 是稳定的。当且仅当 A 的所有特征值满足 $\text{Re}[\lambda_i]<0$，平衡点 $x=0$ 是全局渐近稳定的。

证明： 从式(3.3)可以看出，当且仅当对所有 $t\geqslant 0$，$\exp(At)$ 为有界函数，原点是稳定的。如果 A 的某一特征值有 $\text{Re}[\lambda_i]>0$，式(3.4)中相应的指数项 $\exp(\lambda_i t)$ 将随着 $t\to\infty$ 而趋向无穷。因而，特征值必须满足 $\text{Re}[\lambda_i]\leqslant 0$。然而，对于那些 $\text{Re}[\lambda_i]=0$ 的特征值，如果相应的 Jordan 块的阶高于 1，则在式(3.4)中将产生 t^{k-1} 这样的项，从而导致无界，即趋向无穷。所以，必须把零实部特征值的 Jordan 块的阶限定为 1，这等价于秩条件 $\text{rank}(A-\lambda_i I)=n-q_i$ 成立。因此，定理给出的条件对稳定性是必要的。很显然该条件也是确保 $\exp(At)$ 有界的充分条件。关于原点渐近稳定，$\exp(At)$ 必须随 $t\to\infty$ 趋于 0。由式(3.4)可知，当且仅当 $\text{Re}[\lambda_i]<0$，$\forall i$，$\exp(At)\to 0$。由于 $x(t)$ 线性依赖初始状态 $x(0)$，原点的渐近稳定必是全局的。 □

41

上述证明从数学上说明了为什么虚轴上的重特征值必须满足秩条件 $\text{rank}(A-\lambda_i I)=n-q_i$。下面的例子可以帮助我们看清这个条件的物理意义。

例 3.1 图 3.4 所示为两个相同系统的串联与并联。系统的状态模型都为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u,\quad y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x$$

其中，u 与 y 分别为系统的输入与输出。设 A_s 与 A_p 分别为当模型没有驱动输入时的串联与并联系统的矩阵，则

$$A_p=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{bmatrix},\quad A_s=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

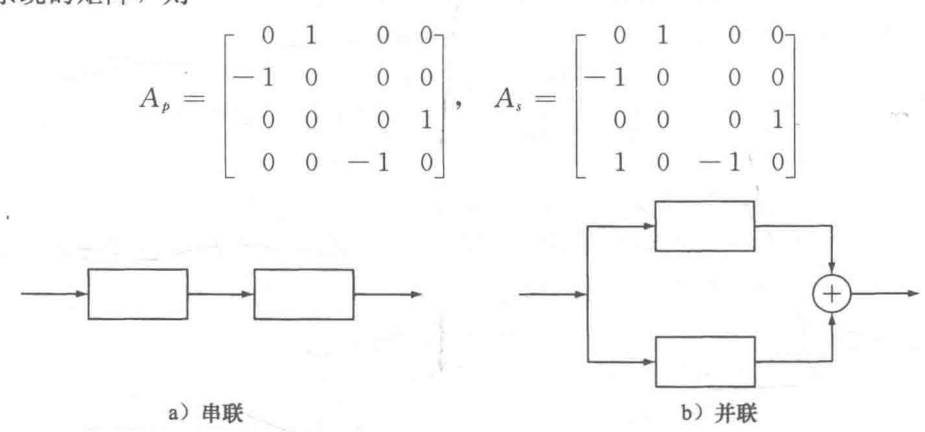


图 3.4 串联与并联系统

矩阵 A_p 与 A_s 在虚轴上具有相同的特征值，$\lambda=\pm\text{j}$，代数重数 $q_i=2$，其中 $\text{j}=\sqrt{-1}$。容易检验 $\text{rank}(A_p-\text{j}I)=2=n-q_i$，然而 $\text{rank}(A_s-\text{j}I)=3\neq n-q_i$。因而，根据定理 3.1 可知，并联系统的原点是稳定的，而串联系统的原点是不稳定的。为了从物理角度理解这两种情况的不同，注意在并联系统中，非零初始状态产生频率为 1rad/s 的正弦振荡，这是时间的有界函数。这些正弦信号的和保持有界。另一方面，串联系统中的第一级非零初始值产生频率为 1rad/s 的正弦振荡，这些正弦信号又作为第二级的驱动输入。由于第二级的无阻尼自然振荡频率为 1rad/s，驱动输入将引起“共振”，使得响应变得无界。 ◀

42

当 A 的所有特征值满足 $\text{Re}[\lambda_i]<0$，A 称为 Hurwitz 矩阵或稳定矩阵。那么定理 3.1

说明：当且仅当 A 是 Hurwitz 矩阵时，$\dot{x}=Ax$ 的原点是渐近稳定的。这时，存在正常数 k 与 λ，使得方程的解满足不等式

$$\|x(t)\| \leqslant k\|x(0)\| \mathrm{e}^{-\lambda t}, \quad \forall t \geqslant 0 \tag{3.5}$$

这个结论也可从式(3.3)与式(3.4)看出。当非线性系统的解满足不等式(3.5)时，平衡点称为是指数稳定的，具体定义如下。

定义 3.3 设 $D \subset R^n$ 是包含原点的一个区域，$f(x)$ 为定义在 D 上的局部 Lipschitz 函数，且 $f(0)=0$。如果存在正常数 c，k 及 λ，使得不等式(3.5)对所有 $\|x(0)\|<c$ 成立，则称 $\dot{x}=f(x)$ 的平衡点 $x=0$ 是指数稳定的。如果不等式对所有初始状态 $x(0)$ 都满足，则称原点是全局指数稳定的。

平衡点的指数稳定性是比渐近稳定性更强的性质。如果平衡点是指数稳定的，那么也必然是渐近稳定的。反过来不一定成立，下例将说明这个事实。

例 3.2 考虑标量系统 $\dot{x}=-x^3$，原点是它的渐近稳定平衡点，因为 $xf(x)<0$ 对一切 $x\neq 0$ 成立。可以求得其解为

$$x(t) = \frac{x(0)}{\sqrt{1+2tx^2(0)}}$$

该解不满足不等式(3.5)，因为如果该不等式满足，则可推导出对所有 $t\geqslant 0$，有

$$\frac{\mathrm{e}^{2\lambda t}}{1+2tx^2(0)} \leqslant k^2$$

而这是不可能的，因为 $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{2\lambda t}}{[1+2tx^2(0)]}=\infty$。 ◀

3.2 线性化

考虑 n 维系统

$$\dot{x} = f(x) \tag{3.6}$$

其中，f 是区域 $D=\{\|x\|<r\}$ 上的连续可微函数，$r>0$ 为一个常数，且 $f(0)=0$。设 $J(x)$ 为 $f(x)$ 的 Jacobi 矩阵，即

$$J(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x)$$

43

由式(B.6)及 $f(0)=0$，有

$$f(x) = \int_0^1 J(\sigma x)\mathrm{d}\sigma x$$

设 $A=J(0)$。在上述方程右边加减 Ax，可得

$$f(x) = [A+G(x)]x, \quad \text{其中 } G(x) = \int_0^1 [J(\sigma x) - J(0)]\mathrm{d}\sigma$$

根据 $J(x)$ 的连续性，当 $x\to 0$ 时，$G(x)\to 0$。这意味着在原点一个小邻域内我们可以把非线性系统 $\dot{x}=f(x)$ 近似为在原点附近的线性化 $\dot{x}=Ax$。下一个定理给出了一些条件，在此条件下可大致得出这样的结论：当原点是非线性系统的平衡点时，其稳定性可以通过研究线性系统在该平衡点的稳定性得出。该定理被称为 Lyapunov 间接方法[⊖]。

⊖ 定理 3.2 的证明可参见文献[74，定理 4.7 与定理 4.15]，第一条定理的充分性证明在文献的 3.5 节给出，必要性证明在 3.7 节给出。

定理 3.2 设 $x=0$ 是非线性系统 $\dot{x}=f(x)$ 的一个平衡点，其中 f 在原点的一个邻域内连续可微。设

44

$$A=\frac{\partial f}{\partial x}(x)\bigg|_{x=0}$$

记其特征值为 $\lambda_1\cdots\lambda_n$。那么，

1) 当且仅当所有特征值满足 $\mathrm{Re}[\lambda_i]<0$，则原点是指数稳定的；

2) 如果至少有一个特征值满足 $\mathrm{Re}[\lambda_i]>0$，则原点是不稳定的。

定理 3.2 给出了确定原点处平衡点稳定性的简单步骤，即通过验证原点处的 Jacobi 矩阵的特征值。然而，该定理并未涉及 $\mathrm{Re}[\lambda_i]\leqslant 0$ 的情形，即存在某些 i，使得 $\mathrm{Re}[\lambda_i]=0$ 的情况。此时，线性化不能确定平衡点的稳定性。即使平衡点是渐近稳定的，但绝不会是指数稳定的，因为定理 3.2 给出的指数稳定条件既是必要的也是充分的。

例 3.3 考虑标量系统 $\dot{x}=ax^3$。在原点处对系统线性化，可得

$$A=\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{x=0}=3ax^2\big|_{x=0}=0$$

它在虚轴上有一个特征值，因此，不能用线性化确定原点的稳定性。这是因为原点可能是渐近稳定的、稳定的或不稳定的，这取决于参数 a 的取值。如果 $a<0$，则原点是渐近稳定的，因为对所有 $x\neq 0$，$xf(x)=ax^4<0$。如果 $a=0$，则系统是线性的，且根据定理 3.1 可得原点是稳定的。如果 $a>0$，则原点是不稳定的，因为对所有 $x\neq 0$，$xf(x)=ax^4>0$。注意即使 $a<0$，原点也不是指数稳定的，这点可以从例 3.2 看出[⊖]。 ◀

例 3.4 考虑单摆方程

$$\dot{x}_1=x_2,\quad \dot{x}_2=-\sin x_1-bx_2$$

它有两个平衡点(0，0)和(π，0)。其 Jacobi 矩阵为

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}\\[2ex] \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\cos x_1 & -b\end{bmatrix}$$

为了确定原点的稳定性，计算 $x=0$ 时的 Jacobi 矩阵：

$$A=\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{x=0}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -b\end{bmatrix}$$

此时，A 的特征值为 $\lambda_{1,2}=-\frac{1}{2}b\pm\frac{1}{2}\sqrt{b^2-4}$。当 $b>0$ 时，特征值满足 $\mathrm{Re}[\lambda_i]<0$。因此，原点处的平衡点是渐近稳定的。在不计算摩擦力的情况下($b=0$)，两个特征值都在虚轴上，因此不能确定线性化后原点的稳定性。这个事实也可以从相图(见图 2.2)得知，此时原点是中心的。因此，原点是稳定的平衡点。为了确定在(π，0)处的平衡点的稳定性，我们计算该点的 Jacobi 矩阵。这等价于进行变量代换 $z_1=x_1-\pi$，$z_2=x_2$，把平衡点平移到原点，并计算 $z=0$ 时的 Jacobi 矩阵 $\left[\frac{\partial f}{\partial z}\right]$，

⊖ 在该例中，$a=-1$ 时，可以通过变换时间 $\tau=-at$，将结果推广到任意 $a<0$ 的情况。经时间变换，系统 $\dot{x}=ax^3$ 转换成 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}=-x^3$。

$$\widetilde{A} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_1=\pi, x_2=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -b \end{bmatrix}$$

这时，$\widetilde{A}$ 的特征值为 $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}b \pm \frac{1}{2}\sqrt{b^2+4}$。对于所有 $b \geqslant 0$，总有一个特征值满足 $\mathrm{Re}[\lambda_i] > 0$。因此，平衡点$(\pi, 0)$是不稳定的。◀

3.3 Lyapunov 方法

再次考虑单摆方程

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\sin x_1 - b x_2$$

45

其中，$b \geqslant 0$。

前两节运用相图及线性化，我们已经得出结论：当 $b=0$ 时，原点是稳定的平衡点，当 $b>0$ 时，原点是渐近稳定的。现在说明这些结论也可利用能量的概念得出。定义单摆的能量 $E(x)$为其势能与动能之和，通过采用相对势能，总可使得 $E(0)=0$，此时

$$E(x) = \int_0^{x_1} \sin y \mathrm{d}y + \frac{1}{2}x_2^2 = (1-\cos x_1) + \frac{1}{2}x_2^2$$

当忽略摩擦力时($b=0$)，系统是保守的，即没有能量耗散。因此，在系统运动过程中，E 为常数，即沿着系统轨线的导数$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=0$。由于对于较小的数 c，$E(x)=c$ 形成一条包围$x=0$ 的封闭围线，因此我们可再次得出 $x=0$ 是稳定平衡点的结论。当考虑存在摩擦力时($b>0$)，系统运动中将有能量消耗，即能量沿着系统轨线的导数$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\leqslant 0$。由于存在摩擦力，当系统在运动时，$E$ 肯定不能保持为常数，而且能量持续衰减直至最终为零。这表明当 t 趋向∞时，轨线将趋向 $x=0$。因此，可以通过验证 E 沿着系统轨线的导数确定平衡点的稳定性。1892 年，Lyapunov 指出可以用某些函数代替能量函数来确定平衡点的稳定性[⊖]。设 $V(x)$为定义在包含原点的区域 $D\subset R^n$ 上的连续可微的实数值函数，V 沿着 $\dot{x}=f(x)$的轨线的导数记为$\dot{V}(x)$，具体计算如下

$$\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}\dot{x}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x)$$

$$= \left[\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial V}{\partial x_n}\right] \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x)$$

V 沿着系统轨线的导数依赖系统方程式(3.6)，因此，即使是同一个 $V(x)$，对于不同系统，$\dot{V}(x)$也将不同。如果 $\phi(t; x_0)$是初始时间为 $t=0$、初始状态为 x_0 [⊜]的 $\dot{x}=f(x)$的解，则

$$\dot{V}(x) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(\phi(t;x_0))\right|_{t=0}$$

因此，如果$\dot{V}(x)$为负的，那么 V 将沿着 $\dot{x}=f(x)$的解衰减。由上述分析可导出下面的

⊖ Lyapunov 稳定性的经典文献包括[54，78，111，152，156]。

⊜ 原书用 x。——译者注

46 Lyapunov 稳定性定理。

定理 3.3 设 $D\subset R^n$ 是包含原点的一个区域，$f(x)$为定义在 D 上的局部 Lipschitz 函数，且 $f(0)=0$。令 $V(x)$是定义在 D 上的连续可微函数，且满足

$$V(0)=0, 以及 V(x)>0,\quad x\in D 且 x\neq 0 \tag{3.7}$$

$$\dot{V}(x)\leqslant 0,\quad x\in D \tag{3.8}$$

则原点是 $\dot{x}=f(x)$的稳定平衡点。如果进一步有

$$\dot{V}(x)<0,\quad x\in D 且 x\neq 0 \tag{3.9}$$

则原点是渐近稳定的。此外，如果 $D=R^n$，式(3.7)与式(3.9)对所有 $x\neq 0$ 成立，且

$$\|x\|\to\infty\Rightarrow V(x)\to\infty \tag{3.10}$$

则原点是全局渐近稳定的。

证明： 给定 $\varepsilon>0$，选取 $r\in(0,\varepsilon]$，使得 $B_r=\{\|x\|\leqslant r\}\subset D$ ㊀。设 $a=\min\limits_{\|x\|=r}V(x)$，根据式(3.7)，$\alpha>0$。取 $\beta\in(0,\alpha)$，并设

$$\Omega_\beta=\{x\in B_r\,|\,V(x)\leqslant\beta\}$$

47 则 Ω_β 在 B_r 的内部(见图 3.5)㊁。集合 Ω_β 具有这样的性质：对于在 $t=0$ 时处于 Ω_β 内的任意轨线将始终保持在 Ω_β 内。这点可以根据式(3.8)得证，从而

$$\dot{V}(x(t))\leqslant 0\Rightarrow V(x(t))\leqslant V(x(0))\leqslant\beta,\quad\forall t>0$$

因为 Ω_β 为紧集㊂，由引理 1.3 可知，只要 $x(0)\in\Omega_\beta$，对所有 $t\geqslant 0$，$\dot{x}=f(x)$的解存在且唯一。由于 $V(x)$是连续的，且 $V(0)=0$，故存在 $\delta>0$，使得

$$\|x\|\leqslant\delta\Rightarrow V(x)<\beta$$

则

$$B_\delta\subset\Omega_\beta\subset B_r$$

且

$$x(0)\in B_\delta\Rightarrow x(0)\in\Omega_\beta\Rightarrow x(t)\in\Omega_\beta\Rightarrow x(t)\in B_r$$

因此可得

$$\|x(0)\|<\delta\Rightarrow\|x(t)\|<r\leqslant\varepsilon,\quad\forall t\geqslant 0$$

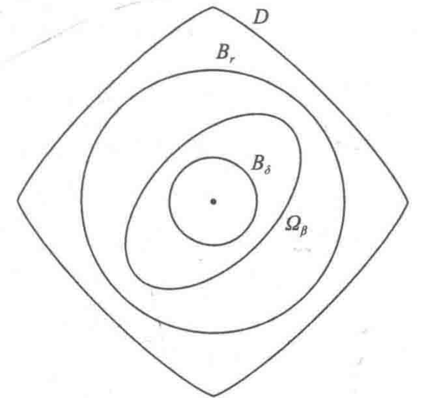


图 3.5 定理 3.3 证明中集合的几何表示

这表明原点是稳定的。现假设式(3.9)成立，要证明渐近稳定性，就要证明当 $t\to\infty$ 时 $x(t)\to 0$，即对每一个 $a>0$，证明存在 $T>0$，使得对所有 $t>T$，$\|x(t)\|<a$。重复上述证明过程㊃可知，对所有 $a>0$，存在 $b>0$，使得 $\Omega_b\subset B_a$。因此，只要证明当 $t\to\infty$ 时，$V(x(t))\to 0$。由于 $V(x(t))$为单调递减，且下界为零，因而存在 c，使得

$$V(x(t))\to c\geqslant 0,\quad (t\to\infty)$$

我们可用反证法证明 $c=0$。假设 $c>0$，根据 $V(x)$的连续性可知，存在 $d>0$，使得 $B_d\subset\Omega_c$。极限 $V(x(t))\to c>0$ 意味对所有 $t\geqslant 0$ 的轨线，$x(t)$在球 B_d 的外面。设 $-\gamma=$

㊀ 稳定性的定义应该对任意 $\varepsilon>0$ 成立，但分析必须限制在域 D 内。因为当 $r\leqslant\varepsilon$ 时，如果我们证明了 $\|x(t)\|\leqslant r$，则 $\|x(t)\|\leqslant\varepsilon$ 必然成立。

㊁ 该事实可用反证法证明。假设 Ω_β 不在 B_r 的内部，则在 B_r 的边界上存在一点 $p\in\Omega_\beta$。在这点处 $V(p)\geqslant\alpha>\beta$，但根据定义，对于所有 $x\in\Omega_\beta$，有 $V(x)\leqslant\beta$，因此存在矛盾。

㊂ 根据定义，Ω_β 为闭的，因为它包含在 B_r 内，故有界。

㊃ 事实上要考虑 $a<r$，记 $\gamma=\min\limits_{a\leqslant\|x\|\leqslant r}V(x)$，取 $b<\gamma$ 即可。

$\max_{d\leqslant\|x\|\leqslant r}\dot{V}(x)$，这个 γ 是存在的，因为连续函数 $\dot{V}(x)$ 在紧集 $\{d\leqslant\|x\|\leqslant r\}$ 上有最大值[㊀]。根据式(3.9)可知，$-\gamma<0$。由此得出

$$V(x(t))=V(x(0))+\int_0^t\dot{V}(x(\tau))\mathrm{d}\tau\leqslant V(x(0))-\gamma t$$

由于右边最终将变成负的，这个不等式与假设 $c>0$ 矛盾。因此，原点是渐近稳定的。要证明全局渐近稳定性，注意到条件式(3.10)蕴含集合 $\Omega_c=\{V(x)\leqslant c\}$ 对任意的 $c>0$ 都为紧集。这也可以从以下分析看出：对某个 $c>0$，如果存在 $r>0$，使得 $\|x\|>r$，则 $V(x)>c$，$x\notin\Omega_c$。因而，$\Omega_c\subset B_r$。根据前面的论述，很显然始于 Ω_c 的所有解将收敛于原点。对任一点 $p\in R^n$，取 $c=V(p)$，则从上面的讨论可断定原点是全局渐近稳定的。□

48

如果一个连续可微函数 $V(x)$ 满足式(3.7)与式(3.8)，则称 $V(x)$ 为 Lyapunov *函数*。对固定的 $c>0$，集合 $\{x, V(x)=c\}$ 称为一个 Lyapunov *面或层面*。图 3.6 利用了 Lyapunov 面使得定理 3.3 变得更直观明了。图中显示了伴随 c 的增加 Lyapunov 面变动情况。条件 $\dot{V}\leqslant 0$ 表明当轨线穿过 Lyapunov 面 $V(x)=c$ 时，总是向集合 $\Omega_c=\{V(x)\leqslant c\}$ 内部走的，并且不会再出来。当 $\dot{V}<0$，轨线从一个 Lyapunov 面走向其内部 c 值更小的 Lyapunov 面。随着 c 的减小，Lyapunov 面 $V(x)=c$ 收缩于原点，表明随着时间增长，轨线将趋于原点。如果我们只知道 $\dot{V}\leqslant 0$，那么就不能保证轨线趋于原点[㊁]，只能得出原点是稳定的结论，这是因为只要初始状态 $x(0)$ 位于包含在该球内的一个 Lyapunov 面上，轨线可包含于任意球 B_ε 内。

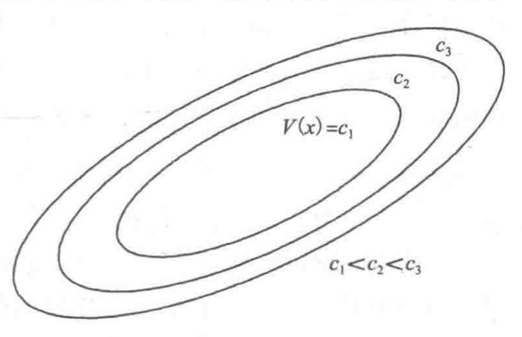


图 3.6　Lyapunov 函数的层集

如果函数 $V(x)$ 满足式(3.7)，即 $V(0)=0$ 且对 $x\neq 0$，$V(x)>0$，则称 $V(x)$ 是*正定的*。如果只满足弱一点的条件，对 $x\neq 0$，只有 $V(x)\geqslant 0$，则 $V(x)$ 称为*半正定的*。如果 $-V(x)$ 是正定的或半正定的，则称函数 $V(x)$ 是*负定的*或*半负定的*。如果不能断定 $V(x)$ 为这四种情况中的某一种，则称它是不定的。若函数 $V(x)$ 满足式(3.10)，则称为是径向无界的。应用上述术语，我们可以将 Lyapunov 定理改述为：*如果存在一个连续可微正定函数 $V(x)$ 使得 $\dot{V}(x)$ 为半负定，则原点是稳定的。如果进一步，$\dot{V}(x)$ 为负定的，则原点是渐近稳定的；如果还成立 $V(x)$ 是径向无界的，则原点是全局渐近稳定的。*

49

在定理 3.3 的证明中，径向无界条件式(3.10)用来保证对每个 $c>0$，集合 $\Omega_c=\{V(x)\leqslant c\}$ 都是有界的。没有这个条件，集合 Ω_c 可能对一些较大的 c 变得不再有界。例如，考虑函数

$$V(x)=\frac{x_1^2}{1+x_1^2}+x_2^2$$

它不是径向无界的，因为在 x_1 轴方向上，$\lim_{\|x\|\to\infty}V(x)=1$。图 3.7 给出不同正值 c 的 Lyapunov 面 $V(x)=c$。对于一些较小的 c，它是闭合的，即 Ω_c 为有界的，

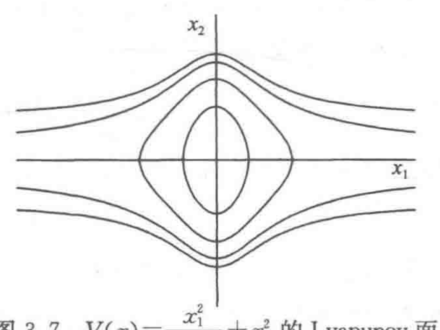


图 3.7　$V(x)=\dfrac{x_1^2}{1+x_1^2}+x_2^2$ 的 Lyapunov 面

㊀ 参见文献[3，定理 4～20]。
㊁ 进一步讨论可参见 3.4 节的 LaSalle 定理。

因为该集合可以包含于某个闭球 B_r 中。这是函数$V(x)$的连续性与正定性的结果。当 $c<1$ 时，Lyapunov 面 $V(x)=c$ 是闭合的，但对 $c>1$，它不是封闭的[⊖]且集合 Ω_c 是无界的。

考虑下面的二次型

$$V(x) = x^{\mathrm{T}}Px = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}x_i x_j$$

其中，P 为实对称矩阵，当且仅当 P 的特征值都是正的(非负的)，称 $V(x)$是正定的(半正定的)。我们知道当且仅当 P 的所有顺序主子式是正的时(所有顺序主子式是非负的)[⊜]，P 的特征值都是正的(非负的)。如果二次型 $V(x)=x^{\mathrm{T}}Px$ 是正定的(半正定的)，我们就说矩阵 P 是正定的(半正定的)并记为 $P>0(P\geqslant 0)$。由于 $x^{\mathrm{T}}Px\geqslant\lambda_{\min}(P)\|x\|^2$，其中 $\lambda_{\min}(P)$为 P 的最小特征值，因此如果 $x^{\mathrm{T}}Px$ 是正定的，则它必然是径向无界的。

例 3.5 考虑二次型

$$\begin{aligned} V(x) &= ax_1^2 + 2x_1x_3 + ax_2^2 + 4x_2x_3 + ax_3^2 \\ &= [x_1, x_2, x_3]\begin{bmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & 2 \\ 1 & 2 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x^{\mathrm{T}}Px \end{aligned}$$

50

P 的顺序主子式分别是a、a^2 及 $a(a^2-5)$。因此，如果 $a>\sqrt{5}$，则 $V(x)$是正定的。若 P 是负定的，则$-P$ 的顺序主子式是正的，即 P 的顺序主子式是交替变号的，奇数阶主子式为负而偶数阶主子式为正。从而，如果 $a<-\sqrt{5}$，则 $V(x)$是负定的。通过计算顺序主子式，可以看出如果 $a\geqslant\sqrt{5}$，则 $V(x)$是半正定的，如果 $a\leqslant-\sqrt{5}$，则 $V(x)$是半负定的，如果 $a\in(-\sqrt{5},\sqrt{5})$，则 $V(x)$是不定的。◀

应用 Lyapunov 定理可以不求解微分方程 $\dot{x}=f(x)$就能判别系统平衡点的稳定性。然而，不幸的是至今我们还没有系统的构造 Lyapunov 函数的方法。在有些情况下，例如在电气或机械系统中，能量函数是自然的备选 Lyapunov 函数。其他情况，基本上要用试探法。好在情况不像看起来那么糟糕。从本书提供的各种例子中，读者可以摸索出构造 Lyapunov 函数的一些规律与方法。

例 3.6 考虑单摆方程

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -\sin x_1 - bx_2$$

研究原点处平衡点的稳定性。我们先考虑无摩擦力，即 $b=0$ 的情况。一个自然备选的 Lyapunov 函数为能量函数

$$V(x) = (1-\cos x_1) + \frac{1}{2}x_2^2$$

显然，$V(0)=0$，且 $V(x)$在域$-2\pi<x_1<2\pi$ 上是正定的。$V(x)$沿着系统轨线的导数为

$$\dot{V}(x) = \dot{x}_1\sin x_1 + x_2\dot{x}_2 = x_2\sin x_1 - x_2\sin x_1 = 0$$

从而满足定理 3.3 的条件中的式(3.7)与式(3.8)，由此推断原点是稳定的。由于 $\dot{V}(x)\equiv 0$，我们也推断原点不是渐近稳定的；因为始于 Lyapunov 面 $V(x)=c$ 上的所有轨线，不管何时都保持在同一个 Lyapunov 面上。接下来，考虑有摩擦力的单摆，即 $b>0$。继续取

⊖ 原书说是开的。——译者注

⊜ 这是矩阵理论中著名事实，其证明可参见文献[15]或文献[14]。

$V(x)=(1-\cos x_1)+\frac{1}{2}x_2^2$ 为备选 Lyapunov 函数，得到

$$\dot{V}(x)=\dot{x}_1\sin x_1+x_2\dot{x}_2=-bx_2^2$$

$V(x)$的导数 $\dot{V}(x)$是半负定的而不是负定的。因为当 $x_2=0$ 时，不管 x_1 取什么值，均有 $\dot{V}(x)=0$，即沿着 x_1 轴都有 $\dot{V}(x)=0$。因此，我们还是只能得出原点是稳定的。然而，利用单摆方程的相图，我们看出当 $b>0$ 时原点是渐近稳定的，但这个例子中用能量函数做 Lyapunov 函数不能说明这个事实，因为 Lyapunov 方法只是一个充分条件。3.4 节给出的 LaSalle 定理可帮助我们得出一个不同的结论。现在让我们寻找另一个 Lyapunov 函数 $V(x)$，它有着负定的 $\dot{V}(x)$。从能量函数出发，我们将 $\frac{1}{2}x_2^2$ 替换为更为一般的二次型 $\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Px$，其中 P 是 2×2 正定矩阵。这时

51

$$V(x)=\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Px+(1-\cos x_1)=\frac{1}{2}[x_1x_2]\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+(1-\cos x_1)$$

二次型 $x^{\mathrm{T}}Px$ 是正定的，因此要求

$$p_{11}>0,\quad p_{11}p_{22}-p_{12}^2>0$$

$V(x)$的导数 $\dot{V}(x)$为

$$\begin{aligned}\dot{V}(x)&=(p_{11}x_1+p_{12}x_2+\sin x_1)x_2+(p_{12}x_1+p_{22}x_2)(-\sin x_1-bx_2)\\ &=(1-p_{22})x_2\sin x_1-p_{12}x_1\sin x_1+(p_{11}-p_{12}b)x_1x_2+(p_{12}-p_{22}b)x_2^2\end{aligned}$$

现在选取 p_{11}、p_{12} 与 p_{22}，使得 $\dot{V}(x)$是负定的。由于交叉项 $x_2\sin x_1$ 与 x_1x_2 符号难以确定，因此可取 $p_{22}=1$ 及 $p_{11}=bp_{12}$ 消去这两项。为了保证 P 是正定的，p_{12} 必须满足 $0<p_{12}<b$。选取 $p_{12}=\frac{1}{2}b$，则，

$$\dot{V}(x)=-\frac{1}{2}bx_1\sin x_1-\frac{1}{2}bx_2^2$$

对所有 $0<|x_1|<\pi$，$x_1\sin x_1$ 是正的。令 $D=\{|x_1|<\pi\}$，则在 D 上 $V(x)$是正定的，而 $\dot{V}(x)$是负定的。因此，根据定理 3.3，可推断原点是渐近稳定的。◀

这个例子强调了 Lyapunov 稳定性定理的一个重要特征：定理的条件仅仅是充分的。备选 Lyapunov 函数不能满足稳定或渐近稳定条件，并不是说平衡点是不稳定的或非渐近稳定的，而只是表明用该备选 Lyapunov 函数不能确定平衡点稳定的性质。平衡点是否为稳定(渐近稳定)的，需要通过进一步的研究来确定。

在寻找例 3.6 的 Lyapunov 函数过程中，我们采用逆向法来解决问题，即先研究导数 $\dot{V}(x)$的表达式，再回过头来选取 $V(x)$的参数，使 $\dot{V}(x)$负定。这是寻找 Lyapunov 函数的一种有用的方法。这样的方法称为变量梯度法。为表述该方法，设 $V(x)$为 x 的标量函数及 $g(x)=\nabla V=\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}}$，沿着 $\dot{x}=f(x)$的轨线的导数 $\dot{V}(x)$就是

$$\dot{V}(x)=\frac{\partial V}{\partial x}f(x)=g^{\mathrm{T}}(x)f(x)$$

下一步就是选取 $g(x)$，它是正定函数 $V(x)$的梯度同时使 $\dot{V}(x)$为负定。不难证明：$g(x)$是一标量函数的梯度当且仅当它的 Jacobi 矩阵 $\left[\frac{\partial g}{\partial x}\right]$是对称的，即

52

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_j}=\frac{\partial g_j}{\partial x_i},\quad \forall\, i,j=1,\cdots,n$$

在此约束条件下，我们再选择 $g(x)$，使得 $g^{\mathrm{T}}(x)f(x)$ 是负定的。函数 $V(x)$ 由下列积分算得

$$V(x)=\int_0^x g^{\mathrm{T}}(y)\mathrm{d}y=\int_0^x\sum_{i=1}^n g_i(y)\mathrm{d}y_i$$

积分路径为连接原点与 x 的任意路径⊖。通常，我们沿着坐标轴积分，即

$$V(x)=\int_0^{x_1}g_1(y_1,0,\cdots,0)\mathrm{d}y_1+\int_0^{x_2}g_2(x_1,y_2,0,\cdots,0)\mathrm{d}y_2$$
$$+\cdots+\int_0^{x_n}g_n(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},y_n)\mathrm{d}y_n$$

$g(x)$ 的某些参数留为待定，以便通过适当地选取来保证 $V(x)$ 正定。变量梯度法可用于寻找例 3.6 的 Lyapunov 函数，我们不准备重复这个例子，而举一个更一般的系统来说明变量梯度法的应用。

例 3.7 考虑二维系统

$$\dot{x}_1=x_2\quad \dot{x}_2=-h(x_1)-ax_2$$

其中，$a>0$，$h(\cdot)$ 是局部 Lipschitz 函数，$h(0)=0$，而且 $yh(y)>0$ 对所有 $y\neq 0$，$y\in(-b,c)$ 成立，其中 b 与 c 是正常数。单摆方程是该系统的一个特例。应用变量梯度法就是要选取满足下列等式的二维向量 $g(x)$

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_2}=\frac{\partial g_2}{\partial x_1}$$

及

$$\dot{V}(x)=g_1(x)x_2-g_2(x)[h(x_1)+ax_2]<0,\quad x\neq 0$$

而且

$$V(x)=\int_0^x g^{\mathrm{T}}(y)\mathrm{d}y>0,\quad x\neq 0$$

首先，尝试

$$g(x)=\begin{bmatrix}\phi_1(x_1)+\psi_1(x_2)\\ \phi_2(x_1)+\psi_2(x_2)\end{bmatrix}$$

53

其中，ϕ_1、ϕ_2、ψ_1 与 ψ_2 是待定的标量函数。为满足对称要求，必须有

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial x_2}=\frac{\partial\phi_2}{\partial x_1}$$

这可通过令 $\psi_1(x_2)=\gamma x_2$ 与 $\phi_2(x_1)=\gamma x_1$ 实现，其中的 γ 为常数。导数 $\dot{V}(x)$ 为

$$\dot{V}(x)=x_2\phi_1(x_1)+\gamma x_2^2-\gamma x_1h(x_1)-a\gamma x_1x_2-\psi_2(x_2)h(x_1)-ax_2\psi_2(x_2)$$

为消除交叉乘积项，需要

$$x_2\phi_1(x_1)-a\gamma x_1x_2-\psi_2(x_2)h(x_1)=0$$

如果取 $\psi_2(x_2)=\delta x_2$ 与 $\phi_1(x_1)=a\gamma x_1+\delta h(x_1)$，那么，

$$\dot{V}(x)=-\gamma x_1h(x_1)-(a\delta-\gamma)x_2^2\quad 且\quad g(x)=\begin{bmatrix}a\gamma x_1+\delta h(x_1)+\gamma x_2\\ \gamma x_1+\delta x_2\end{bmatrix}$$

⊖ 梯度向量的线积分与路径无关(见文献[3，定理 10～37])。

求积分可得

$$V(x)=\int_0^{x_1}[a\gamma y_1+\delta h(y_1)]\mathrm{d}y_1+\int_0^{x_2}(\gamma x_1+\delta y_2)\mathrm{d}y_2$$
$$=\frac{1}{2}a\gamma x_1^2+\delta\int_0^{x_1}h(y)\mathrm{d}y+\gamma x_1x_2+\frac{1}{2}\delta x_2^2=\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Px+\delta\int_0^{x_1}h(y)\mathrm{d}y$$

其中，

$$P=\begin{bmatrix}a\gamma & \gamma\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}$$

只要选取 $\delta>0$ 与 $0<\gamma<a\delta$，就能保证 $V(x)$为正定且 $\dot{V}(x)$为负定。例如，取 $\gamma=ak\delta$，其中，$0<k<1$，得到 Lyapunov 函数

$$V(x)=\frac{\delta}{2}x^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}ka^2 & ka\\ ka & 1\end{bmatrix}x+\delta\int_0^{x_1}h(y)\mathrm{d}y$$

该函数在 $D=\{-b<x_1<c\}$域上满足定理 3.3 条件中的式(3.7)与式(3.9)。因此，原点是渐近稳定的。如果进一步假设条件 $yh(y)>0$ 对所有 $y\neq0$ 成立。则式(3.7)与式(3.9)全局成立，且因为 $V(x)\geqslant\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Px$，而 $x^{\mathrm{T}}Px$ 是径向无界的，所以 $V(x)$是径向无界的。因此，原点是全局渐近稳定的。 ◀

3.4 不变性原理

在研究存在摩擦的单摆方程(例 3.6)时，我们发现用能量函数做 Lyapunov 函数不能满足定理 3.3 的渐近稳定性条件，因为 $\dot{V}(x)=-bx_2^2$ 只是半负定的。但要注意，除了在直线 $x_2=0$ 上有 $\dot{V}(x)=0$ 以外，其余的 $\dot{V}(x)$处处为负，于是为了保持 $\dot{V}(x)=0$ 成立，其轨线必须为直线 $x_2=0$。然而除非 $x_1=0$，x_2 不可能为 0，这是因为由单摆方程可推出下面结果 [54]

$$x_2(t)\equiv0\Rightarrow\dot{x}_2(t)\equiv0\Rightarrow\sin x_1(t)\equiv0$$

因此，在直线 $x_2=0$ 的 $-\pi<x_1<\pi$ 段上，只有在原点 $x_1=x_2=0$ 处才能实现 $\dot{V}(x)=0$。因此沿着轨线 $\dot{V}(x)<0$，$V(x(t))$定将减小到零，这蕴含着当 $t\to\infty$时，$x(t)\to0$。这与系统特性一致，即，由于摩擦力的作用，系统在运动中能量不可能保持不变。

如前所述，如果在原点的邻域内能找到一个 Lyapunov 函数，其沿着系统轨线的导数是半负定的，并且如果能够确定除原点外，轨线不能保持在满足 $\dot{V}(x)=0$ 的点上，那么原点是渐近稳定的，该推断的基础是所谓的 LaSalle 不变性原理，本小节就来介绍 LaSalle 不变性原理[⊖]。为了叙述并证明这个原理，先引入几个定义。设 $x(t)$是方程 $\dot{x}=f(x)$的解，如果存在一个序列$\{t_n\}$，它满足当 $n\to\infty$时，$t_n\to\infty$，而且当 $n\to\infty$时，$x(t_n)\to p$，则称点 p 为$x(t)$的一个正极限点，称 $x(t)$的所有正极限点组成的集合为 $x(t)$的正极限集。集合 M 称为关于 $\dot{x}=f(x)$的不变集，如果 M 满足

$$x(0)\in M\Rightarrow x(t)\in M,\quad \forall t\in R$$

这就是说，如果一个解在某一时刻属于 M，那么它在所有未来时刻和过去时刻都属于 M。如果集合 M 仅满足

⊖ 这部分表述遵从文献[83]。

$$x(0) \in M \Rightarrow x(t) \in M, \quad \forall t \geqslant 0$$

则称 M 为正不变集。

用 dist(p, M)表示点 p 到集合 M 的距离，即 p 到 M 内所有点的距离的最小值。更准确的表述是

$$\text{dist}(p,M) = \inf_{x \in M} \| p - x \|$$

如果对于任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $T > 0$，使得

$$\text{dist}(x(t),M) < \varepsilon, \quad \forall t > T$$

则称当 t 趋于无穷时，$x(t)$趋向集合 M。通过考察平面内的渐近稳定平衡点和稳定极限环可以进一步明确这几个概念。渐近稳定平衡点是每个始于足够接近平衡点的解的正极限集。稳定极限环是始于足够接近极限环的每个解的正极限集。在后一种情况下，当 $t \to \infty$ 时，解趋于极限环，但并非趋于极限环上的一个确定的点，或者说，当 $t \to \infty$ 时，解 $x(t)$ 趋于 M 并不意味着极限 $\lim_{t \to \infty} x(t)$ 存在。平衡点和极限环是不变集，因为始于这两个集的解，对于所有 $t \in R$ 都保持在这些集合内。回忆 $\Omega_c = \{V(x) \leqslant c\}$，如果对所有 $x \in \Omega_c$，$\dot{V}(x) \leqslant 0$，则集合 Ω_c 是正不变集，正如定理 3.3 所证明的，始于 Ω_c 内的解，对所有 $t \geqslant 0$，都始终保持在 Ω_c 内。

[55]

下面的引理给出极限集的基本性质[㊀]。

引理 3.1 设 $f(x)$是定义在域 $D \subset R^n$ 上的局部 Lipschitz 函数。如果 $\dot{x} = f(x)$的解 $x(t)$有界，且对所有 $t \geqslant 0$ 均属于 D，那么其正向极限集 L^+ 是非空的不变紧集，且当 $t \to \infty$ 时 $x(t)$趋于 L^+。

现在我们已经可以叙述 LaSalle 定理。

定理 3.4 设 $f(x)$是定义在域 $D \subset R^n$ 上的局部 Lipschitz 函数，$\Omega \subset D$ 是一个紧集，并关于 $\dot{x} = f(x)$是正向不变的。设 $V(x)$为定义在区域 D 上的连续可微函数，在 Ω 内满足 $\dot{V}(x) \leqslant 0$。设 E 是 Ω 内所有满足 $\dot{V}(x) = 0$ 的 x 组成的集合，记 M 是 E 内的最大不变集。那么当 $t \to \infty$ 时，始于 Ω 内的每个解都趋于 M。

证明： 设 $x(t)$是方程 $\dot{x} = f(x)$始于 Ω 内的解。由于在 Ω 内有 $\dot{V}(x) \leqslant 0$，所以 $V(x(t))$ 是 t 的单调递减函数。由于 $V(x)$在紧集 Ω 上连续，因此在 Ω 内下有界，这蕴涵着当 $t \to \infty$ 时，$V(x(t))$有极限 a。因为 Ω 是闭集，所以正极限集 L^+ 包含在 Ω 内。对于任意 $p \in L^+$，存在序列 t_n，当 $n \to \infty$ 时，$t_n \to \infty$，而且 $x(t_n) \to p$。根据 $V(x)$的连续性，有 $V(p) = \lim_{n \to \infty} V(x(t_n)) = a$。因此，对一切 $x \in L^+$，有 $V(x) = a$。由于 L^+ 为不变集(根据引理 3.1)，故在 L^+ 上有 $\dot{V}(x) = 0$。因此

$$L^+ \subset M \subset E \subset \Omega$$

由于 $x(t)$有界，所以当 $t \to \infty$时，$x(t)$趋于 L^+(根据引理 3.1)。因此当 $t \to \infty$时，$x(t)$趋于 M。□

与 Lyapunov 定理不同，定理 3.4 不要求函数 $V(x)$是正定的。还要注意，集合 Ω 可以独立构造，与函数 $V(x)$无关。但在许多应用中，构造 $V(x)$本身就保证了集合 Ω 的存在。特别地，如果 $\Omega_c = \{V(x) \leqslant c\}$有界，且在 Ω_c 内，$\dot{V}(x) \leqslant 0$，则可取 $\Omega = \Omega_c$。如 $V(x)$为正定，则当 $c > 0$ 足够小时，集合 Ω_c 必包含一个含有原点的有界子集[㊁]。

[56]

㊀ 参见文献[74，引理 4.1]对该引理的证明。

㊁ 集合$\{V(x) \leqslant c\}$可能包含无界因素。例如，如果 $V(x) = \frac{x^2}{1+x^4}$，集合 $\left\{V(x) \leqslant \frac{1}{4}\right\}$有两个分支：一个是有界的$\{|x| \leqslant \sqrt{2-\sqrt{3}}\}$，而另一个是无界的$\{|x| \geqslant \sqrt{2+\sqrt{3}}\}$。

如果想要说明当 $t \to \infty$ 时 $x(t) \to 0$，就需要确定原点是 E 中最大的不变集，就是要证明除平凡解 $x(t) \equiv 0$ 以外，没有其他解能一直保持在 E 内。如果将定理 3.4 限于这种情形，并取 $V(x)$ 为正定的，即可得到下面定理，它是定理 3.3 的推广[⊖]。

定理 3.5 设 $D \subset R^n$ 是包含原点的一个区域，$f(x)$ 是定义在 D 上的局部 Lipschitz 函数，且 $f(0)=0$。设 $V(x)$ 是 D 上连续可微的正定函数，且在 D 内满足 $\dot{V}(x) \leqslant 0$。设 $S=\{x \in D \mid \dot{V}(x)=0\}$，并假设除平凡解 $x(t) \equiv 0$ 之外，没有其他解一直保持在 S 内，那么 $\dot{x}=f(x)$ 的原点是渐近稳定的平衡点。进一步，设紧集 $\Gamma \subset D$ 关于 $\dot{x}=f(x)$ 正向不变，那么 Γ 是吸引域的子集。最后，如果 $D=R^n$，且 $V(x)$ 是径向无界的，那么原点是全局渐近稳定的。

证明： 原点的稳定性可以根据定理 3.3 得出。为证明渐近稳定性，应用定理 3.4 及 $\Omega=\{x \in B_r \mid V(x) \leqslant c\}$，其中，选取 γ 使得 $B_r \subset D$，$c < \min_{\|x\|=\gamma} V(x)$。定理 3.3 的证明表明，$\Omega$ 为紧集且正向不变。在 $E=\Omega \cap S$ 内的最大不变集为原点，因此，当 $t \to \infty$ 时，$x(t) \to 0$。为了证明 Γ 为吸引域的子集，应用定理 3.4 并取 $\Omega=\Gamma$。最后，如果 $D=R^n$ 与 $V(x)$ 为径向无界，则对任意 $c>0$，集合 $\Omega_c=\{V(x) \leqslant c\}$ 为紧集且正向不变。对于任意给定初始状态 $x(0)$，总可以通过选取足够大的 c，让 $x(0)$ 包含在 Ω_c 内，应用定理 3.4 及由于 $\Omega=\Omega_c$，确保 $x(t)$ 收敛于零。因为初始状态是任取的，所以原点是全局渐近稳定的。 □

例 3.8 考虑系统

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -h_1(x_1) - h_2(x_2)$$

其中，h_1 与 h_2 为局部 Lipschitz 函数，且满足

$$h_i(0) = 0, \quad y h_i(y) > 0, \quad 对所有\ 0 < |y| < a\ 成立。$$

容易看出系统在原点有一个孤立平衡点。系统是否还有其他平衡点取决于函数 h_1 与 h_2 的选取。如果将 $h_2(x_2)$ 看作摩擦力项，则上述系统与单摆相似。因此，可取类似能量函数的函数作为备选 Lyapunov 函数，即可取

$$V(x) = \int_0^{x_1} h_1(y)\mathrm{d}y + \frac{1}{2}x_2^2$$

设 $D=\{|x_1|<a,\ |x_2|<a\}$，则 $V(x)$ 在 D 内正定，且

$$\dot{V}(x) = h_1(x_1)x_2 + x_2[-h_1(x_1) - h_2(x_2)] = -x_2 h_2(x_2) \leqslant 0$$

$\dot{V}(x)$ 为半负定。为求出 $S=\{x \in D \mid \dot{V}(x)=0\}$，注意到

$$\dot{V}(x) = 0 \Rightarrow x_2 h_2(x_2) = 0 \Rightarrow x_2 = 0, \quad 因为\ |x_2| < a$$

因此，$S=\{x \in D \mid x_2=0\}$。设 $x(t)$ 也是属于 S 的任意一个解：

$$x_2(t) \equiv 0 \Rightarrow \dot{x}_2(t) \equiv 0 \Rightarrow h_1(x_1(t)) \equiv 0 \Rightarrow x_1(t) \equiv 0$$

于是，能一直保持在 S 内的解只能是平凡解 $x(t) \equiv 0$。因此，原点是渐近稳定的。 ◀

例 3.9 再次考虑例 3.8 的系统，但这次设 $a=\infty$，并假设 h_1 满足下列附加条件：

$$\int_0^y h_1(z)\mathrm{d}z \to \infty \quad 当\ |y| \to \infty$$

如果将 Lyapunov 函数取成 $V(x) = \int_0^{x_1} h_1(y)\mathrm{d}y + \frac{1}{2}x_2^2$，这次 $V(x)$ 是径向无界的。与前例

⊖ 定理 3.5 被称为 Barbasin-Krasovskii 定理。他们在 LaSalle 引入不变性原理之前证明了该定理。

类似，可以证明在 R^2 内 $\dot{V}(x) \leqslant 0$，且集合

$$S = \{\dot{V}(x) = 0\} = \{x_2 = 0\}$$

不包含除平凡解外的其他解。因此，原点是全局渐近稳定的。◀

3.5　指数稳定性

从定理 3.2 知道，当且仅当 $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0)$ 是 Hurwitz 矩阵时，$\dot{x}=f(x)$ 的原点是指数稳定的。但该结论是局部的，它没有给出吸引域相关信息，也不能用来判别全局指数稳定性。在这一节中，我们利用 Lyapunov 函数将定理 3.2 的局部结果进行扩展。

定理 3.6　设 $D \subset R^n$ 是包含原点的一个区域，$f(x)$ 是定义在 D 上的局部 Lipschitz 函数，且 $f(0)=0$。假设 $V(x)$ 为域 D 上的连续可微函数，且对所有 $x \in D$ 成立

$$k_1 \|x\|^a \leqslant V(x) \leqslant k_2 \|x\|^a \tag{3.11}$$

$$\dot{V}(x) \leqslant -k_3 \|x\|^a \tag{3.12}$$

其中，a、k_1、k_2、k_3 为正常数，则原点是 $\dot{x}=f(x)$ 的指数稳定平衡点。如果式(3.11)和式(3.12)全局成立，则原点是全局指数稳定的。

58

证明： 取 $c>0$ 足够小使得 $\{k_1\|x\|^a \leqslant c\} \subset D$，根据式(3.11)，$V(x) \leqslant c \Rightarrow k_1\|x\|^a \leqslant c$，从而

$$\Omega_c = \{V(x) \leqslant c\} \subset \{k_1\|x\|^a \leqslant c\} \subset D$$

因此 Ω_c 为紧集，并根据式(3.12)，它是正向不变的。沿着始于 Ω_c 内的任意一条轨线，有

$$\dot{V} \leqslant -\frac{k_3}{k_2} V$$

用解微分方程的方法，分离变量再积分，可得

$$V(x(t)) \leqslant V(x(0)) \mathrm{e}^{-\left(\frac{k_3}{k_2}\right)t}$$

因此，

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leqslant \left[\frac{V(x(t))}{k_1}\right]^{\frac{1}{a}} \leqslant \left[\frac{V(x(0))\mathrm{e}^{-\left(\frac{k_3}{k_2}\right)t}}{k_1}\right]^{\frac{1}{a}} \\ &\leqslant \left[\frac{k_2\|x(0)\|^a \mathrm{e}^{-\left(\frac{k_3}{k_2}\right)t}}{k_1}\right]^{\frac{1}{a}} = \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^{\frac{1}{a}} \mathrm{e}^{-\gamma t}\|x(0)\| \end{aligned}$$

其中，$\gamma = \frac{k_3}{(k_2 a)}$。因此原点是指数稳定的。如果所有假设全局成立，则 c 可取任意大，使得上述不等式对所有 $x(0) \in R^n$ 成立。□

例 3.10　在例 3.7 中，我们考虑过系统

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -h(x_1) - x_2$$

其中 h 是局部 Lipschitz 函数，$h(0)=0$，且对所有 $y \neq 0$，$yh(y)>0$，定义 Lyapunov 函数[⊖]

$$V(x) = x^{\mathrm{T}} P x + 2\int_0^{x_1} h(y)\mathrm{d}y$$

⊖　在例 3.7 中，我们取 $a=1$，$\delta=2$ 以及 $k=\frac{1}{2}$。

其中，$P=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$，对其求导得到

$$\dot{V}(x)=-x_1h(x_1)-x_2^2$$

为了证明原点是全局指数稳定的，设对所有 y 存在正常数 c_1 与 c_2，使得 h 满足更强不等式

$$c_1y^2\leqslant yh(y)\leqslant c_2y^2$$

59

则

$$x^{\mathrm{T}}Px\leqslant V(x)\leqslant x^{\mathrm{T}}Px+c_2x_1^2$$

且

$$\dot{V}(x)\leqslant -c_1x_1^2-x_2^2$$

由于

$$\lambda_{\min}(P)\|x\|^2\leqslant x^{\mathrm{T}}Px\leqslant\lambda_{\max}(P)\|x\|^2$$

因此，取 $a=2$，不等式(3.11)与式(3.12)全局成立。因此原点是全局指数稳定的。◀

对于线性系统 $\dot{x}=Ax$，我们可采用二次型 Lyapunov 函数 $V(x)=x^{\mathrm{T}}Px$，其中，P 为实对称正定矩阵，应用定理 3.6，V 沿着 $\dot{x}=Ax$ 的轨线的导数为

$$\dot{V}(x)=x^{\mathrm{T}}P\dot{x}+\dot{x}^{\mathrm{T}}Px=x^{\mathrm{T}}(PA+A^{\mathrm{T}}P)x=-x^{\mathrm{T}}Qx$$

其中，Q 定义为

$$PA+A^{\mathrm{T}}P=-Q \tag{3.13}$$

Q 是对称矩阵。如果 Q 为正定，则根据定理 3.3 或定理 3.6，可以推断原点是全局指数稳定的，即 A 为 Hurwitz 矩阵。这个结论从定理 3.6 可以直接获知，而应用定理 3.3 则是依靠一个结论：对于线性系统，渐近稳定与指数稳定是等价的。遵循 Lyapunov 方法的一般步骤，应该是先选取正定的 $V(x)$，然后检验 $\dot{V}(x)$ 的负定性。然而对于线性系统，我们可以倒过来。先选择实对称正定矩阵 Q，然后求解方程(3.13)，如果该方程有正定矩阵解 P，则我们可得出结论：原点是全局指数稳定的。方程式(3.13)称为 Lyapunov 方程。下一个定理给出了基于 Lyapunov 方程的解来判别原点指数稳定性的方法⊖。

定理 3.7　*当且仅当对于任意一个正定对称矩阵 Q，存在一个正定对称矩阵 P 满足 Lyapunov 方程 $PA+A^{\mathrm{T}}P=-Q$，则矩阵 A 是 Hurwitz 的。而且，如果 A 为 Hurwitz 矩阵，则正定解 P 是唯一的。*

当我们采用线性化方法研究非线性系统时，定理 3.7 显得很重要。从 3.2 节可以知道，考虑非线性系统 $\dot{x}=f(x)$，其中 $f(x)$是连续可微的，且 $f(0)=0$，则在原点的某邻域内可描述为

60

$$\dot{x}=(A+G(x))x$$

其中，

$$A=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=0}$$

且当 $x\to 0$ 时，$G(x)\to 0$。当 A 为 Hurwitz 矩阵时，取 Q 为正定矩阵，求解 Lyapunov 方程 $PA+A^{\mathrm{T}}P=-Q$，得到正定矩阵 P。用 $V(x)=x^{\mathrm{T}}Px$ 为非线性系统的备选 Lyapunov 函数，则

⊖ 定理 3.7 的证明参见文献[74，定理 4.6]，MATLAB 命令“lyap(A^{T}，Q)”可用于求解方程(3.13)。

$$\dot{V}(x) = -x^{\mathrm{T}}Qx + 2x^{\mathrm{T}}PG(x)x$$

由于当 $x \to 0$ 时 $G(x) \to 0$，给定任意正常数 $k<1$，总可以找到 $r>0$，使得在域 $D=\{\|x\|<r\}$ 内有 $2\|PG(x)\|<k\lambda_{\min}(Q)$，因此在 D 内满足

$$\dot{V}(x) \leqslant -(1-k)\lambda_{\min}(Q)\|x\|^2$$

应用定理 3.6，原点是非线性系统 $\dot{x}=f(x)$ 的指数稳定平衡点[㊀]。在下节中，我们将看到函数 $V(x)=x^{\mathrm{T}}Px$ 还可用来估计吸引域。

3.6　吸引域

通常，仅仅确定系统有渐近稳定的平衡点还是不够的，还需要找出该点的吸引域或者做出吸引域的估计，这项工作很重要。这节中，读者将了解吸引域的一些性质以及如何用 Lyapunov 方法来估计吸引域[㊁]。我们从一个引理开始，给出吸引域的一些性质[㊂]。

引理 3.2　*渐近稳定平衡点的吸引域是开的、连通的不变集，且吸引域的边界由轨线构成。*

引理 3.2 指出确定吸引域的一种方法即绘制边界上的轨线。这个过程对于高维系统十分困难，但对于二维系统，可比较容易地通过检验状态平面中的相图看出。下面的例 3.11 与例 3.12 给出了两种典型的情况。第一个例子中，吸引域的边界是极限环，而第二个例子中边界是由鞍点的稳定轨线形成。

61

例 3.11　二维系统

$$\dot{x}_1 = -x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1 + (x_1^2 - 1)x_2$$

它是反向时间的 van der Pol 方程，即在 van der Pol 方程中用 $-t$ 代替 t 得到的。图 3.8 的相图显示原点是由不稳定极限环围住的稳定焦点，且在极限环内侧的轨线盘旋趋向原点。因此，原点是渐近稳定的，其吸引域为极限环的内侧，而吸引域边界为极限环本身。◀

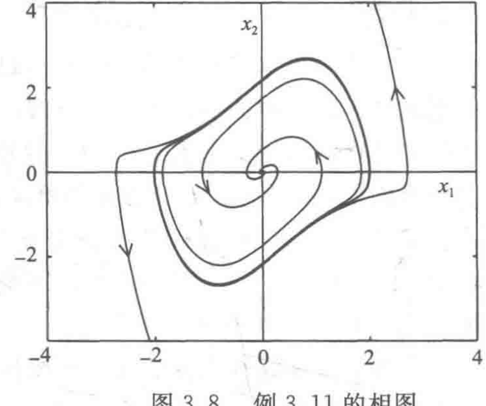


图 3.8　例 3.11 的相图

例 3.12　二维系统

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + \frac{1}{3}x_1^3 - x_2$$

它有三个孤立的平衡点：$(0,0)$、$(\sqrt{3},0)$ 与 $(-\sqrt{3},0)$。相图（图 3.9）显示原点是稳定焦点，另外两平衡点为鞍点。因此，原点是渐近稳定的。从相图也看出，鞍点的稳定轨线形成了两条分界线，这两条线就是吸引域的边界。吸引域是无界的。◀

Lyapunov 方法可用来估计吸引域。这里所谓的估计就是确定一个集合 Γ，它具有这样的性质：每条始于 Γ 内的轨线，当 $t\to\infty$ 时都趋向原点。在本节的剩余部分，我们将给出吸引域估计的若干结论。首先说明定理 3.3 或定理 3.5 提及的区域 D 未必是吸引域的一个

㊀ 这是定理 3.2 中第一条的充分性证明。

㊁ 有大量关于估计吸引域的文献，文献[18，23，48，65，94，99，140，155]描述了一些估计方法。

㊂ 该引理的证明参见文献[74，引理 8.1]。

估计。根据定理 3.3 或定理 3.5，如果 D 为包含原点的域，而且可找到 D 上的 Lyapunov 函数 $V(x)$，即在 D 内 $V(x)$是正定的而 $\dot{V}(x)$是负定或半负定的，进一步，除了零解 $x=0$ 外，没有其他解可以一直保持在集合$\{x\in D \mid \dot{V}(x)=0\}$内，则原点是渐近稳定的。有人可能会立即得出这样的结论，D 为吸引域的一个估计。下例说明这个推测是不正确的。 62

例 3.13 再次考虑例 3.12，在例 3.7 中，取 $h(x_1)=x_1-\frac{1}{3}x_1^3$ 与 $a=1$ 就得到例 3.12。因此，它的一个 Lyapunov 函数为

$$V(x)=\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}x+2\int_0^{x_1}\left(y-\frac{1}{3}y^3\right)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{3}{2}x_1^2-\frac{1}{6}x_1^4+x_1x_2+x_2^2$$

其导数是

$$\dot{V}(x)=-x_1^2\left(1-\frac{1}{3}x_1^2\right)-x_2^2$$

因此，定理 3.3 的条件在域 $D=\{-\sqrt{3}<x_1<\sqrt{3}\}$ 内满足。但是图 3.9 中的相图显示 D 不是吸引域的子集。◀

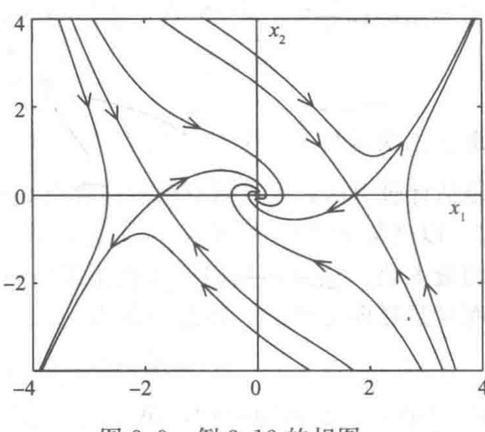


图 3.9 例 3.13 的相图

通过分析这个例子，不难理解为什么定理 3.3 或定理 3.5 中的 D 不是吸引域估计的原因。尽管始于 D 内的轨线将从一个 Lyapunov 面 $V(x)=c_1$ 移动到更内部的 Lyapunov 面 $V(x)=c_2$，其中 $c_2<c_1$，但却没有保证让轨线永远保持在 D 内。一旦轨线离开 D，就不能保证 $\dot{V}(x)$为负值。从而 $V(x)$衰减到零的结论就难以成立。定理 3.5 指出，当估计是 D 的正不变紧子集时，就不会出现这个问题。当 $\Omega_c=\{V(x)\leqslant c\}$有界并包含在 D 内时，最简单的估计就是集合 Ω_c ㊀。对于二次型 Lyapunov 函数 $V(x)=x^{\mathrm{T}}Px$ 且 $D=\{\|x\|<r\}$，只要选取 63

$$c<\min_{\|x\|=r}x^{\mathrm{T}}Px=\lambda_{\min}(P)r^2$$

就可确保 $\Omega_c\subset D$。对一个带状区域 $D=\{|b^{\mathrm{T}}x|<r\}$，其中 $b\in R^n$，方程式(B.3)表明

$$\min_{|b^{\mathrm{T}}x|=r}x^{\mathrm{T}}Px=\frac{r^2}{b^{\mathrm{T}}P^{-1}b}$$

因此，当 $D=\{|b_i^{\mathrm{T}}x|<r_i,\ i=1,\ \cdots,\ p\}$时，要求 $\Omega_c\subset D$，可以取

$$c<\min_{1\leqslant i\leqslant p}\frac{r_i^2}{b_i^{\mathrm{T}}P^{-1}b_i}$$

这时，Ω_c 必然是 D 的一个子集。

由于用 $\Omega_c=\{x^{\mathrm{T}}Px\leqslant c\}$估计吸引域简单易行，这使得上一节末讨论的线性化的意义增强了。在上一节末，我们指出如果 Jacobi 矩阵 $A=\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right](0)$为 Hurwitz 矩阵，则总是可以通过求解 Lyapunov 方程 $PA+A^{\mathrm{T}}P=-Q$ 来构造一个二次型 Lyapunov 函数$V(x)=x^{\mathrm{T}}Px$，其中的 Q 可以选为任意的正定矩阵。总结上面的讨论，只要 A 为 Hurwitz 矩阵，我们就可以

㊀ 我们也可以用有界开集$\{V(x)<c\}\subset D$ 估计吸引域。从 47 页脚注㊀可知，集合 Ω_c 可能有不止一个元素，但我们的讨论总是应用于包含原点的有界元素。值得注意的是这个元素是连通的，因为在该元素内的每个轨线汇聚于原点。

用二次型 Lyapunov 函数来估计吸引域。下面的例子将具体说明这种想法。

例 3.14 继续考虑例 3.11 的系统：

$$\dot{x}_1 = -x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1 + (x_1^2 - 1)x_2$$

这个系统有渐近稳定平衡点，因为

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x=0} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

为 Hurwitz 矩阵。取 $Q=I$，通过解 Lyapunov 方程 $PA+A^{\mathrm{T}}P=-I$ 得到唯一正定矩阵 P

$$P = \begin{bmatrix} 1.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

那么二次函数 $V(x)=x^{\mathrm{T}}Px$ 就是系统在原点的一个邻域内的 Lyapunov 函数。现在的目的是估计吸引域，因此需要确定包含原点的区域 D，在 D 内 $\dot{V}(x)$为负定的，且确定常数 $c>0$，以使得 $D\supset\Omega_c=\{V(x)\leqslant c\}$。求吸引域就是求我们能确定的最大的子集 Ω_c，即求常数 c 的最大值。注意，我们不必检验 $V(x)$在域 D 内的正定性，因为对所有 x，它都是正定的，而且是径向无界的，因此对任意 $c>0$，Ω_c 有界。$V(x)$沿着系统轨线的导数为

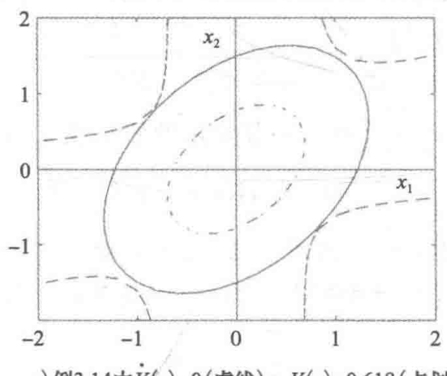
64

$$\dot{V}(x) = -(x_1^2 + x_2^2) - (x_1^3 x_2 - 2x_1^2 x_2^2)$$

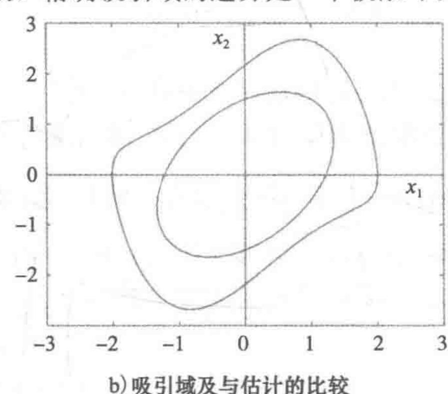
$\dot{V}(x)$的右边是两项的和：第一项$-(x_1^2+x_1^2)$是线性部分 Ax 所产生的；而第二项是非线性项 $f(x)-Ax$ 产生的。我们知道如果存在一个开球 $D=\{\|x\|<r\}$使得 $\dot{V}(x)$在 D 内负定，那么一旦找到这样的一个球，就可以通过选取 $c<\lambda_{\min}(P)r^2$，找到 $\Omega_c\subset D$。因此，为了扩大吸引域的估计，就需要找到最大的球使得 $\dot{V}(x)$在此球上为负定。我们有

$$\dot{V}(x) \leqslant -\|x\|^2 + |x_1|\,|x_1x_2|\,|x_1 - 2x_2| \leqslant -\|x\|^2 + \frac{\sqrt{5}}{2}\|x\|^4$$

其中，利用了$|x_1|\leqslant\|x\|$，$|x_1x_2|\leqslant\frac{1}{2}\|x\|^2$ 与$|x_1-2x_2|\leqslant\sqrt{5}\|x\|$。因此，$\dot{V}(x)$在半径为 r 的球 D 上是负定的，其中，r 满足 $r^2=\frac{2}{\sqrt{5}}$。因为 $\lambda_{\min}(P)=0.691$，取 $c=0.61<0.691\times\frac{2}{\sqrt{5}}=0.618$，于是取 $c=0.61$，集合 Ω_c 为吸引域的一个估计。保守性更少的(即范围更大些)估计可以由以下途径得到：做 $\dot{V}(x)=0$ 与 $V(x)=c$ 的等高线，逐步增加 c 的值，使它达到使得 Lyapunov 面 $V(x)=c$ 包含在$\{\dot{V}(x)<0\}$内的最大值。图 3.10a 给出了最大的 c 的情形，其中，$c=2.25$。图 3.10b 给出了精确的吸引域与该估计比较，精确吸引域的边界是一个极限环。◀



a) 例3.14中$\dot{V}(x)=0$(虚线)、$V(x)=0.618$(点划线)、$V(x)=2.25$(实线)的等高线



b) 吸引域及与估计的比较

图 3.10 例 3.14 图

由 $\Omega_c=\{V(x)\leqslant c\}$ 出发估计吸引域的方法比较简单，但通常是保守的。本小节最后给出一些注释，来说明如何减少估计的保守性。

注 3.1 如果 Ω_1，Ω_2，…，Ω_m 为吸引域的正向不变子集，则它们的并集 $\bigcup_{i=1}^{m}\Omega_i$ 也是吸引域内的正向不变子集。因此，如果对同一个系统有多个 Lyapunov 函数，每个函数都可以产生吸引域的估计，取这些估计的并集就可以扩大估计范围。例 7.14 可用来说明这个想法。

65

注 3.2 根据定理 3.5，如果 $\Gamma\subset D$ 是一个紧集，倘若可以证明 Γ 为正不变的，则我们可以从紧集 Γ 出发进行估计。这里特别需要研究 Γ 的边界上的向量场，以保证始于 Γ 内的轨线不会离开该域。下面的例子将说明该想法。

例 3.15 考虑系统[1]

$$\dot{x}_1=x_2,\quad \dot{x}_2=-4(x_1+x_2)-h(x_1+x_2)$$

其中，h 为局部 Lipschitz 函数，且满足

$$h(0)=0;\quad uh(u)\geqslant 0,\quad \forall\,|u|\leqslant 1$$

考虑二次型函数

$$V(x)=x^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}2&1\\1&1\end{bmatrix}x=2x_1^2+2x_1x_2+x_2^2$$

将它作为备选 Lyapunov 函数[2]。$\dot{V}(x)$导数为

$$\begin{aligned}\dot{V}(x)&=(4x_1+2x_2)\dot{x}_1+2(x_1+x_2)\dot{x}_2\\&=-2x_1^2-6(x_1+x_2)^2-2(x_1+x_2)h(x_1+x_2)\\&\leqslant-2x_1^2-6(x_1+x_2)^2=-x^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}8&6\\6&6\end{bmatrix}x\end{aligned}$$

其中，不等式成立的原因是 $|x_1+x_2|\leqslant 1$，此时 $(x_1+x_2)h(x_1+x_2)>0$。因此，$\dot{V}(x)$在集 $G=\{|x_1+x_2|\leqslant 1\}$ 上是负定的，从而原点是渐近稳定的。为了估计吸引域，需从 $\Omega_c=\{V(x)\leqslant c\}$ 开始。使得 $\Omega_c\subset G$ 成立的最大的 $c(>0)$ 为

$$c=\min_{|x_1+x_2|=1}x^{\mathrm{T}}Px=\frac{1}{b^{\mathrm{T}}P^{-1}b}=1$$

其中，$b^{\mathrm{T}}=[1\quad 1]$。当 $c=1$ 时，集合 Ω_c 如图 3.11 所示。如不要求吸引域有 Ω_c 这样的形式，可以得到更好的估计。扩展估计域的一个关键是要找出边界 $|x_1+x_2|=1$ 上的那些段，即，G 内的轨线到达这些段的时候不会穿越边界而离开。这点可以通过检查边界的向量场得出。下面引进另一种分析方法。设 $\sigma=x_1+x_2$，那么 G 的边界为 $\sigma=1$ 与 $\sigma=-1$。σ^2 沿着系统轨线的导数为

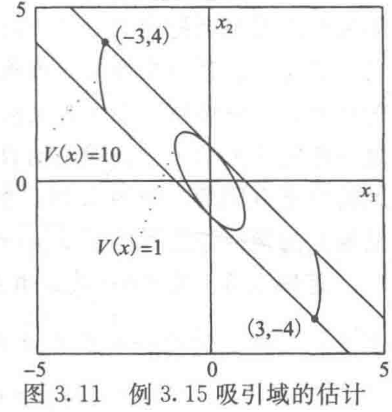


图 3.11 例 3.15 吸引域的估计

66

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sigma^2=2\sigma(\dot{x}_1+\dot{x}_2)=2\sigma x_2-8\sigma^2-2\sigma h(\sigma)\leqslant 2\sigma x_2-8\sigma^2,\quad \forall\,|\sigma|\leqslant 1$$

在边界 $\sigma=1$ 上，

[1] 该例取自文献[148]。

[2] 该 Lyapunov 函数可由变量梯度法或用 7.3 节中圆判据与 Kalman-Yakubovich-Popov 引理推导。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sigma^2 \leqslant 2x_2 - 8 \leqslant 0, \quad \forall x_2 \leqslant 4$$

这意味着当轨线到达边界 $\sigma=1$，只要 $x_2 \leqslant 4$，σ^2 就是非增的，因此它不会穿越边界到集合 G 外。同样，在边界 $\sigma=-1$ 上，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sigma^2 \leqslant -2x_2 - 8 \leqslant 0, \quad \forall x_2 \geqslant -4$$

因而当 $x_2 \geqslant -4$ 时，轨线不能穿越边界 $\sigma=-1$ 而离开集合 G。上述分析可用于形成满足定理 3.5 条件的闭的、有界的、正不变集合 Γ。我们用刚才得到的 G 边界上的两段来定义 Γ 的边界，它们同时成为 Lyapunov 面的边界。设 Lyapunov 面 $V(x)=c_1$ 与边界 $x_1+x_2=1$ 相交于 $x_2=4$，即点$(-3, 4)$(见图 3.11)。设 $V(x)=c_2$ 与边界 $x_1+x_2=-1$ 相交于 $x_2=-4$，即点$(3, -4)$。需要的 Lyapunov 面定义为 $V(x)=\min\{c_1, c_2\}$。常数 c_1 与 c_2 可以分别求得为：

67

$$c_1 = V(x)\big|_{x_1=-3, x_2=4} = 10, \quad c_2 = V(x)\big|_{x_1=3, x_2=-4} = 10$$

因此，取 $c=10$ 并定义集合 Γ 为

$$\Gamma = \{V(x) \leqslant 10, \text{同时}, |x_1 + x_2| \leqslant 1\}$$

该集合是闭合有界且正不变的。此外，在 Γ 内 $\dot{V}(x)$ 为负定，因为 $\Gamma \subset G$。于是，我们可依据定理 3.5 推断 Γ 为吸引域的一个子集。◀

3.7 Lyapunov 逆定理

定理 3.3 与定理 3.6 分别给出原点为平衡点的渐近稳定性或指数稳定性条件，其中需要找到一个满足条件的 Lyapunov 函数 $V(x)$。寻找这样一个满足条件的函数 $V(x)$，是 Lyapunov 方法的根本特征。这些定理的前提是要找到这样一个辅助函数，然后才能得到结论。对于这个寻找的过程，我们要考虑两个问题。第一，满足定理条件的函数是否存在？第二，如果存在，那么应该怎样才能找到一个这样的函数？在许多情况下，Lyapunov 理论对第一个问题给出了肯定回答。该答案即所谓的 Lyapunov 逆定理。例如，渐近稳定性的逆定理的表述如下：如果原点是渐近稳定的，则一定存在满足定理 3.3 的 Lyapunov 函数。大多数逆定理是构造性的，就是要构造一个满足定理条件的辅助函数，而构造辅助函数几乎总是假设微分方程的解为已知，众所周知，正因为无法求解微分方程我们才需要 Lyapunov 理论，因此在实际应用中这些逆定理无助于寻找辅助函数。但这些定理对于利用 Lyapunov 理论从概念上刻画动态系统的特性是有用的，如例 3.16。本节将给出两个 Lyapunov 逆定理，但没有提供证明[⊖]。第一个是原点为指数稳定时的 Lyapunov 逆定理。第二个是原点为渐近稳定时的 Lyapunov 逆定理。

定理 3.8 设 $x=0$ 是 n 维系统 $\dot{x}=f(x)$ 的指数稳定平衡点，其中 f 在域 $D=\{\|x\|<r\}$ 上连续可微。因此存在正常数 k、λ 与 r_0，其中 $r_0<\frac{r}{k}$，使得

68

$$\|x(t)\| \leqslant k\|x(0)\|\mathrm{e}^{-\lambda t}, \quad \forall x(0) \in D_0, \quad \forall t \geqslant 0$$

这里的 $D_0=\{\|x\|<r_0\}$，那么必然存在连续可微函数 $V(x)$，使得不等式

$$c_1\|x\|^2 \leqslant V(x) \leqslant c_2\|x\|^2, \quad \frac{\partial V}{\partial x}f(x) \leqslant -c_3\|x\|^2, \quad \left\|\frac{\partial V}{\partial x}\right\| \leqslant c_4\|x\|$$

对所有 $x \in D_0$ 成立，其中 c_1、c_2、c_3 及 c_4 都是正常数。此外，如果 f 是全局 Lipschitz 函

⊖ 文献[74]给出了证明；也可分别参见定理 4.14 与定理 4.17。

数，并对所有 x 都是连续可微的，且原点是全局指数稳定的平衡点，则 $V(x)$ 的定义域为 $x\in R^n$，并在定义域内，上述不等式总成立。

定理 3.9 设 $x=0$ 为 n 维系统 $\dot{x}=f(x)$ 的渐近稳定平衡点，其中 f 在一个包含原点的区域 $D\subset R^n$ 内是局部 Lipschitz 函数。设 $R_A\subset D$ 为 $x=0$ 的吸引域。那么，存在一个光滑的正定函数 $V(x)$ 以及一个连续的正定函数 $W(x)$，它们的定义域都是 R_A，使得

$$\text{当 } x\to\partial R_A \text{ 时，}\quad V(x)\to\infty$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}f(x)\leqslant -W(x),\quad \forall x\in R_A$$

其中，∂R_A 是 R_A 的边界。进一步，对于任意 $c>0$，$\{V(x)\leqslant c\}$ 为 R_A 的紧子集。并且当 $R_A=R^n$ 时，$V(x)$ 为径向无界。

为了说明 Lyapunov 逆定理的运用，我们用下面的例子来说明用定理 3.8 可以证明定理 3.2 的第一个结论的必要性。

例 3.16 考虑系统 $\dot{x}=f(x)$，其中 f 在原点的一个邻域内连续可微，且 $f(0)=0$。证明仅当 $A=\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right](0)$ 为 Hurwitz 矩阵时，$\dot{x}=f(x)$ 原点是指数稳定的。为此，回忆前面章节，$f(x)$ 可写成

$$f(x)=Ax+G(x)x$$

其中，当 $x\to 0$ 时，$G(x)\to 0$。因此，给定任意 $L>0$，存在 $r_1>0$，使得对所有 $\|x\|<r_1$，$\|G(x)\|\leqslant L$。改写线性系统 $\dot{x}=Ax$ 为

$$\dot{x}=Ax=f(x)-G(x)x$$

因为 $\dot{x}=f(x)$ 在原点是指数稳定的，设 $V(x)$ 是定理 3.8 给出的在域 $\{\|x\|<r_0\}$ 上的函数。利用 $V(x)$ 作为 $\dot{x}=Ax$ 的备选 Lyapunov 函数，得到

$$\frac{\partial V}{\partial x}Ax=\frac{\partial V}{\partial x}f(x)-\frac{\partial V}{\partial x}G(x)x\leqslant -c_3\|x\|^2+c_4L\|x\|^2=-(c_3-c_4L)\|x\|^2 \text{ ⊖}$$

取 $L<\frac{c_3}{c_4}$，上述不等式对所有 $\|x\|<\min(r_0,r_1)$ 都成立。因此，根据定理 3.6，$\dot{x}=Ax$ 的原点是指数稳定的。◀ 69

3.8 练习

3.1 证明标量系统 $\dot{x}=\frac{(k-x^2)}{x}$ 有两个渐近稳定的平衡点，其中 $k>0$，找出它们的吸引域。

3.2 考虑标量系统 $\dot{x}=-g(x)$，其中 $g(x)$ 是局部 Lipschitz 函数，且

$$g(0)=0;\quad xg(x)>0,\quad \forall x\neq 0 \quad \text{且} \quad x\in(-a,a)$$

根据 3.1 节的原点是渐近稳定的，现在要求用下面给出的函数 $V(x)$ 和 Lyapunov 方法证明这个结论。

(1) 证明 $V(x)=\frac{1}{2}x^2$ 或 $V(x)=\int_0^x g(y)\mathrm{d}y$ 是本系统满足定理 3.3 的渐近稳定性条件的 Lyapunov 函数。

(2) 如果对所有 $x\neq 0$，$xg(x)>0$，证明可用 $V(x)=\frac{1}{2}x^2$ 或 $V(x)=\frac{1}{2}x^2+\int_0^x g(y)\mathrm{d}y$

⊖ 原书将最后一个不等式误写为 $\leqslant(c_3-c_4L)\|x\|^2$。—— 译者注

做 Lyapunov 函数，它们满足定理 3.3 的全局渐近稳定性条件。

(3) 当 $g(x)$满足什么条件时，就可用$V(x)=\int_0^x g(y)\mathrm{d}y$作为 Lyapunov 函数来证明全局渐近稳定性？给出一个 $g(x)$，使得 $\dot{x}=-g(x)$的原点是全局渐近稳定的，但是$V(x)=\int_0^x g(y)\mathrm{d}y$不能满足定理 3.3 关于全局渐近稳定性的条件。

3.3 考虑标量系统 $\dot{x}=f(x)$，其中 $f(x)$由下面给出，分别确定原点是不稳定的、稳定但不是渐近稳定的、渐近稳定但不是全局渐近稳定的或全局渐近稳定的平衡点。

(1) 当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=-x$；当 $x<0$ 时，$f(x)=0$。

(2) 当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=x$；当 $x<0$，$f(x)=0$。

(3) $f(x)=\sin x$。

(4) $f(x)=-\sin x$。

(5) $f(x)=-x-\sin x$。

3.4 一个旋转的刚体航天器的 Euler 方程如下[105]：

$$J_1\dot{\omega}_1=(J_2-J_3)\omega_2\omega_3+u_1$$
$$J_2\dot{\omega}_2=(J_3-J_1)\omega_3\omega_1+u_2$$
$$J_3\dot{\omega}_3=(J_1-J_2)\omega_1\omega_2+u_3$$

其中，$\omega=\mathrm{col}(\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3)$是沿主轴的角速度向量，$u=\mathrm{col}(u_1,\ u_2,\ u_3)$是相对主轴的转矩向量，$u$ 作为输入，而 J_1，J_2 和 J_3 都是对相应转轴的转动惯量。

(1) 证明当 $u=0$ 时，原点 $\omega=0$ 稳定，并判别是否渐近稳定？

70

(2) 设 $u_i=-k_i\omega_i$，其中，k_1、k_2 和 k_3 为正常数。证明闭环系统的原点是全局渐近稳定的。

3.5 针对下列每个系统，分别确定原点是稳定、渐近稳定或不稳定的平衡点。

(1) $\dot{x}_1=x_2,\quad \dot{x}_2=x_3,\quad \dot{x}_3=-2\sin x_1-2x_2-2x_3$

(2) $\dot{x}_1=x_2,\quad \dot{x}_2=x_3,\quad \dot{x}_3=2\sin x_1-2x_2-2x_3$

(3) $\dot{x}_1=x_2+x_3,\quad \dot{x}_2=-\sin x_1-x_3,\quad \dot{x}_3=-\sin x_1+x_2$。

3.6 考虑系统

$$\dot{x}_1=x_2,\quad \dot{x}_2=-h(x_1)-2x_2,\quad 其中,h(x_1)=x_1\left(2+\frac{x_1^2}{1+x_1^2}\right)$$

验证 $V(x)=\int_0^{x_1}h(\sigma)\mathrm{d}\sigma+\frac{1}{2}(x_1+x_2)^2$ 为正定的且径向无界的，然后用该函数证明原点是全局指数稳定的。

3.7 考虑系统

$$\dot{x}_1=-x_1+x_3,\quad \dot{x}_2=x_3,\quad \dot{x}_3=-x_2-x_2^3-x_3$$

(1) 原点是否指数稳定？

(2) 应用 $V(x)=bx_1^2+3x_2^2+2x_2x_3+2x_3^2+x_2^4$，其中，$b>0$ 待选取，证明原点是全局渐近稳定的。

3.8 (文献[132])考虑系统

$$\dot{x}_1=x_2,\quad \dot{x}_2=-\tanh(x_1+x_2)$$

(1) 证明

$$V(x)=\int_0^{x_1}\tanh(\sigma)\mathrm{d}\sigma+\int_0^{x_1+x_2}\tanh(\sigma)\mathrm{d}\sigma+x_2^2$$

对所有的 x 正定，且 $V(x)$径向无界。

(2) 证明原点是全局渐近稳定的。

3.9 (Krasovskii 方法)考虑系统 $\dot{x}_1=f(x)$，其中 $f(0)=0$。假设 $f(x)$ 连续可微，且其 Jacobi矩阵 $\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]$满足

$$P\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x)\right]+\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x)\right]^{\mathrm{T}}P\leqslant -I,\quad \forall x\in R^n,\text{其中},P=P^{\mathrm{T}}>0$$

(1) 利用表达式 $f(x)=\int_0^1\frac{\partial f}{\partial x}(\sigma x)x\mathrm{d}\sigma$，证明

$$x^{\mathrm{T}}Pf(x)+f^{\mathrm{T}}(x)Px\leqslant -x^{\mathrm{T}}x,\quad \forall x\in R^n$$

71

(2) 用 $V(x)=f^{\mathrm{T}}(x)Pf(x)$，证明原点是全局渐近稳定的。

3.10 (文献[121])一个采用最优镇定控制的闭环系统为

$$\dot{x}=f(x)-kG(x)R^{-1}(x)G^{\mathrm{T}}(x)\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}}$$

其中，$V(x)$为连续可微正定函数，并满足 Hamilton-Jacobi-Bellman 方程

$$\frac{\partial V}{\partial x}f(x)+q(x)-\frac{1}{4}\frac{\partial V}{\partial x}G(x)R^{-1}(x)G^{\mathrm{T}}(x)\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}}=0$$

其中，对所有 x，$q(x)$为半正定函数，$R(x)$为正定矩阵，而 k 为正常数。证明当下列条件有一条满足时，原点是渐近稳定的。

(1) $q(x)$为正定的，且 $k\geqslant\frac{1}{4}$。

(2) $q(x)$为半正定，$k\geqslant\frac{1}{4}$，且方程 $\dot{x}_1=f(x)$仅有平凡解 $x(t)\equiv 0$ 能够一直保留在集合$\{q(x)=0\}$中。

3.11 考虑系统

$$\dot{x}_1=-x_1+x_3,\quad \dot{x}_2=x_3,\quad \dot{x}_3=-g_1(x_1)-g_2(x_2)-x_3$$

其中，g_1 与 g_2 为局部 Lipschitz 函数，且满足 $g_i(0)=0$，对所有 $y\neq 0$，$yg_i(y)>0$，则该系统在原点处有唯一的平衡点，并且

(1) 验证对所有 x，$V(x)=\int_0^{x_1}g_1(y)\mathrm{d}y+\int_0^{x_2}g_2(y)\mathrm{d}y+\frac{1}{2}x_3^2$ 为正定的，并用该函数证明原点的渐近稳定性。

(2) 对 g_1 与 g_2 增加什么附加条件，可以使得原点是全局渐近稳定的?

(3) 对 g_1 与 g_2 增加什么附加条件，可以使得原点是指数稳定的?

3.12 一含有非线性粘滞摩擦与非线性弹簧的非强迫质量-弹性系统(见附录 A.2)的模型为

$$m\ddot{y}+b(1+c|-\dot{y}|)\dot{y}+g(y)=0$$

其中，对于一个软化弹簧，$g(y)=k(1-a^2y^2)$及$|ay|<1$；对于一个硬化弹簧，$g(y)=k(1+a^2y^2)y$，所有常数为正。取状态变量为 $x_1=y$，$x_2=\dot{y}$。设计一个能量函数型的 Lyapunov 函数，并研究这两类弹簧在原点的稳定性。

72

3.13 证明系统

$$\dot{x}_1=x_2,\quad \dot{x}_2=-x_1+\mu x_2-x_2^3$$

当 $\mu\leqslant 0$ 时，原点是全局渐近稳定的；当 $\mu>0$ 时，原点不稳定。进一步问，当 $\mu=0$ 时，是否为指数稳定?

3.14 用 $V(x)=\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}x$ 证明系统

$$\dot{x}_1=-x_1+x_2\cos x_1,\quad \dot{x}_2=x_1\cos x_1-x_2(\cos x_1)^2+x_3,\quad \dot{x}_3=-x_2$$

的原点是全局渐近稳定的。该系统是否为指数稳定？

3.15 考虑单摆方程

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\sin x_1 - bx_2 + u$$

采取状态反馈控制 $u=-k_1\text{sat}(x_1)-k_2\text{sat}(x_2)$，其中，$b$、$k_1$ 与 k_2 为正常数，且 $k_1>1$。

(1) 证明原点为闭环系统的唯一平衡点。

(2) 利用 $V(x)=\int_0^{x_1}[\sin\sigma+k_1\text{sat}(\sigma)]\mathrm{d}\sigma+\frac{1}{2}x_2^2$，证明闭环系统的原点是全局渐近稳定的。

3.16 对下列各个系统，要求：

(1) 找出所有平衡点，并用线性化方法研究各平衡点的稳定性。

(2) 用二次型 Lyapunov 函数，估计每个渐近稳定平衡点的吸引域，并使估计结果尽量大。

(3) 绘制系统的相图并找出精确吸引域，将其与所得估计进行比较。

1) $\dot{x}_1=-(x_1+x_1^3)+2x_2, \quad \dot{x}_2=2x_1-(x_2+x_2{}^3)$

2) $\dot{x}_1=x_1-x_1^3+x_2, \quad \dot{x}_2=x_1-3x_2$

3) $\dot{x}_1=x_2, \quad \dot{x}_2=-x_1-x_2+2x_2^3-\frac{1}{2}x_2^5$

4) $\dot{x}_1=-x_2, \quad \dot{x}_2=2x_1+3x_2+2\text{sat}(-3x_2)$

3.17 考虑系统

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + x_1^5 - x_2$$

(1) 采用备选 Lyapunov 函数 $V(x)=\frac{1}{2}x_1^2-\frac{1}{6}x_1^6+\frac{1}{2}x_2^2$，证明原点是渐近稳定的并估计其吸引域。

73

(2) 绘制系统的相图并找出精确吸引域，将其与所得估计进行比较。

3.18 考虑系统

$$\dot{x}_1 = x_1^3 - x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1 - x_2$$

讨论原点是否渐近稳定？是否指数稳定？是否全局渐近稳定？如果不是全局渐近稳定，则估计其吸引域。

3.19 对下列每个系统，证明在原点处有个平衡点，并研究该平衡点的稳定性。如果原点是渐近稳定的，确定是否为全局渐近稳定；如果不是全局渐近稳定，则估计吸引域。

(1) $\dot{x}_1=x_2, \quad \dot{x}_2=-x_1^3-x_2$

(2) $\dot{x}_1=x_2, \quad \dot{x}_2=-x_1^3$

(3) $\dot{x}_1=x_2, \quad \dot{x}_2=-x_1-2x_2-(x_1^2+x_2^2)\tanh(x_1+x_2)$

(4) $\dot{x}_1=x_2, \quad \dot{x}_2=-x_1+\frac{1}{3}x_1^3-2x_2$

(5) $\dot{x}_1=-x_1^3+x_2, \quad \dot{x}_2=-x_1^3-x_2$

3.20 证明系统

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2, \quad \dot{x}_2 = -0.1x_1^3 - x_2 - 10\sin x_3, \quad \dot{x}_3 = x_2 - x_3$$

的原点是渐近稳定的，并估计其吸引域。

3.21 (文献[148])考虑系统

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 - (x_1 + 2x_2)(1 - x_2^2)$$

证明原点是渐近稳定的，且找出一个包含点 $x=(-1, 1)$ 的吸引域估计。提示：对二次 Lyapunov 函数 $V(x)=x^{\mathrm{T}}Px$，用变量梯度法找到一个集合，它包含在$\{|x_2|\leqslant 1\}$内，并在该集合上 $\dot{V}(x)$ 负定。

74

第4章
时变系统和扰动系统

4.1 节将把 Lyapunov 稳定性理论推广到时变系统。为此，我们首先引入$\mathcal{K}$类与$\mathcal{KL}$类函数，它们将在本章和后面各章中广泛使用。我们将用这两类函数定义时变系统平衡点的一致稳定性与一致渐近稳定性，并给出相应的 Lyapunov 定理。然后本章转向研究扰动系统

$$\dot{x} = f(x) + g(t,x)$$

其中，零扰动系统 $\dot{x}=f(x)$的原点是渐近稳定的。我们将分两节研究两种类型的扰动。4.2 节主要研究零扰动，即扰动项满足 $g(t, 0)=0$，其目的在于给出 g 满足什么条件时，扰动系统的原点依然是一致渐近稳定或指数稳定的。4.3 节研究非零扰动，即$g(t, 0)\neq 0$的情况，引入终极有界性的概念，并给出该情况下的类 Lyapunov 定理[⊖]。终极有界性结果很自然地导出了输入-状态稳定性的概念，这将与类 Lyapunov 定理一并在 4.4 节介绍。

4.1 时变系统

考虑 n 维时变系统

$$\dot{x} = f(t,x) \tag{4.1}$$

其中，$f(t, x)$关于时间 t 是分段连续的。对所有 $t\geqslant 0$，关于 $x\in D$ 满足局部 Lipschitz 条件，其中 $D\subset R^n$ 为包含原点 $x=0$ 的一个区域。如果对所有的 $t\geqslant 0$，$f(t, 0)=0$，则称原点是系统(式(4.1))在 $t=0$ 时的一个平衡点。时变系统平衡点的稳定性和渐近稳定性的概念与时不变系统的定义 3.1 基本一样。需要添加的新要素是：时不变系统的解只与$(t-t_0)$有关，而时变系统的解可能与 t 和 t_0 都有关。因此，平衡点的稳定性质一般会与 t_0 有关。原点 $x=0$ 为 $\dot{x}=f(t, x)$的稳定平衡点，如果对任意的 $\varepsilon>0$，与任意的 $t_0\geqslant 0$，存在 $\delta>0$，它可能与 ε 和 t_0 有关，使得

$$\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \quad \forall\, t \geqslant t_0$$

注意：对任意一个 t_0 可以找到一个满足要求的 δ，但不等于说对所有的 t_0 有一个公共的、仅依赖于 ε 的 δ。在研究渐近稳定性中将出现类似的情形。因此，为了从定义 3.1 出发来定义关于初始时间的一致稳定性与渐近稳定性，我们先定义将要用到的$\mathcal{K}$类函数与$\mathcal{KL}$类函数。

定义 4.1

- 设 $\alpha(r)$是定义在 $r\in[0, a)$上的标量连续函数，如果 $\alpha(r)$为严格增的，且 $\alpha(0)=0$，则称 $\alpha(r)$属于$\mathcal{K}$类。如果该函数定义在$[0, \infty)$上，且当 $r\to\infty$ 时 $\alpha(r)\to\infty$，则称该函数属于$\mathcal{K}_\infty$类。
- 设 $\beta(r, s)$是定义在 $r\in[0, a)$，$s\in[0, \infty)$上的标量连续函数，如果对每个固定 s，映射 $\beta(r, s)$关于 r 属于$\mathcal{K}$类，对每个固定 r，映射 $\beta(r, s)$关于 s 严格递减，且当 $s\to\infty$时 $\beta(r, s)\to 0$，则称该函数属于$\mathcal{KL}$类。

⊖ 非零扰动参照文献[54，78]中的“持续扰动”。非零扰动结果与文献[54]中 56 节的整体稳定性概念有关。

例 4.1

- 因为 $\alpha'(r)=\dfrac{1}{1+r^2}>0$，所以 $\alpha(r)=\tan^{-1}(r)$ 是严格递增的。该函数属于$\mathcal{K}$类，但不属于$\mathcal{K}_\infty$类，因为 $\lim\limits_{r\to\infty}\alpha(r)=\dfrac{\pi}{2}<\infty$。
- $\alpha(r)=r^c$，其中 $c>0$，为严格递增的，因为 $\alpha'(r)=cr^{c-1}>0$，而且有 $\lim\limits_{r\to\infty}\alpha(r)=\infty$，所以它属于$\mathcal{K}_\infty$类。
- $\alpha(r)=\min\{r,\ r^2\}$ 为连续的、严格递增的，且 $\lim\limits_{r\to\infty}\alpha(r)=\infty$，因此该函数属于$\mathcal{K}_\infty$类。注意，在 $r=1$ 处它不是连续可微的，因为$\mathcal{K}$类函数不要求连续可微性。
- $\beta(r,\ s)=\dfrac{r}{ksr+1}$，关于任意正常数 k，它都属于$\mathcal{KL}$类，因为 $\dfrac{\partial\beta}{\partial r}=\dfrac{1}{(ksr+1)^2}>0$，故 $\beta(r,\ s)$ 关于 r 严格递增，而由于 $\dfrac{\partial\beta}{\partial s}=-\dfrac{kr^2}{(ksr+1)^2}<0$，故 $\beta(r,\ s)$ 关于 s 严格递减，并且直接验证知当 $s\to\infty$ 时 $\beta(r,\ s)\to 0$。
- $\beta(r,\ s)=r^c\mathrm{e}^{-as}$，其中 a 和 c 为正常数，则它属于$\mathcal{KL}$类。 ◀

76

下列两个引理将陈述$\mathcal{K}$类和$\mathcal{KL}$类函数的一些性质[⊖]。

引理 4.1 设 α_1 和 α_2 分别为在 $[0,\ a_1)$ 和 $[0,\ a_2)$ 上的$\mathcal{K}$类函数，其中 $a_1\geqslant\lim\limits_{r\to a_2}\alpha_2(r)$，而 β 为定义在 $[0,\ \lim\limits_{r\to a_2}\alpha_2(r))\times[0,\ \infty)$ 上的$\mathcal{KL}$类函数，其中 $a_1\geqslant\lim\limits_{r\to a_2}\beta(\alpha_2(r),\ 0)$。设 α_3 和 α_4 为$\mathcal{K}_\infty$类函数。记 α_i 的逆记为 α_i^{-1}。则

- α_1^{-1} 定义在 $[0,\ \lim\limits_{r\to a_1}\alpha_1(r))$ 上且属于$\mathcal{K}$类。
- α_3^{-1} 定义在 $[0,\ \infty)$ 上且属于$\mathcal{K}_\infty$类。
- $\alpha_1\circ\alpha_2$ 定义在 $[0,\ a_2)$ 上且属于$\mathcal{K}$类。
- $\alpha_3\circ\alpha_4$ 定义在 $[0,\ \infty)$ 上且属于$\mathcal{K}_\infty$类。
- $\sigma(r,\ s)=\alpha_1(\beta(\alpha_2(r),\ s))$ 定义在 $[0,\ a_2)\times[0,\ \infty)$ 上且属于$\mathcal{KL}$类。

引理 4.2 设 $V:\ D\to R$ 为定义在包含原点的域 $D\subset R^n$ 上的连续正定函数。设 $r>0$ 满足 $B_r\subset D$，则存在定义在 $[0,\ r]$ 上的$\mathcal{K}$类函数 α_1 与 α_2，使得

$$\alpha_1(\|x\|)\leqslant V(x)\leqslant\alpha_2(\|x\|)$$

对所有 $x\in B_r$ 成立。如果 $D=R^n$ 并且 $V(x)$ 径向无界，则存在$\mathcal{K}_\infty$类函数 α_1 和 α_2，使得上述不等式对所有 $x\in R^n$ 成立。

定义 4.2 $\dot{x}=f(t,\ x)$ 的平衡点 $x=0$ 是

- 一致稳定的，如果存在一个$\mathcal{K}$类函数 α 以及与 t_0 无关的正常数 c 使得
$$\|x(t)\|\leqslant\alpha(\|x(t_0)\|),\quad\forall t\geqslant t_0\geqslant 0,\quad\forall\|x(t_0)\|<c$$
- 一致渐近稳定的，如果存在一个$\mathcal{KL}$类函数 β 和一个与 t_0 无关的正常数 c，使得
$$\|x(t)\|\leqslant\beta(\|x(t_0)\|,t-t_0),\quad\forall t\geqslant t_0\geqslant 0,\quad\forall\|x(t_0)\|<c$$
- 全局一致渐近稳定的，如果上述不等式对任意的 $x(t_0)$ 成立。
- 指数稳定的，如果存在正常数 c、k 与 λ 使得
$$\|x(t)\|\leqslant k\|x(t_0)\|\mathrm{e}^{-\lambda(t-t_0)},\quad\forall t\geqslant t_0\geqslant 0,\quad\forall\|x(t_0)\|<c$$

77

- 全局指数稳定的，如果上述不等式对任意的 $x(t_0)$ 成立。

⊖ 引理 4.1 与引理 4.2 的证明在文献[74]的引理 4.3 中给出。

下列 3 个定理，将定理 3.3 与定理 3.6 推广到时变系统，我们这里只给出结论而将证明略去了㊀。

定理 4.1　设原点 $x=0$ 为 $\dot{x}=f(t,x)$ 的一个平衡点，$D\in R^n$ 为包含 $x=0$ 的一个区域。假如 $f(t,x)$ 关于 t 分段连续，并且对所有 $t\geqslant 0$ 和 $x\in D$ 关于 x 是局部 Lipschitz 函数。$V(t,x)$ 为一个连续可微函数，并对所有 $t\geqslant 0$ 和 $x\in D$ 成立

$$W_1(x)\leqslant V(t,x)\leqslant W_2(x) \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial x}f(t,x)\leqslant 0 \tag{4.3}$$

其中，$W_1(x)$ 和 $W_2(x)$ 是在 D 上连续的正定函数，则原点是一致稳定的。

定理 4.2　假如定理 4.1 的条件都满足，并把不等式(4.3)加强为

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial x}f(t,x)\leqslant -W_3(x) \tag{4.4}$$

对所有 $t\geqslant 0$ 和 $x\in D$ 成立，其中 $W_3(x)$ 为 D 上的连续正定函数，则原点为一致渐近稳定的。此外，如果存在 r 与 c 满足 $B_r=\{\|x\|\leqslant r\}\subset D$ 和 $c<\min\limits_{\|x\|=r}W_1(x)$，则始于 $\{x\in B_r\mid W_2(x)\leqslant c\}$ 内的每条轨线都满足

$$\|x(t)\|\leqslant \beta(\|x(t_0)\|,t-t_0),\quad \forall\, t\geqslant t_0\geqslant 0$$

其中，β 为一个 $\mathcal{KL}$ 类函数。最后，如果 $D=R^n$ 并且 $W_1(x)$ 为径向无界，则原点是全局一致渐近稳定的。

定理 4.3　假如定理 4.1 的条件成立，并把不等式(4.2)和不等式(4.3)分别加强为

$$k_1\|x\|^a\leqslant V(t,x)\leqslant k_2\|x\|^a \tag{4.5}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial x}f(t,x)\leqslant -k_3\|x\|^a \tag{4.6}$$

对所有 $t\geqslant 0$ 和 $x\in D$ 成立，其中 k_1、k_2、k_3 及 α 为正常数，则原点为指数稳定。如果假设全局成立，则原点是全局指数稳定的。

如果 $V(t,x)\geqslant 0$，则称函数 $V(t,x)$ 是半正定的。如果存在正定函数 $W_1(x)$，使得 $V(t,x)\geqslant W_1(x)$，则称 $V(t,x)$ 是正定的；如果 $W_1(x)$ 是径向无界的，则 $V(t,x)$ 也称为径向无界。如果 $V(t,x)\leqslant W_1(x)$㊁，则称 $V(t,x)$ 是递减的。如果 $-V(t,x)$ 为正定(半正定)的，则称函数 $V(t,x)$ 是负定(半负定的)的。因此，定理 4.1 和定理 4.2 就是：如果存在一个连续可微正定递减函数 $V(t,x)$，其沿系统轨线的导数为半负定，则原点是一致稳定的；如果导数为负定的，则原点是一致渐近稳定的；如果一致渐近稳定性条件全局成立以及 $V(t,x)$ 为径向无界，则原点是全局一致渐近稳定的。

78

例 4.2　考虑标量系统

$$\dot{x}=-[1+g(t)]x^3$$

其中，$g(t)$ 连续，且对所有 $t\geqslant 0$，$g(t)\geqslant 0$。取 $V(x)=\frac{1}{2}x^2$，那么

$$\dot{V}(t,x)=-[1+g(t)]x^4\leqslant -x^4,\quad \forall\, x\in R,\quad \forall\, t\geqslant 0$$

设 $W_1(x)=W_2(x)=V(x)$，$W_3(x)=x^4$，则定理 4.2 的条件全局成立。因此，原点是全局一致渐近稳定的。◀

㊀ 证明可参见文献[74]的 4.5 节。

㊁ 原书误写为 $w_2(x)$。——译者注

例 4.3 考虑系统

$$\dot{x}_1 = -x_1 - g(t)x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1 - x_2$$

其中，$g(t)$连续可微，且满足

$$0 \leqslant g(t) \leqslant k \text{ 和 } \dot{g}(t) \leqslant g(t), \quad \forall t \geqslant 0$$

取 $V(t, x) = x_1^2 + [1+g(t)]x_2^2$，可以看出

$$x_1^2 + x_2^2 \leqslant V(t,x) \leqslant x_1^2 + (1+k)x_2^2, \quad \forall x \in R^2$$

因此，$V(t, x)$正定递减且径向无界。V 沿系统轨线的导数为

$$\dot{V}(t,x) = -2x_1^2 + 2x_1x_2 - [2 + 2g(t) - \dot{g}(t)]x_2^2$$

利用不等式

$$2 + 2g(t) - \dot{g}(t) \geqslant 2 + 2g(t) - g(t) \geqslant 2$$

得到

$$\dot{V}(t,x) \leqslant -2x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2 = -\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \overset{\text{def}}{=\!=\!=} -x^{\mathrm{T}}Qx$$

其中，Q 为正定的，因此 $\dot{V}(t, x)$是负定的。因而有正定二次函数 W_1、W_2 及 W_3 全局满足定理 4.2 的假设。进一步，正定函数 $x^{\mathrm{T}}Px$ 满足

$$\lambda_{\min}(P)\|x\|^2 \leqslant x^{\mathrm{T}}Px \leqslant \lambda_{\max}(P)\|x\|^2$$

79 可见只要取 $a=2$，定理 4.3 的条件全局满足。因此，原点是全局指数稳定的。 ◀

4.2 扰动系统

考虑系统

$$\dot{x} = f(x) + g(t,x) \tag{4.7}$$

其中，f 为局部 Lipschitz 函数。g 关于时间 t 是分段连续的，并且对于所有 $t \geqslant 0$ 与 $x \in D$，关于 x 是局部 Lipschitz 的，其中 $D \subset R^n$ 为包含原点 $x=0$ 的一个区域。设 $f(0)=0$ 和 $g(t, 0)=0$。因而原点为系统(式(4.7))的一个平衡点。我们把系统(式(4.7))看成是下列标称系统的扰动结果㊀：

$$\dot{x} = f(x) \tag{4.8}$$

在实际问题中，扰动项 $g(t, x)$可以认为是由于存在建模误差、元件老化、不确定性与干扰产生的。在典型情况下，$g(t, x)$是未知的，但我们可以假定掌握它的一些信息，例如知道$\|g(t, x)\|$的上界。假设标称系统(式(4.8))在原点处有一个渐近稳定平衡点，那么原点也是扰动系统(式(4.7))的平衡点，关于它的稳定性能给出什么样的结论？一个自然的方法就是用标称系统的 Lyapunov 函数作为扰动系统的备选 Lyapunov 函数来研究这个问题。

先讨论当原点为标称系统(式(4.8))的指数稳定平衡点的情况。设 $V(x)$为式(4.8)的 Lyapunov 函数，即

$$c_1\|x\|^2 \leqslant V(x) \leqslant c_2\|x\|^2, \quad \frac{\partial V}{\partial x}f(x) \leqslant -c_3\|x\|^2, \quad \left\|\frac{\partial V}{\partial x}\right\| \leqslant c_4\|x\|^2 \tag{4.9}$$

对所有 $x \in D$ 成立，其中 c_1、c_2、c_3 与 c_4 为正常数㊁。假设扰动项 $g(t, x)$具有线性增长的

㊀ 为方便起见，标称系统假定为时不变的。本节的结果可直接推广到标称系统为时变的情况，参见文献[74]的 9.1 节。

㊁ 当函数 f 是连续可微的时候，满足式(4.9)的 Lyapunov 函数的存在性由定理 3.8(逆 Lyapunov 定理)保证。

上界，即存在非负常数 γ，使得

$$\|g(t,x)\| \leqslant \gamma \|x\|, \quad \forall t \geqslant 0, \quad \forall x \in D \tag{4.10}$$

如果函数 $g(t, x)$在原点为零，并在原点的一个有界邻域内，当 $t \geqslant 0$ 时，$g(t, x)$对 x 满足局部 Lipschitz 条件，而且对 t 是一致的，则在该邻域内 $g(t, x)$满足式(4，10)[㊀]。现在用 V 作为备选 Lyapunov 函数，研究受扰动系统式(4.7)的原点平衡点的稳定性。$V(x)$沿系统(式(4.7))的轨线导数为

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) + \frac{\partial V}{\partial x} g(t,x)$$

80

上式右边第一项为 $V(x)$沿着标称系统的轨线的导数，它是负定的。第二项$\left[\frac{\partial V}{\partial x}\right]g$ 是扰动的结果。由于我们不完全了解 g，只能从最坏情况去分析，其中，用其非负边界去代替$\left[\frac{\partial V}{\partial x}\right]g$。这样，由式(4.9)和式(4.10)可得

$$\dot{V}(x) \leqslant -c_3\|x\|^2 + \left\|\frac{\partial V}{\partial x}\right\| \|g(t,x)\| \leqslant -c_3\|x\|^2 + c_4\gamma\|x\|^2$$

如果 γ 足够小，且成立

$$\gamma < \frac{c_3}{c_4} \tag{4.11}$$

则

$$\dot{V}(t,x) \leqslant -(c_3 - \gamma c_4)\|x\|^2, \quad (c_3 - \gamma c_4) > 0$$

在这个情况下，根据定理 4.3 我们可以断定原点是扰动系统(式(4.7))的指数稳定平衡点。

例 4.4 考虑系统

$$\dot{x} = Ax + g(t,x)$$

其中，A 为 Hurwitz 矩阵，且对于所有 $t \geqslant 0$ 和 $x \in R^n$，$\|g(t, x)\| \leqslant \gamma\|x\|$。设 $Q = Q^T > 0$，解 Lyapunov 方程 $PA + A^T P = -Q$，根据定理 3.7 可知方程存在唯一解 $P = P^T > 0$。取二次型 Lyapunov 函数 $V(x) = x^T Px$，则式(4.9)满足。特别地

$$\lambda_{\min}(P)\|x\|^2 \leqslant V(x) \leqslant \lambda_{\max}(P)\|x\|^2$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}Ax = -x^T Qx \leqslant -\lambda_{\min}(Q)\|x\|^2$$

$$\left\|\frac{\partial V}{\partial x}\right\| = \|2x^T P\| \leqslant 2\|P\|\|x\| = 2\lambda_{\max}(P)\|x\|$$

$V(x)$沿扰动系统的导数满足

$$\dot{V}(t,x) \leqslant -\lambda_{\min}(Q)\|x\|^2 + 2\lambda_{\max}(P)\gamma\|x\|^2$$

因此，如果 $\gamma < \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2\lambda_{\max}(P)}$，则原点是全局指数稳定的。由于该边界取决于 Q 的选取，所以现在要做的如何选取 Q 使得比值$\frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)}$最大。已知的结果是当选取 $Q = I$ 时比值最大[㊁]。 ◀

81

例 4.5 考虑二维系统

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -4x_1 - 2x_2 + \beta x_2^3$$

其中，常数 $\beta \geqslant 0$ 为未知的参数。把该系统看成是具有式(4.7)形式的扰动系统，则有

㊀ 当要求线性增长上界式(4.10)全局成立时，它会成为限制性的，因为要求 g 对 x 是全局 Lipschitz 的。

㊁ 见文献[74]的练习 9.1。

$$f(x)=Ax=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -4 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix},\quad g(x)=\begin{bmatrix}0\\ \beta x_2^3\end{bmatrix}$$

A 的特征值为$-1\pm \mathrm{j}\sqrt{3}$，因此 A 是 Hurwitz 矩阵。Lyapunov 方程 $PA+A^{\mathrm{T}}P=-I$ 的解为

$$P=\begin{bmatrix}\frac{3}{2} & \frac{1}{8}\\ \frac{1}{8} & \frac{5}{16}\end{bmatrix}$$

如例 4.4 所示，当 $c_3=1$ 和 $c_4=2\lambda_{\max}(P)=2\times 1.513=3.026$ 时，Lyapunov 函数 $V(x)=x^{\mathrm{T}}Px$ 满足不等式(4.9)。扰动项 $g(x)$ 不满足全局线性增长的约束 $\|g(x)\|\leqslant\gamma\|x\|$，但却可以在一个紧集上满足这个约束。考虑紧集 $\Omega_c=\{x^{\mathrm{T}}Px\leqslant c\}$(其中 $c>0$)，并设 $k_2=\max\limits_{x\in\Omega_c}|x_2|$。然后根据式(B.4)，有

$$k_2=\max_{x^{\mathrm{T}}Px\leqslant c}|[0\quad 1]x|=\sqrt{c}\|[0\quad 1]P^{-\frac{1}{2}}\|=1.8194\sqrt{c}$$

其中，$P^{-\frac{1}{2}}$ 为矩阵 P 平方根 $P^{\frac{1}{2}}$ 的逆，用 $V(x)$ 作为扰动系统的备选 Lyapunov 函数，得到

$$\dot{V}(x)\leqslant-\|x\|^2+3.026\beta k_2^2\|x\|^2$$

因此，如果

$$\beta<\frac{1}{3.026k_2^2}=\frac{1}{3.026\times(1.8194)^2c}\approx\frac{0.1}{c}$$

$\dot{V}(x)$ 在 Ω_c 内将为负定的，原点是指数稳定的，并且可将 Ω_c 作为吸引域的估计。这个例子可以用来说明边界(式(4.11))的保守性。利用这个边界，可得不等式 $\beta<\frac{1}{(3.026k_2^2)}$，这表明允许扰动项 $g(t,x)$ 为满足 $\|g(t,x)\|\leqslant\beta k_2^2\|x\|$ 的任意二维向量。这类扰动比例 4.5 中的扰动更具一般性。在例 4.5 中，g 的第一个分量为零，这类扰动称为*结构扰动*，$\|g(t,x)\|\leqslant\beta k_2^2\|x\|$ 对分量没有限制，这称为*非结构扰动*，即向量 g 变化的方向是任意的。通常，忽略扰动的结构会导致吸引域的边界有余量。现在考虑到扰动的结构再次进行吸引域分析，不用式(4.11)的一般边界，而是计算 $V(x)$ 沿着扰动系统轨线的导数，得到 [82]

$$\dot{V}(x)\leqslant-\|x\|^2+2x^{\mathrm{T}}Pg(x)=-\|x\|^2+\frac{1}{8}\beta x_2^3(2x_1+5x_2)$$

$$\leqslant-\|x\|^2+\frac{\sqrt{29}}{8}\beta k_2^2\|x\|^2$$

其中，写$(2x_1+5x_2)$为 $y^{\mathrm{T}}x$ 并利用不等式 $|y^{\mathrm{T}}x|\leqslant\|x\|\|y\|$。因此对于 $\beta<\frac{\sqrt{29}}{8}k_2^2$，$\dot{V}(x)$是负定的。再次利用对所有 $x\in\Omega_c$，$|x_2|^2\leqslant k_2^2=(1.8194)^2c$，可得到边界 $\beta<\frac{0.448}{c}$，它是用式(4.11)所得到边界的 4 倍以上。最后，注意，不等式 $\beta<\frac{0.448}{c}$ 表明吸引域估计与 β 的上界估计的折中。β 的上界越小，吸引域的估计越大。这个折中不是人为的，在这个例子中的确存在。经过变量变换

$$z_1=\frac{\sqrt{3\beta}}{2}x_2,\quad z_2=\frac{\sqrt{3\beta}}{8}(4x_1+2x_2-\beta x_2^3),\quad \tau=2t$$

状态方程被转换成

$$\frac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}\tau}=-z_2,\quad \frac{\mathrm{d}z_2}{\mathrm{d}\tau}=z_1+(z_1^2-1)z_2$$

如例 3.11 所示，该系统有一个被不稳定极限环围绕的有界吸引域。将上述系统转换为 x 坐标，吸引域将随着 β 的减少而扩张，随着 β 的增大而收缩。◀

当标称系统 $\dot{x}=f(x)$ 的原点只是渐近稳定而不是指数稳定的，这时扰动系统的稳定性分析更为复杂。假设标称系统有一个正定 Lyapunov 函数 $V(x)$，对所有 $x\in D$ 满足

$$\frac{\partial V}{\partial x}f(x)\leqslant -W_3(x)$$

其中，$W_3(x)$ 为连续的正定函数。$V(x)$ 沿着系统(式(4.7))轨线的导数为

$$\dot{V}(t,x)=\frac{\partial V}{\partial x}f(x)+\frac{\partial V}{\partial x}g(t,x)\leqslant -W_3(x)+\left\|\frac{\partial V}{\partial x}g(t,x)\right\|$$

现在的任务是要证明对所有 $t\geqslant 0$ 和 $x\in D$，有 $\left\|\frac{\partial V}{\partial x}g(t,x)\right\|<W_3(x)$。不像分析指数稳定性情况那样，通过对 $\|g(t,x)\|$ 施加一个线性增长的上界就能估计吸引域的任务。约束 $\|g(t,x)\|$ 的边界主要取决于标称系统 Lyapunov 函数的性质。如果对于所有 $x\in D$ 存在正常数 c_3 和 c_4，使得 $V(x)$ 满足

$$\frac{\partial V}{\partial x}f(x)\leqslant -c_3\phi^2(x),\quad \left\|\frac{\partial V}{\partial x}\right\|\leqslant c_4\phi(x) \tag{4.12}$$

83

上式中 $\phi(x)$ 是正定连续的，那么这类系统应用 Lyapunov 函数进行分析就和指数稳定情况的情形一样简单。满足式(4.12)的函数 $V(x)$ 通常称为二次型 Lyapunov 函数。显然满足式(4.9)的 Lyapunov 函数是二次型的，但反过来未必正确，即原点不是指数稳定的，但依然可能存在二次型 Lyapunov 函数。我们将用一个例子简单说明这一点。如果标称系统 $\dot{x}=f(x)$ 有一个二次型 Lyapunov 函数 $V(x)$，则它沿着系统(式(4.7))轨线的导数满足

$$\dot{V}(t,x)\leqslant -c_3\phi^2(x)+c_4\phi(x)\|g(t,x)\|$$

现在假设扰动项满足边界条件

$$\|g(t,x)\|\leqslant \gamma\phi(x),\quad \gamma<\frac{c_3}{c_4}$$

则

$$\dot{V}(t,x)\leqslant -(c_3-c_4\gamma)\phi^2(x)$$

这表明 $\dot{V}(t,x)$ 是负定的。

例 4.6 考虑标量系统

$$\dot{x}=-x^3+g(t,x)$$

其标称系统 $\dot{x}=-x^3$ 在原点有一个全局渐近稳定平衡点。但从例 3.2 知道，原点不是指数稳定的。因此没有满足式(4.9)的 Lyapunov 函数。Lyapunov 函数 $V(x)=x^4$ 满足式(4.12)，其中 $\phi(x)=|x|^3$，$c_3=c_4=4$。假设扰动项 $g(t,x)$ 对所有 x 满足边界条件 $|g(t,x)|\leqslant\gamma|x|^3$，其中 $\gamma<1$，则 V 沿扰动系统轨线的导数满足

$$\dot{V}(t,x)\leqslant -4(1-\gamma)\phi^2(x)$$

因此，原点是扰动系统的全局一致渐近稳定平衡点。◀

与指数稳定性情况相比，要注意的重要区别是：如果一个标称系统的原点是一致渐近稳定的，但不是指数稳定的，那么即使扰动具有如式(4.10)所示的线性增长上界，而且即使常数 γ 可以非常小，系统对扰动依然不具备鲁棒性。下面的例子将说明这个事实。

例 4.7 考虑上例中的标量系统，扰动为 $g=\gamma x$，其中 $\gamma>0$，即

$$\dot{x}=-x^3+\gamma x$$

将上述系统线性化就可以看出，对于任何 $\gamma>0$，原点都是不稳定的。◀

84

4.3 有界性与终极有界性

考虑标量方程

$$\dot{x} = -x + \delta\sin t, \quad x(t_0) = a, \quad a > \delta > 0$$

该方程无平衡点，对所有 $t \geqslant t_0$，解为

$$x(t) = \mathrm{e}^{-(t-t_0)}a + \delta\int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-(t-\tau)}\sin\tau\mathrm{d}\tau$$

此解存在上界

$$|x(t)| \leqslant \mathrm{e}^{-(t-t_0)}a + \delta\int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-(t-\tau)}\mathrm{d}\tau = \mathrm{e}^{-(t-t_0)}a + \delta[1-\mathrm{e}^{-(t-t_0)}] \leqslant a$$

因此，解对 t_0 一致有界，即存在与 t_0 无关的上界。而且此上界对所有 $t \geqslant t_0$ 都成立，由于存在按指数衰减的项，因此对 t 来讲这个上界必然是解的保守估计。另一方面，对任意选定的实数 b，它满足 $\delta < b < a$，则易看出，

$$|x(t)| \leqslant b, \quad \forall t \geqslant t_0 + \ln\frac{(a-\delta)}{(b-\delta)}$$

上界 b 依然与 t_0 无关，但是它给出了在暂态过程后对(稳态)解的更好估计。这种情况称为解是一致终极有界的，b 称为一个终极边界。

下列定义正式给出 n 维系统解的有界性及终极有界性的概念。考虑

$$\dot{x} = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0 \tag{4.13}$$

其中，$t_0 \geqslant 0$，f 是分段连续函数，且对所有 $t \geqslant 0$，关于 x，在 $x \in D$ 上是局部 Lipschitz 的，其中区域 $D \subset R^n$ 包含原点。

定义 4.3 考虑系统式(4.13)：

- 如果存在一个与 t_0 无关的数 $c>0$，对于每个 $a \in (0, c)$，存在与 t_0 无关的 $\beta>0$，使得

$$\|x(t_0)\| \leqslant a \Rightarrow \|x(t)\| \leqslant \beta, \quad \forall t \geqslant t_0 \tag{4.14}$$

  则称系统式(4.13)的解是一致有界的；
- 如果式(4.14)对任意大的 a 都成立，则系统的解是全局一致有界的；
- 如果存在与 t_0 无关的正常数 b 和 c，对每个 $a \in (0, c)$，存在 $T \geqslant 0$，T 可能与 a 和 b 有关，但与 t_0 无关，满足

$$\|x(t_0)\| \leqslant a \Rightarrow \|x(t)\| \leqslant b, \quad \forall t \geqslant t_0 + T \tag{4.15}$$

  则系统的解是一致终极有界的，b 称为一个终极边界；
- 如果式(4.15)对任意大的 a 都成立，则系统的解是全局一致终极有界的。

85

在时不变系统的情况中，我们不用“一致”一词，因为时不变系统的解仅与 $t-t_0$ 有关。

Lyapunov 分析法可用于研究 $\dot{x}=f(t, x)$的解的有界性和终极有界性。设 $V(x)$是一个连续可微的正定函数，并假设对于某个 $c>0$，$\{V(x) \leqslant c\}$是紧集。再设 $\varepsilon < c$ 也是正常数，记 $\Lambda = \{\varepsilon \leqslant V(x) \leqslant c\}$。假设 V 沿着系统 $\dot{x}=f(t, x)$轨线的导数满足

$$\dot{V}(t,x) \leqslant -W_3(x) < 0, \quad \forall x \in \Lambda, \quad \forall t \geqslant 0 \tag{4.16}$$

其中，$W_3(x)$是一个连续正定函数。不等式(4.16)表明，集合$\Omega_c = \{V(x) \leqslant c\}$ 和 $\Omega_\varepsilon = \{V(x) \leqslant \varepsilon\}$是两个正不变集，因为在边界 $\partial\Omega_c$ 和 $\partial\Omega_\varepsilon$ 上，导数 $\dot{V}$ 为负。图 4.1 是集合 Λ、Ω_c 和Ω_ε 关系的示意图。由于 $\dot{V}$ 在 Λ 内为负，始于 Λ 内的轨线一定沿着 $V(x(t))$减小的方向运动。实际上，在 Λ 内，可以认为 V 满足定理 4.1 的不等式(4.2)与定理 4.2 的不等式(4.4)，这个

特征与在原点是一致渐近稳定的理论很类似，故存在$\mathcal{KL}$类函数β，使得

$$\|x(t)\| \leqslant \beta(\|x(t_0)\|, t-t_0)$$

函数$V(x(t))$将连续递减，轨线在有限时间内进入Ω_ε，且以后始终保持在其内。轨线在有限时间内进入Ω_ε内可证明如下：设$k=\min_{x\in\Lambda} W_3(x)>0$，由于$W_3(x)$连续且$\Lambda$为紧集，所以最小值存在；又由于$W_3(x)$为正定的，所以最小值为正。于是

$$\dot{V}(t,x) \leqslant -k, \quad \forall x \in \Lambda, \quad \forall t \geqslant t_0$$

因此，

$$V(x(t)) \leqslant V(x(t_0)) - k(t-t_0) \leqslant c - k(t-t_0)$$

上式表明$V(x(t))$在有限时间区间$\left[t_0, \dfrac{t_0+(c-\varepsilon)}{k}\right]$内减小到$\varepsilon$。

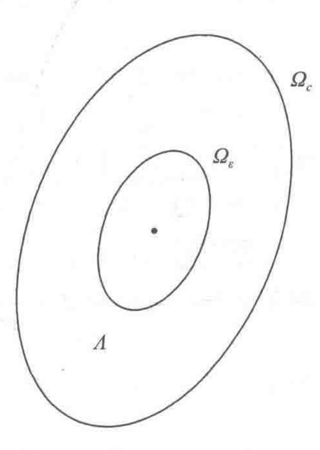


图 4.1　集合Λ、Ω_ε和Ω_c

在许多问题中，$\dot{V}\leqslant -W_3$是利用范数不等式得到的，在这种情况下

$$\dot{V}(t,x) \leqslant -W_3(x), \quad \forall x \in D \quad \text{同时} \quad \|x\| \geqslant \mu, \quad \forall t \geqslant 0 \tag{4.17}$$

如果μ充分小，可选取c与ε使得集合Λ非空且包含于$D\cap\{\|x\|\geqslant\mu\}$内。特别地，令$\alpha_1$和$\alpha_2$为$\mathcal{K}$类函数，对所有$x\in D$满足[⊖]

$$\alpha_1(\|x\|) \leqslant V(x) \leqslant \alpha_2(\|x\|) \tag{4.18}$$

根据式(4.18)的左边的不等式，有

$$V(x) \leqslant c \Rightarrow \alpha_1(\|x\|) \leqslant c$$

86

因此，可以取$c>0$使得$\Omega_c=\{V(x)\leqslant c\}$为紧集并包含于$D$内。特别地，如果$B_r\subset D$，$c$可取为$\alpha_1(r)$。根据式(4.18)右边的不等式，有

$$\|x\| \leqslant \mu \Rightarrow V(x) \leqslant \alpha_2(\mu)$$

取$\varepsilon=\alpha_2(\mu)$即保证$B_\mu\subset\Omega_\varepsilon$。为了得到$\varepsilon<c$，必须有$\mu<\alpha_2^{-1}(c)$。前面论证说明了所有始于$\Omega_c$内的轨线都在有限时间$T$内进入$\Omega_\varepsilon$。为了计算$x(t)$上的终极边界，利用式(4.18)左边的不等式可写出

$$V(x) \leqslant \varepsilon \Rightarrow \alpha_1(\|x\|) \leqslant \varepsilon = \alpha_2(\mu) \Rightarrow \|x\| \leqslant \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu))$$

因此，终极边界可取为$b=\alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu))$。集合$\Omega_c$、$\Omega_\varepsilon$以及$B_\mu$和$B_b$的示意图在图 4.2 中给出。

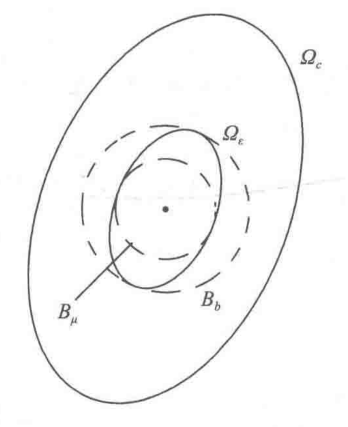


图 4.2　集合Ω_ε、Ω_c(实线)以及B_μ和B_b(虚线)

如果$D=R^n$且$V(x)$为径向无界的，则α_1和α_2都可选为$\mathcal{K}_\infty$类函数，此时$\alpha_2^{-1}\circ\alpha_1$也为$\mathcal{K}_\infty$类函数。选取$c$足够大，对任意$\mu>0$满足不等式$\mu<\alpha_2^{-1}(c)$，并且集合$\{V(x)\leqslant c\}$包含所有要考察的初始状态。上述讨论可总结为下面的定理。

定理 4.4　设$D\subset R^n$为包含B_μ的区域，$V(x)$为连续可微函数，满足

$$\alpha_1(\|x\|) \leqslant V(x) \leqslant \alpha_2(\|x\|) \tag{4.19}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}f(t,x) \leqslant -W_3(x), \quad \forall x \in D \quad \text{同时} \quad \|x\| \geqslant \mu, \quad \forall t \geqslant 0 \tag{4.20}$$

其中，α_1和α_2是$\mathcal{K}$类函数，$W_3(x)$是连续正定函数。取$c>0$使紧集$\Omega_c=\{V(x)\leqslant c\}$包含于

87

⊖　根据引理 4.2，总可以找到这样的$\mathcal{K}$类函数。

D 内，并假设 $\mu<\alpha_2^{-1}(c)$。那么，Ω_c 是系统(4.13)的正不变集，且存在$\mathcal{KL}$类函数 β 使得对每个初始状态 $x(t_0)\in\Omega_c$，方程(4.13)的解满足

$$\|x(t)\|\leqslant\max\{\beta(\|x(t_0)\|,t-t_0),\alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu))\},\quad\forall t\geqslant t_0\tag{4.21}$$

如果 $D=R^n$ 且 $V(x)$ 为径向无界，则式(4.21)对任意初始状态 $x(t_0)$ 和任意的 μ 都成立。

不等式(4.21)说明对所有 $t\geqslant t_0$，$x(t)$ 是一致有界的，且是一致终极有界的，终极边界为 $\alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu))$。终极边界是 μ 的$\mathcal{K}$类函数，因此，μ 取值越小，终极边界越小。当 $\mu\to 0$ 时，终极边界趋于零。

例 4.8 在附录 A.2 节中研究了一个具有硬弹簧、线性粘性阻尼并施加了周期外力的弹簧系统，它的运动可用以下微分方程表示

$$m\ddot{y}+c\dot{y}+ky+ka^2y^3=A\cos\omega t$$

取 $x_1=y$，$x_2=\dot{y}$，并在固定几个常数的数值后，将系统写成状态模型：

$$\dot{x}_1=x_2,\quad\dot{x}_2=-(1+x_1^2)x_1-x_2+M\cos\omega t$$

其中，$M\geqslant 0$ 与周期外力的幅值成正比。当 $M=0$ 时，系统在原点有一个平衡点。例 3.7 证明原点是全局渐近稳定的，且取 Lyapunov 函数为[⊖]

$$\begin{aligned}V(x)&=x^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&1\end{bmatrix}x+2\int_0^{x_1}(y+y^3)\mathrm{d}y=x^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&1\end{bmatrix}x+x_1^2+\frac{1}{2}x_1^4\\&=x^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&1\end{bmatrix}x+\frac{1}{2}x_1^4\overset{\mathrm{def}}{=\!=}x^{\mathrm{T}}Px+\frac{1}{2}x_1^4\end{aligned}$$

当 $M>0$ 时，应用定理 4.4，将 $V(x)$ 作为备选 Lyapunov 函数，则函数 $V(x)$ 正定且径向无界。根据不等式

$$\lambda_{\min}(P)\|x\|^2\leqslant x^{\mathrm{T}}Px\leqslant V(x)\leqslant x^{\mathrm{T}}Px+\frac{1}{2}\|x\|^4\leqslant\lambda_{\max}(P)\|x\|^2+\frac{1}{2}\|x\|^4$$

取 $\alpha_1(r)=\lambda_{\min}(P)r^2$ 和 $\alpha_2(r)=\lambda_{\max}(P)r^2+\frac{1}{2}r^4$，这时 $V(x)$ 在全局范围内都满足不等式(4.19)。V 沿系统轨线的导数为

$$\dot{V}=-x_1^2-x_1^4-x_2^2+(x_1+2x_2)M\cos\omega t\leqslant-\|x\|^2-x_1^4+M\sqrt{5}\|x\|$$

[88] 上式把 (x_1+2x_2) 写为 $y^{\mathrm{T}}x$，并利用了不等式 $|y^{\mathrm{T}}x|\leqslant\|x\|\|y\|$。为了满足式(4.20)，对于较大的 $\|x\|$，我们想要用 $-\|x\|^2$ 控制住 $M\sqrt{5}\|x\|$。为此，将不等式改写为

$$\dot{V}\leqslant-(1-\theta)\|x\|^2-x_1^4-\theta\|x\|^2+M\sqrt{5}\|x\|$$

其中，$0<\theta<1$，则

$$\dot{V}\leqslant-(1-\theta)\|x\|^2-x_1^4,\quad\forall\|x\|\geqslant\frac{M\sqrt{5}}{\theta}$$

上式说明：取 $\mu=\frac{M\sqrt{5}}{\theta}$，不等式(4.20)全局满足。因此，系统的解是全局一致终极有界的，终极边界为

⊖ 例 3.7 中的常数 δ 和 k 分别取 $\delta=2$ 和 $k=\frac{1}{2}$。

$$b=\alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu))=\sqrt{\frac{\alpha_2(\mu)}{\lambda_{\min}(P)}}=\sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)\mu^2+\frac{\mu^4}{2}}{\lambda_{\min}(P)}}$$ ◀

下一个定理是定理 4.4 的特殊情况，这种情况在具体问题中非常有用。

定理 4.5 假如定理 4.4 的条件成立，且存在正常数 c_1、c_2 和 c_3 使得下列不等式成立：

$$c_1\|x\|^2\leqslant V(x)\leqslant c_2\|x\|^2 \tag{4.22}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}f(t,x)\leqslant -c_3\|x\|^2,\quad \forall x\in D\cap\{\|x\|\geqslant\mu\},\quad \forall t\geqslant 0 \tag{4.23}$$

其中，$\mu<\sqrt{\frac{c}{c_2}}$。那么，集合 $\Omega_c=\{V(x)\leqslant c\}$ 是系统式(4.13)的正不变集，且对每一个初始状态 $x(t_0)\in\Omega_c$，$V(x(t))$ 和 $\|x(t)\|$ 分别满足不等式：

$$V(x(t))\leqslant\max\{V(x(t_0))\mathrm{e}^{-\left(\frac{c_3}{c_2}\right)(t-t_0)},c_2\mu^2\},\quad \forall t\geqslant t_0 \tag{4.24}$$

$$\|x(t)\|\leqslant\sqrt{\frac{c_2}{c_1}}\max\{\|x(t_0)\|\mathrm{e}^{-\left(\frac{c_3}{c_2}\right)\frac{(t-t_0)}{2}},\mu\},\quad \forall t\geqslant t_0 \tag{4.25}$$

如果定理条件全局成立，则不等式(4.24)和(4.25)对任意初始状态 $x(t_0)$ 和任意的 μ 都成立。

证明： 除了$\mathcal{KL}$类函数 β 的显式表达外，不等式(4.25)可根据定理 4.4 导出。当 $c_2\mu^2\leqslant V\leqslant c$ 时，$\dot V$ 满足不等式 $\dot V\leqslant -\left(\frac{c_3}{c_2}\right)V$。通过积分可得出 $V(x(t))\leqslant V(x(t_0))\mathrm{e}^{-\left(\frac{c_3}{c_2}\right)(t-t_0)}$。在 $x(t)$ 进入正不变集 $\{V(x)\leqslant c_2\mu^2\}$ 之前，这个不等式都成立，进入 $\{V(x)\leqslant c_2\mu^2\}$ 后，有 $V(x(t))\leqslant c_2\mu^2$。从而不等式(4.24)成立。利用不等式(4.22)，不等式(4.25)可由式(4.24)导出。 □

89

例 4.9 考虑系统

$$\dot x_1=x_2,\quad \dot x_2=-x_1+\frac{1}{3}x_1^3-x_2+u(t)$$

其中，对所有 $t\geqslant 0$，$|u(t)|\leqslant d$ 为有界输入。当 $u=0$ 时，例 3.7 证明了原点是渐近稳定的，且 Lyapunov 函数可以取为

$$V(x)=\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}k & k\\ k & 1\end{bmatrix}x+\int_0^{x_1}h(y)\mathrm{d}y$$

其中，$0<k<1$ 且 $h(y)=y-\frac{1}{3}y^3$。为了满足式(4.22)，下面的分析仅限于集合 $\{|x_1|\leqslant 1\}$ 内，在这个集合内成立

$$\frac{2}{3}x_1^2\leqslant x_1h(x_1)\leqslant x_1^2,\quad \frac{5}{12}x_1^2\leqslant\int_0^{x_1}h(y)\mathrm{d}y\leqslant\frac{1}{2}x_1^2$$

因此，$V(x)$ 满足 $x^{\mathrm{T}}P_1x\leqslant V(x)\leqslant x^{\mathrm{T}}P_2x$，其中，

$$P_1=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}k+\frac{5}{6} & k\\ k & 1\end{bmatrix},\quad P_2=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}k+1 & k\\ k & 1\end{bmatrix}$$

取 $c_1=\lambda_{\min}(P_1)$ 和 $c_2=\lambda_{\max}(P_2)$，则式(4.22)成立。V 的导数为

$$\begin{aligned}\dot V&=-kx_1h(x_1)-(1-k)x_2^2+(kx_1+x_2)u(t)\\ &\leqslant -\frac{2}{3}kx_1^2-(1-k)x_2^2+|kx_1+x_2|d\end{aligned}$$

取$\frac{2}{3}k=1-k\Rightarrow k=\frac{3}{5}$。得到 $c_1=0.2894$，$c_2=0.9854$，且

$$\dot{V}\leqslant-\frac{2}{5}\|x\|^2+\sqrt{1+\left(\frac{3}{5}\right)^2}\|x\|d\leqslant-\frac{0.2}{5}\|x\|^2,\quad \forall\|x\|\geqslant 3.2394d \stackrel{\text{def}}{=\!=}\mu$$

这里将$-\frac{2}{5}\|x\|^2$改写为$-(1-\theta)\frac{2}{5}\|x\|^2-\theta\frac{2}{5}\|x\|^2$，其中 $\theta=0.9$，并利用$-\theta\frac{2}{5}\|x\|^2$控制$\|x\|$的线性项。设 $c=\min\limits_{|x_1|=1}V(x)=0.5367$，则 $\Omega_c=\{V(x)\leqslant c\}\subset\{|x_1|\leqslant 1\}$。为了满足条件 $\mu<\sqrt{\frac{c}{c_2}}$，需要 $d<0.2278$。现在定理 4.5 的条件和不等式(4.24)及不等式(4.25)对所有 $x(0)\in\Omega_c$ 都成立。终极边界为 $b=\mu\sqrt{\frac{c_2}{c_1}}=5.9775d$。

定理 4.4 和定理 4.5 在研究形如式(4.26)的扰动系统中有着重要的作用：

$$\dot{x}=f(x)+g(t,x)\tag{4.26}$$

其中，原点是标称系统 $\dot{x}=f(x)$的渐近稳定平衡点。在 4.1 节中考虑过 $g(t,0)=0$ 时的扰动系统，得出了原点是扰动系统的渐近稳定平衡点的条件。当 $g(t,0)\neq 0$ 时，原点不再是扰动系统的平衡点，因而不能期望当 $t\to\infty$时它的解趋于零。如果扰动项 $g(t,x)$在某种意义下很小，则我们能够期望的最好结果是 $x(t)$为终极有界，且上界值很小。我们从标称系统是指数稳定的情况开始分析。 ◀

90

引理 4.3 考虑扰动系统 $\dot{x}=f(x)+g(t,x)$，其中，对 $t\geqslant 0$ 和 $x\in B_r$，f 和 g 对 x 都是局部 Lipschitz 函数，g 对 t 分段连续。设原点是标称系统 $\dot{x}=f(x)$的一个指数稳定平衡点，$V(x)$为它的 Lyapunov 函数，并假设不等式[⊖]

$$c_1\|x\|^2\leqslant V(x)\leqslant c_2\|x\|^2,\quad \frac{\partial V}{\partial x}f(x)\leqslant -c_3\|x\|^2,\quad \left\|\frac{\partial V}{\partial x}\right\|\leqslant c_4\|x\|\tag{4.27}$$

对所有 $x\in B_r$ 成立，其中 c_i，$i=1,2,3,4$ 为正常数。假设

$$\|g(t,x)\|\leqslant\delta<\frac{c_3}{c_4}\sqrt{\frac{c_1}{c_2}}\theta r\tag{4.28}$$

对所有 $t\geqslant 0$ 和 $x\in B_r$ 成立，其中 $\theta<1$ 为正常数，那么，对所有 $x(t_0)\in\{V(x)\leqslant c_1r^2\}$，扰动系统的解 $x(t)$满足

$$\|x(t)\|\leqslant\max\{k\exp[-\gamma(t-t_0)]\|x(t_0))\|,b\},\quad \forall t\geqslant t_0\tag{4.29}$$

其中，

$$k=\sqrt{\frac{c_2}{c_1}},\quad \gamma=\frac{(1-\theta)c_3}{2c_2},\quad b=\frac{\delta c_4}{\theta c_3}\sqrt{\frac{c_2}{c_1}}$$

证明： 我们用 $V(x)$作为扰动系统的备选 Lyapunov 函数，则有

$$\begin{aligned}\dot{V}(t,x)&=\frac{\partial V}{\partial x}f(x)+\frac{\partial V}{\partial x}g(t,x)\\&\leqslant -c_3\|x\|^2+\left\|\frac{\partial V}{\partial x}\right\|\|g(t,x)\|\\&\leqslant -c_3\|x\|^2+c_4\delta\|x\|\\&=-(1-\theta)c_3\|x\|^2-\theta c_3\|x\|^2+c_4\delta\|x\|,\quad 0<\theta<1\end{aligned}$$

⊖ 当 f 连续可微时，V 的存在性可由定理 3.8 保证。

$$\leqslant -(1-\theta)c_3\|x\|^2,\quad \forall \|x\| \geqslant \frac{\delta c_4}{\theta c_3}$$

应用定理4.5即可完成证明。 □

引理4.3中的终极上界b与δ(扰动的上界)成正比。这个结果可看成在原点具有指数稳定平衡点的标称系统的鲁棒特性，因为它说明任意小(一致有界)的扰动不会导致与原点很大的稳态偏差。

例4.10 考虑二维系统

$$\dot{x}_1 = x_2,\quad \dot{x}_2 = -4x_1 - 2x_2 + \beta x_2^3 + d(t)$$

91

其中，$\beta \geqslant 0$为未知参数，$d(t)$是一致有界的干扰，即存在常数δ，使得对于所有$t \geqslant 0$成立$|d(t)| \leqslant \delta$。除了附加扰动项$d(t)$之外，本例与例4.5讨论的系统相同。同样，这个系统也可看成是标称线性系统的扰动系统。标称系统有一个Lyapunov函数为

$$V(x) = x^{\mathrm{T}}Px = x^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{5}{16} \end{bmatrix}x$$

采用$V(x)$为扰动系统的备选Lyapunov函数，但处理两个扰动项βx_2^3和$d(t)$的方法有所不同，由于第一项在原点处为零，而第二项不为零。在紧集$\Omega_c = \{x^{\mathrm{T}}Px \leqslant c\}$上，计算$V(x)$沿扰动系统轨线的导数，得到

$$\begin{aligned}\dot{V}(t,x) &= -\|x\|^2 + 2\beta x_2^2\left(\frac{1}{8}x_1x_2 + \frac{5}{16}x_2^2\right) + 2d(t)\left(\frac{1}{8}x_1 + \frac{5}{16}x_2\right) \\ &\leqslant -\|x\|^2 + \frac{\sqrt{29}}{8}\beta k_2^2\|x\|^2 + \frac{\sqrt{29}\delta}{8}\|x\|\end{aligned}$$

其中，$k_2 = \max_{x\in\Omega_c}|x_2| = 1.8194\sqrt{c}$。假设$\beta \leqslant \frac{8(1-\zeta)}{(\sqrt{29}k_2^2)}$，其中$0<\zeta<1$，则

$$\dot{V}(t,x) = -\zeta\|x\|^2 + \frac{\sqrt{29}\delta}{8}\|x\| \leqslant -(1-\theta)\zeta\|x\|^2,\quad \forall \|x\| \geqslant \mu = \frac{\sqrt{29}\delta}{8\zeta\theta}$$

其中，$0<\theta<1$。因而，如果$\beta \leqslant \frac{0.448(1-\zeta)}{c}$和$\delta$足够小，就可使得$\mu^2\lambda_{\max}(P)<c$，这时$B_\mu \subset \Omega_c$，且所有始于$\Omega_c$内的轨线以后始终保持在$\Omega_c$内。而且，在$\Omega_c$内定理4.5的条件满足，因此扰动系统的解是一致终极有界的，上界为

$$b = \frac{\sqrt{29}\delta}{8\zeta\theta}\sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}}$$

◀

对于更为一般的情况，即当原点$x=0$是标称系统$\dot{x}=f(x)$的一个一致渐近稳定平衡点，而不是指数稳定平衡点的时候，可以用类似的方法来分析扰动系统。

引理4.4 *考虑扰动系统$\dot{x}=f(x)+g(t,x)$，其中，对所有$t \geqslant 0$和$x \in B_r$，f和g对x都是局部Lipschitz函数，且g对t是分段连续的。设原点是标称系统$\dot{x}=f(x)$的一个渐近稳定平衡点，$V(x)$为它的Lyapunov函数，即对所有$x \in B_r$成立不等式*[⊖]

$$\alpha_1(\|x\|) \leqslant V(x) \leqslant \alpha_2(\|x\|),\quad \frac{\partial V}{\partial x}f(x) \leqslant -\alpha_3(\|x\|),\quad \left\|\frac{\partial V}{\partial x}(x)\right\| \leqslant k \tag{4.30}$$

92

其中，α_i，$i=1,2,3$为$\mathcal{K}$类函数。设对所有$t \geqslant 0$和$x \in B_r$，扰动项$g(t,x)$一致有界，即成立

⊖ 满足不等式的Lyapunov函数的存在性由定理3.9和引理4.2保证。

$$\|g(t,x)\| \leqslant \delta < \frac{\theta\alpha_3(\alpha_2^{-1}(\alpha_1(r)))}{k} \tag{4.31}$$

其中，$\theta<1$ 是正常数，则对所有 $x(t_0)\in\{V(x)\leqslant\alpha_1(r)\}$，扰动系统 $x(t)$ 的解满足

$$\|x(t)\| \leqslant \max\{\beta(\|x(t_0)\|, t-t_0), \rho(\delta)\}, \quad \forall\, t\geqslant t_0$$

其中，β 是$\mathcal{KL}$类函数，ρ 是$\mathcal{K}$类函数，$\rho(\delta)$ 定义为

$$\rho(\delta) = \alpha_1^{-1}\left(\alpha_2\left(\alpha_3^{-1}\left(\frac{\delta k}{\theta}\right)\right)\right)$$

证明： $V(x)$ 沿扰动系统轨线的导数满足

$$\begin{aligned}
\dot V(t,x) &= \frac{\partial V}{\partial x}f(x) + \frac{\partial V}{\partial x}g(t,x)\\
&\leqslant -\alpha_3(\|x\|) + \left\|\frac{\partial V}{\partial x}\right\|\|g(t,x)\|\\
&\leqslant -\alpha_3(\|x\|) + \delta k\\
&\leqslant -(1-\theta)\alpha_3(\|x\|) - \theta\alpha_3(\|x\|) + \delta k, \quad 0<\theta<1\\
&\leqslant -(1-\theta)\alpha_3(\|x\|), \quad \forall\, \|x\| \geqslant \alpha_3^{-1}\left(\frac{\delta k}{\theta}\right)
\end{aligned}$$

应用定理 4.4，结论可得。 □

引理 4.4 看上去与引理 4.3 类似，但有着重要的区别。在指数稳定性情况下，要求 δ 满足式(4.28)。式(4.28)具有性质：当 $r\to\infty$ 时，右边趋于∞。因此，如果引理 4.3 的条件全局成立，就可以得出：对于所有一致有界的干扰，扰动系统的解是一致有界的。这是因为，对于任意 δ 总可以选择足够大的 r 以满足式(4.28)。但在渐近稳定性情况下，引理 4.4 只要求 δ 满足式(4.31)，没有更多关于$\mathcal{K}$类函数的信息，也不知 k 是如何依赖 r 的，因此我们不能得出这样的结论：一致有界扰动将产生与扰动大小无关有界解，即使标称系统在原点具有一致渐近稳定的平衡点。下面的例子将用来说明这一点。

例 4.11 考虑标量系统 $\dot x = -\dfrac{x}{1+x^2}$，其原点是全局渐近稳定的。有 Lyapunov 函数 $V(x)=x^4$，则它在 B_r 上满足不等式(4.30)，可以具体写出

$$\alpha_1(|x|) = \alpha_2(|x|) = |x|^4; \quad \alpha_3(|x|) = \frac{4|x|^4}{1+|x|^2}; \quad k = 4r^3$$

93

式(4.31)的右边为

$$\frac{\theta\alpha_3(\alpha_2^{-1}(\alpha_1(r)))}{k} = \frac{\theta r}{1+r^2} < \frac{1}{2}$$

现在考虑扰动系统 $\dot x = -\dfrac{x}{1+x^2}+\delta$，其中 $\delta>\dfrac{1}{2}$ 为常数。扰动系统的右边总是正的，因而对任意初始状态 $x(0)$，$x(t)$ 将趋向无穷。 ◀

4.4 输入-状态稳定性

考虑系统

$$\dot x = f(x,u) \tag{4.32}$$

其中，f 对 x 和 u 都是局部 Lipschitz 的。输入 $u(t)$ 定义在 $t\geqslant 0$ 上，并为 t 的分段连续有界函数。假设无控制系统

$$\dot{x} = f(x,0) \tag{4.33}$$

在原点 $x=0$ 处有全局渐近稳定平衡点。在有界输入 $u(t)$ 的激励下，系统式(4.32)的性能会如何呢？

考虑线性系统

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

其中，A 为 Hurwitz 矩阵，可以写出系统的解为

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{(t-\tau)A}Bu(t)d\tau$$

利用 $\|e^{(t-t_0)A}\| \leqslant ke^{-\lambda(t-t_0)}$ 来估计解，有

$$\begin{aligned}\|x(t)\| &\leqslant ke^{-\lambda(t-t_0)}\|x(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} ke^{-\lambda(t-\tau)}\|B\|\|u(\tau)\|d\tau \\ &\leqslant ke^{-\lambda(t-t_0)}\|x(t_0)\| + \frac{k\|B\|}{\lambda}\sup_{t_0\leqslant\tau\leqslant t}\|u(\tau)\|\end{aligned}$$

这个估计表明零输入响应按指数规律快速衰减到零，而零状态响应对于每个有界的输入都是有界的。实际上，此估计值不仅说明有界输入-有界输出的特性，还说明零状态响应的上界与输入上界成正比。对于非线性系统 $\dot{x}=f(x, u)$ 这一特性又如何呢？对一般的非线性系统，可以想象这些特性将不再成立，即使当无控制系统的原点是全局渐近稳定的。例如，考虑标量系统

$$\dot{x} = -3x + (1 + 2x^2)u$$

94

当 $u=0$ 时，原点是全局指数稳定的。然而，当 $x(0)=2$ 和 $u(t)=1$ 时，解 $x(t)=\dfrac{(3-e^t)}{(3-2e^t)}$ 是无界的，甚至它在有限时间内即趋向无穷。

我们把系统 $\dot{x}=f(x, u)$ 看成是无控制系统 $\dot{x}=f(x, 0)$ 的扰动。假设无控制系统具有 Lyapunov 函数 $V(x)$，并计算 $V(x(t))$ 在出现 u 时的导数。由于 u 的有界性，似乎可能在某些条件下 $\dot{V}$ 在半径为 μ 的球外是负的，其中 μ 依赖于 $\sup\|u\|$。这是我们希望得到的结果。例如，设函数 $f(x, u)$ 满足 Lipschitz 条件

$$\|f(x,u) - f(x,0)\| \leqslant L\|u\| \tag{4.34}$$

我们应用定理 4.4 来证明，$\dot{V}$ 在半径为 μ 的球外为负，这样由定理 4.4 可得

$$\|x(t)\| \leqslant \max\{\beta(\|x(t_0)\|, t-t_0), \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu))\}, \quad \forall t \geqslant t_0$$

其中，β 是$\mathcal{KL}$类函数，而且 $\alpha_1^{-1}\circ\alpha_2$ 是$\mathcal{K}$类函数。由此引出输入-状态稳定性的定义[⊖]。

定义 4.4　如果存在一个$\mathcal{KL}$类函数 β 和一个$\mathcal{K}$类函数 γ，使得对于任何初始状态 $x(t_0)$ 和有界输入 $u(t)$，解 $x(t)$ 对于所有 $t_0 \geqslant 0$ 都存在，且满足

$$\|x(t)\| \leqslant \max\{\beta(\|x(t_0)\|, t-t_0), \gamma(\sup_{t_0\leqslant\tau\leqslant t}\|\mu(\tau)\|)\}, \quad \forall t \geqslant t_0 \tag{4.35}$$

那么系统 $\dot{x}=f(x, u)$ 是输入-状态稳定的。

如果系统 $\dot{x}=f(x, u)$ 是输入-状态稳定的，则它具有以下性质：

- 对任意有界输入 $u(t)$，状态 $x(t)$ 是有界的；
- $x(t)$ 的终极上界为 $\gamma(\sup_{t_0\leqslant\tau\leqslant t}\|u(\tau)\|)$；
- 如果当 $t\to\infty$ 时 $u(t)$ 收敛于零，则状态 $x(t)$ 也随 $t\to\infty$ 而收敛于零；

⊖ 文献[131]引入了输入-状态稳定性；更多结果见文献[133]。等价定义形式为 $\|x(t)\| \leqslant \beta(\|x(t_0)\|, t-t_0) + \gamma(\sup_{t_0\leqslant\tau\leqslant t}\|u(\tau)\|)$。

● 无控制系统 $\dot{x}=f(x,0)$ 的原点是全局渐近稳定的。

下面的类 Lyapunov 定理给出了输入-状态稳定性的一个充分条件[⊖]。

定理 4.6 假设对于所有 $x\in R^n$ 和 $u\in R^m$，$f(x,u)$ 对 (x,u) 是局部 Lipschitz 的。设 $V(x)$ 是连续可微函数，对所有 $x\in R^n$ 和 $u\in R^m$，式(4.36)和式(4.37)成立：

95

$$\alpha_1(\|x\|)\leqslant V(x)\leqslant\alpha_2(\|x\|) \tag{4.36}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}=f(x,u)\leqslant -W_3(x),\text{当}\|x\|\geqslant\rho(\|u\|)\text{时} \tag{4.37}$$

其中，α_1 和 α_2 是 $\mathcal{K}_\infty$ 类函数，ρ 是 $\mathcal{K}$ 类函数，而 $W_3(x)$ 是 R^n 上的连续正定函数。则系统

$$\dot{x}=f(x,u)$$

是输入-状态稳定的，且 $\gamma=\alpha_1^{-1}\circ\alpha_2\circ\rho$。

证明： 设 $\mu=\rho(\sup_{\tau\geqslant t_0}\|u(\tau)\|)$，运用定理 4.4 关于全局稳定的相应结论可得，对任意 $x(t_0)$ 和任意有界 $u(t)$，解 $x(t)$ 存在并满足

$$\|x(t)\|\leqslant\max\{\beta(\|x(t_0)\|,t-t_0),\gamma(\sup_{\tau\geqslant t_0}\|u(\tau)\|)\},\quad\forall t\geqslant t_0 \tag{4.38}$$

由于当 $t_0\leqslant\tau\leqslant t$ 时，$x(t)$ 仅取决于 $u(\tau)$，在 $[t_0,t]$ 上取式(4.38)右边的上确界，即得式(4.35)。 □

下一引理是关于全局指数稳定性的 Lyapunov 逆定理(定理 3.8)的一个直接结果[⊜]。

引理 4.5 假设 $f(x,u)$ 关于 (x,u) 是连续可微的，且是全局 Lipschitz 的。如果系统 $\dot{x}=f(x,0)$ 在原点有全局指数稳定的平衡点，那么系统 $\dot{x}=f(x,u)$ 是输入-状态稳定的。

在没有全局指数稳定性或不存在全局 Lipschitz 函数的情况下，仍可以用定理 4.6 来说明输入-状态的稳定性。下面的三个例子将给出它的应用。

例 4.12 当 $u=0$ 时，系统 $\dot{x}=-x^3+u$ 有全局渐近稳定的原点。取 $V=\frac{1}{2}x^2$ 及 $0<\theta<1$，可得

$$\dot{V}=-x^4+xu=-(1-\theta)x^4-\theta x^4+xu\leqslant-(1-\theta)x^4,\quad\forall|x|\geqslant\left(\frac{|u|}{\theta}\right)^{\frac{1}{3}}$$

因此，系统是输入-状态稳定的，其中 $\gamma(r)=\left(\frac{r}{\theta}\right)^{\frac{1}{3}}$。 ◀

例 4.13 考虑系统

$$\dot{x}=f(x,u)=-x-2x^3+(1+x^2)u^2$$

当 $u=0$ 时，原点是全局指数稳定的平衡点，但由于 f 不是全局 Lipschitz 函数，所有不能用引理 4.5。取 $V=\frac{1}{2}x^2$，可得

$$\dot{V}=-x^2-2x^4+x(1+x^2)u^2\leqslant-x^4,\quad\forall|x|\geqslant u^2$$

96

因此，系统是输入-状态稳定的，且 $\gamma(r)=r^2$。 ◀

在例 4.12 和例 4.13 中，函数 $V(x)=\frac{1}{2}x^2$ 满足式(4.36)，$\alpha_1(r)=\alpha_2(r)=\frac{1}{2}r^2$，因而，$\alpha_1^{-1}(\alpha_2(r))=r$ 和 $\gamma(r)$ 可简化为 $\rho(r)$。在高维系统中，γ 的计算更为复杂。

⊖ 文献[134]证明满足不等式(4.36)和式(4.37)的函数 V 的存在性也是必要条件。在文献中，通常把输入-状态稳定性简写为 ISS，并把定理 4.6 中的函数 V 称为 ISS-Lyapunov 函数。

⊜ 该引理的证明见文献[74]引理 4.6。

例 4.14 考虑系统

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1^3 - x_2 + u$$

当 $u=0$ 时，利用 Lyapunov 函数 $V(x)=\frac{1}{4}x_1^4+\frac{1}{2}x_2^2$，我们可证明原点是全局渐近稳定的。用 $V(x)$作为定理 4.6 中的备选 Lyapunov 函数，可得：

$$\dot{V} = -x_1^4 + x_2^2 + x_2 u \leqslant -x_1^4 - x_2^2 + |x_2||u|$$

为了用 $-x_1^4-x_2^2$ 去抑制 $|x_2||u|$ 的作用，把上述不等式改写为

$$\dot{V} \leqslant -(1-\theta)[x_1^4 + x_2^2] - \theta x_1^4 - \theta x_2^2 + |x_2||u|$$

其中，$0<\theta<1$。二次函数 $\varphi(x_2) = -\theta x_2^2 + |x_2||u|$ 有最大值 $\frac{u^2}{4\theta}$，而且当 $|x_2| \geqslant \frac{|u|}{\theta}$ 时，$\varphi(x_2) \leqslant 0$。因此，

$$x_1^2 \geqslant \frac{|u|}{2\theta} \quad 或 \quad x_2^2 \geqslant \frac{u^2}{\theta^2} \Rightarrow -\theta x_1^4 - \theta x_2^2 + |x_2||u| \leqslant 0$$

从而

$$\|x\|^2 \geqslant \frac{|u|}{2\theta} + \frac{u^2}{\theta^2} \Rightarrow -\theta x_1^4 - \theta x_2^2 + |x_2||u| \leqslant 0$$

定义$\mathcal{K}$类函数 ρ 为 $\rho(r)=\sqrt{\frac{r}{2\theta}+\frac{r^2}{\theta^2}}$，由此可看出

$$\dot{V} \leqslant -(1-\theta)[x_1^4 + x_2^2], \quad \forall \|x\| \geqslant \rho(|u|)$$

即不等式(4.37)满足。由于 $V(x)$是正定且径向无界的，所以由引理 4.2 可知存在$\mathcal{K}_\infty$类函数 α_1 和 α_2 全局满足不等式(4.36)。因此，系统是输入-状态稳定的。◀

下面的引理将说明输入-状态稳定性的一个有趣性质[⊖]。

引理 4.6 如果系统 $\dot{\eta}=f_1(\eta, \xi)$与 $\dot{\xi}=f_2(\xi, u)$都是输入-状态稳定的，则串联系统

$$\dot{\eta} = f_1(\eta,\xi), \quad \dot{\xi} = f_2(\xi,u)$$

也是输入-状态稳定的。进一步，如果 $\dot{\eta}=f_1(\eta, \xi)$是输入-状态稳定的，而且系统 $\dot{\xi}=f_2(\xi, 0)$的原点是全局渐近稳定的，那么串联系统

$$\dot{\eta} = f_1(\eta,\xi), \quad \dot{\xi} = f_2(\xi)$$

的原点也是全局渐近稳定的。

97

例 4.15 考虑系统

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2^2, \quad \dot{x}_2 = -x_2 + u$$

它可以看成是 $\dot{x}_1=-x_1+x_2^2$ 与 $\dot{x}_2=-x_2+u$ 的串联系统。系统 $\dot{x}_1=-x_1+x_2^2$ 是输入-状态稳定的，由定理 4.6 可看出，有 $V(x_1)=\frac{1}{2}x_1^2$，其导数满足

$$\dot{V} = -x_1^2 + x_1 x_2^2 \leqslant -(1-\theta)x_1^2 \quad 当 \quad |x_1| \geqslant \frac{x_2^2}{\theta} \text{ 时}$$

其中，$0<\theta<1$。根据引理 4.5 可知线性系统 $\dot{x}_2=-x_2+u$ 是输入-状态稳定的。因此，串联系统也是输入-状态稳定的。◀

前面的输入-状态稳定性的概念是对全局情况定义的，即初始状态和输入可以任意地

⊖ 证明见文献[130]。

大。下面将给出局部意义上的定义。

定义 4.5 设$\mathcal{X}\subset R^n$和$\mathcal{U}\subset R^m$分别是以各自原点为内点的有界集合。如果存在$\mathcal{KL}$类函数β和$\mathcal{K}$类函数γ，使得对任意初始状态$x(t_0)\in\mathcal{X}$、任意输入u(u满足对所有$t\geqslant t_0$，$u(t)\in\mathcal{U}$)和对所有$t\geqslant t_0$，解$x(t)$属于$\mathcal{X}$，进一步成立

$$\|x(t)\|\leqslant \max\{\beta(\|x(t_0)\|,t-t_0),\gamma(\sup_{t_0\leqslant\tau\leqslant t}\|u(\tau)\|)\} \tag{4.39}$$

则称系统$\dot{x}=f(x,u)$关于$\mathcal{X}\times\mathcal{U}$是区域输入-状态稳定的。

如果系统$\dot{x}=f(x,u)$关于原点($x=0$，$u=0$)的某个邻域是区域输入-状态稳定的，则称该系统是局部输入-状态稳定的。

定理 4.7 假设函数$f(x,u)$对于所有$x\in B_r$和$u\in B_\lambda$在(x,u)内是局部 Lipschitz 的。设$V(x)$是连续可微函数，并当$x\in B_r$和$u\in B_\lambda$时，对(x,u)满足不等式(4.36)和不等式(4.37)，其中，α_1、α_2和ρ是$\mathcal{K}$类函数，$W_3(x)$是连续正定函数。假设$\alpha_1(r)>\alpha_2(\rho(\lambda))$，并设$\Omega=\{V(x)\leqslant\alpha_1(r)\}$。那么，系统$\dot{x}=f(x,u)$关于$\Omega\times B_\lambda$是区域输入-状态稳定的。式(4.39)中的$\mathcal{K}$类函数$\gamma$可以取成$\gamma=\alpha_1^{-1}\circ\alpha_2\circ\rho$。

98

证明： 选$\mu=\rho(\sup_{t\geqslant t_0}\|u(t)\|)$，应用定理 4.4 即可证明。 □

系统$\dot{x}=f(x,u)$的局部输入-状态稳定性等价于系统$\dot{x}=f(x,0)$的原点是渐近稳定的平衡点，见下面的引理。

引理 4.7 假设函数$f(x,u)$在原点($x=0$，$u=0$)的某个邻域内对(x,u)是局部 Lipschitz 的，当且仅当零输入系统$\dot{x}=f(x,0)$的原点是渐近稳定的平衡点，则系统$\dot{x}=f(x,u)$是局部输入-状态稳定的。

证明： 当$u(t)\equiv 0$时，不等式(4.39)化为$\|x(t)\|\leqslant\beta(\|x(t_0)\|,t-t_0)$，因此系统$\dot{x}=f(x,0)$的原点是渐近稳定的。另一方面，定理 3.9 表明如果系统$\dot{x}=f(x,0)$的原点是渐近稳定的，则存在 Lyapunov 函数$V(x)$使得在原点的某个邻域内满足

$$\frac{\partial V}{\partial x}f(x,0)\leqslant -U(x)$$

其中，$U(x)$是连续正定的。引理 4.2 说明存在$\mathcal{K}$类函数α_1，α_2与α_3，使得$V(x)$满足不等式(4.36)，以及函数$U(x)$满足$U(x)\geqslant\alpha_3(\|x\|)$。$V$关于$\dot{x}=f(x,u)$的导数满足

$$\dot{V}=\frac{\partial V}{\partial x}f(x,0)+\frac{\partial V}{\partial x}[f(x,u)-f(x,0)]\leqslant -\alpha_3(\|x\|)+kL\|u\|$$

其中，k是$\left\|\frac{\partial V}{\partial x}\right\|$的一个上界，$L$是函数$f$关于$u$的 Lipschitz 常数。因此

$$\dot{V}\leqslant -(1-\theta)\alpha_3(\|x\|)-\theta\alpha_3(\|x\|)+kL\|u\|$$

其中，$0<\theta<1$。则

$$\dot{V}\leqslant -(1-\theta)\alpha_3(\|x\|),\quad \forall\|x\|\geqslant\alpha_3^{-1}\left(\frac{kL\|u\|}{\theta}\right)\overset{\text{def}}{=\!=}\rho(\|u\|)$$

在原点($x=0$，$u=0$)的某个邻域内成立。取r和λ充分小，并使得$\alpha_1(r)>\alpha_2(\rho(\lambda))$成立，于是定理 4.7 的条件全部满足。因此，系统$\dot{x}=f(x,u)$是局部输入-状态稳定的。 □

4.5 练习

4.1 考虑线性时不变系统$\dot{x}=[A+B(t)]x$，其中，A是 Hurwitz 矩阵，$B(t)$是分段连续

的。设 P 是 Lyapunov 方程 $PA+A^{T}P=-I$ 的解。证明如果对所有 $t\geqslant 0$，有 $2\|PB(t)\|\leqslant a<1$，则原点是全局指数稳定的。

4.2 分析下面各个系统，确定原点是否为一致稳定、一致渐近稳定、指数稳定或者其他情况。其中的 $g(t)$ 均为分段连续且有界的函数。

(1) $\dot{x}_1=-x_1^3+g(t)x_2$, $\quad\dot{x}_2=-g(t)x_1-x_2$

(2) $\dot{x}_1=-g(t)h(x)$, $\quad$ 其中 $xh(x)\geqslant ax^2\ \forall x$，$a>0$，且 $g(t)\geqslant k>0\ \forall t\geqslant 0$

(3) $\dot{x}_1=g(t)x_2$, $\quad\dot{x}_2=-g(t)x_1$

99

(4) $\dot{x}_1=-g(t)x_1+x_2$, $\quad\dot{x}_2=x_1-x_2$, $\quad g(t)\geqslant 2$，$\forall t\geqslant 0$

(5) $\dot{x}_1=g(t)x_1+x_2$, $\quad\dot{x}_2=-x_1-x_2$, $\quad$ 其中 $|g(t)|\leqslant\frac{1}{4}\ \forall t\geqslant 0$

4.3 考虑线性系统

$$\dot{x}_1=\frac{x_2}{g(t)},\quad \dot{x}_2=-x_1-\frac{x_2}{g(t)}$$

其中，$g(t)=2-e^{-\frac{t}{2}}$。用 $V(t,x)=[1+2g(t)]x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2$ 证明原点是指数稳定的。

4.4 考虑线性系统

$$\dot{x}_1=x_2,\quad \dot{x}_2=-g(t)x_1+2x_2$$

其中，$g(t)$ 是分段连续且有界函数。用 $V(t,x)=[2+g(t)]x_1^2+2x_1x_2+x_2^2$ 证明如果对于所有 $t\geqslant 0$ 有 $g(t)\geqslant 0$ 与 $-2g(t)+\dot{g}(t)\leqslant -a<0$，则原点是指数稳定的。

4.5 设 $g(t)$ 分段连续，且对所有 $t\geqslant 0$ 有 $g(t)\geqslant g_0>0$。证明如果 n 维系统 $\dot{x}=f(x)$ 的原点是渐近稳定的，则 $\dot{x}=g(t)f(x)$ 的原点是一致渐近稳定的。

4.6 考虑系统

$$\dot{x}_1=-x_1+x_2,\quad \dot{x}_2=ax_1-ax_2-g(t)x_2^3$$

其中，a 为正常数，$g(t)$ 分段连续，且对所有 $t\geqslant 0$ 满足 $g(t)\geqslant b>0$。证明原点是全局一致渐近稳定的。

4.7 考虑系统 $\dot{x}=Ax+Bu$ 及镇定控制 $u=-Fx$，其中 $(A-BF)$ 为 Hurwitz 矩阵。假设，由于物理限制，要求 $|u_i(t)|\leqslant L$。因此闭环系统为 $\dot{x}=Ax-BL\text{sat}\left(\frac{Fx}{L}\right)$，其中 $\text{sat}(v)$ 是各元素均为饱和函数的向量。通过加减 BFx，可把闭环系统写成 $\dot{x}=(A-BF)x-Bh(Fx)$，其中 $h(v)=L\text{sat}\left(\frac{v}{L}\right)-v$。因此，限制条件的作用可以看成是标称系统的 $\dot{x}=(A-BF)x$ 的扰动。

(1) 证明 $h_i(v)\leqslant\left[\frac{\delta}{1+\delta}\right]|v_i|$, $\quad\forall\ |v_i|\leqslant L(1+\delta)$, $\quad$ 其中 $\delta>0$。

(2) 证明如果 $\frac{\delta}{1+\delta}<\frac{1}{2\|PB\|\|F\|}$，其中 P 是方程 $P(A-BF)+(A-BF)^{T}P=-I$ 的解，则扰动系统是指数稳定的，并讨论如何估计其吸引域。

4.8 对下列各系统，找出使得原点是指数稳定的 $|a|$ 的边界。

(1) $\dot{x}_1=-x_1-2x_2+a(x_1-x_2)\|x\|^2$, $\quad\dot{x}_2=2x_1-x_2-a(x_1-x_2)\|x\|^2$

100

(2) $\dot{x}_1=ax_1^2+x_2$, $\quad\dot{x}_2=-x_1-\frac{x_1^3}{1+x_1^2}-x_2$

(3) $\dot{x}_1=x_2$, $\quad\dot{x}_2=-x_1-x_2+a(x_1-x_2)$

4.9 对下列各系统，找出$|a|$的边界使得原点是全局渐近稳定的。

(1) $\dot{x}_1=\dfrac{ax_1^3}{1+x_1^2}+x_2$，　$\dot{x}_2=-x_1-\dfrac{x_1^3}{1+x_1^2}-x_2$。

(2) $\dot{x}_1=-x_1^3+x_2$，　$\dot{x}_2=-x_1^3-x_2+ax_1^3$。

(3) $\dot{x}_1=-x+h(x_2)$，$\dot{x}_2=-x_1-h(x_2)-ax_1$，其中$h(x)$是局部 Lipschitz 的，且$h(0)=0$和$y\neq 0$时，$yh(y)>0$。

4.10 考虑系统

$$\dot{x}_1=-x_1+\frac{x_2}{1+x_1^2},\quad \dot{x}_2=-\frac{x_1}{1+x_1^2}-x_2+a(x_1+x_2)$$

(1) 当$a=0$时，证明原点是全局指数稳定的。

(2) 找出使得原点是全局指数稳定的$|a|$的上界。

(3) 证明当$a<1$时原点是指数稳定的，当$a>1$时原点是不稳定的。

(4) 当$a=0.9$时，估计其吸引域。

(5) 用a代替$a(x_1+x_2)$。应用定理 4.5 证明$x(t)$全局终极有界，并根据a估计终极边界。

4.11 对下列每个系统，分别找出一个紧集Ω使得对所有$x(0)\in\Omega$，解$x(t)$是终极有界的，并根据d估计终极边界。提示：应用定理 4.5，在(1)和(2)题中采用例 3.7 中函数$V(x)$，在(3)题中采用例 3.14 中的函数$V(x)$。

(1) $\dot{x}_1=x_2$，　$\dot{x}_2=-\sin x_1-x_2+d$

(2) $\dot{x}_1=x_2$，　$\dot{x}_2=-x_1+\dfrac{1}{9}x_1^3-2x_2+d$

(3) $\dot{x}_1=x_2$，　$\dot{x}_2=x_1+(x_1^2-1)x_2+d$

4.12 对下列各系统，证明：当$a=0$时原点是全局渐近稳定的；而当$a\neq 0$时，解是全局终极有界，且找出一个依赖$|a|$的终极边界$\mathcal{K}$类函数。

(1) $\dot{x}_1=-x_1^3+x_2$，　$\dot{x}_2=-x_2+a$

101

(2) $\dot{x}_1=-x_1^3+x_2+a$，　$\dot{x}_2=-x_2$

4.13 考虑系统

$$\dot{x}_1=x_2,\quad \dot{x}_2=-x_1^3-x_2+M\cos(\omega t)$$

(1) 当$M=0$时，采用 Lyapunov 函数$V(x)=\dfrac{1}{2}x_1^2+x_1x_2+x_2^2+\dfrac{1}{2}x_1^4$或$V(x)=\dfrac{1}{4}x_1^4+\dfrac{1}{2}x_2^2$，证明原点是全局渐近稳定平衡点。

(2) 计算解的终极边界，将它表述为M的$\mathcal{K}$类函数。

4.14 对下列各系统，研究其输入-状态稳定性。其中函数h是局部 Lipschitz 的，且$h(0)=0$，同时成立$yh(y)\geqslant ay^2\ \forall y$，并且$a>0$。

(1) $\dot{x}=-h(x)+u^2$

(2) $\dot{x}=h(x)+u$

(3) $\dot{x}=-\dfrac{x}{1+x^2}+u$

(4) $\dot{x}=-\dfrac{x^3}{1+x^2}+u$

(5) $\dot{x}_1=-x_1+x_2$，　$\dot{x}_2=-x_1(2-x_2)^2-x_2+u$

(6) $\dot{x}_1=-x_1-x_1^3+x_2$，　$\dot{x}_2=-x_1-x_2+u$

(7) $\dot{x}_1=-x_1-x_1^3+x_2$， $\dot{x}_2=-x_1-x_2+x_3$， $\dot{x}_3=-x_3^3+u$

(8) $\dot{x}_1=x_2$， $\dot{x}_2=-h(x_1)-x_2+u$

(9) $\dot{x}_1=x_2$， $\dot{x}_2=-h(x_1)-x_2+x_3$， $\dot{x}_3=-h(x_3)+u$

(10) $\dot{x}_1=-x_1+x_2$， $\dot{x}_2=-h(x_1)-x_2+u$

4.15 证明下列各系统不是输入-状态稳定的，但是局部输入-状态稳定的，并估计定义4.5中的集合$\mathcal{X}$和$\mathcal{U}$。

(1) $\dot{x}_1=-x_2$， $\dot{x}_2=x_1+(x_1^2-1)x_2+u$

(2) $\dot{x}_1=x_2$， $\dot{x}_2=-x_1+\frac{1}{3}x_1^3-x_2+u$

(3) $\dot{x}_1=x_2$， $\dot{x}_2=-4(x_1+x_2)-(x_1+x_2)[1-(x_1+x_2)^2]+u$

102

第5章 无 源 性

无源性为我们分析非线性系统提供了有用的工具，它涉及前面两章中的 Lyapunov 稳定性及下一章中的$\mathcal{L}_2$ 稳定性。5.1 节首先定义了无记忆非线性的无源性，介绍了属于扇形域非线性的相关概念。5.2 节把无源性定义扩展到由状态模型描述的动态系统中。对于这两种情况，都用电网络引出定义这些概念的起因。5.3 节研究了正实传递函数和严格正实传递函数，并表明它们分别代表无源系统与严格无源系统。5.4 节建立了无源性与 Lyapunov 稳定性之间的联系⊖。

5.1 无记忆函数

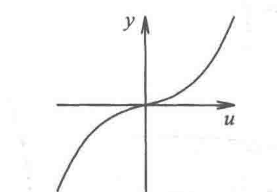
本节目的在于定义无记忆函数 $y=h(t, u)$的无源性，其中 u 与 y 均为 m 维向量，且 $t\geqslant 0$。我们应用电网络来引出定义。图 5.1a 为单端阻性元件构成的电路，我们将它看成是一个输入为电压 u 输出为电流 y 的系统。如果阻性元件的输入功率总是非负的，即，如果它的 u-y 特征曲线上所有的点(u, y)满足 $uy\geqslant 0$，则称阻性元件是无源的。在几何上，这意味着 u-y 曲线必定在第一和第三象限，如图 5.1 所示。最简单的这种电阻元件是一个满足欧姆定律 $u=Ry$ 或 $y=Gu$ 的线性电阻，其中 R 是电阻，$G=\dfrac{1}{R}$为电导。对于正电阻，u-y特性是斜率为 G 的一条直线，且乘积 $uy=Gu^2$ 总是非负的。事实上，除了在原点(0, 0)外它始终是正的。非线性无源电阻也具有在第一和第三象限的非线性 u-y 曲线，示例如图 5.2a与图 5.2b 所示。注意，尽管图 5.2b 中曲线在一些区间上有负斜率，但隧道二极管仍然是无源的。作为非无源元件的例子，图 5.2c 给出一个负电阻的 u-y 特性的图像，该电阻在附录 A.4 节中用于组建负阻振荡器。

a）无源电阻　　b）u-y 特性在第一、第三象限

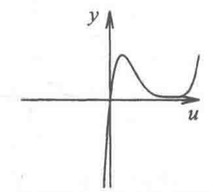
图 5.1　一个负电阻的 u-y 特性

对于多端口网络，输入 u 和输出 y 均为向量，这时流入网络的功率为内积 $u^{\mathrm{T}}y=\sum_{i=1}^{m}u_iy_i=\sum_{i=1}^{m}u_ih_i(t,u)$。如果对所有 u 均有 $u^{\mathrm{T}}y\geqslant 0$，那么该网络是无源的。现在将无源性

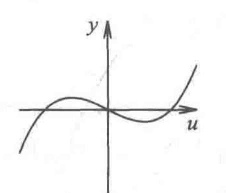
⊖ 本章与 7.1 节中无源性反馈是基于文献[20，60，61，81，121，139，144]的。文献[1]给出了正实传递函数的扩展处理。



a）非线性无源电阻特性例子



b）非线性无源电阻特性例子



c）非无源电阻例子

图 5.2 隧道二极管的特性

概念抽象出来，推广到任意的函数 $y=h(t,\ u)$。我们把 $u^{\mathrm{T}}y\geqslant 0$ 看作系统的输入功率，如果对所有u均有 $u^{\mathrm{T}}y\geqslant 0$，则称系统是无源的。对于标量情况，输入/输出关系函数的图像一定在第一和第三象限，我们也说该图像属于扇形域$[0,\ \infty]$，其中零和无穷为第一、第三象限边界(横轴和纵轴)的斜率。即使 h 是随着时间变化的，这种图形表示依然有效。只是在这种情况下，u-y 曲线会随着时间变化，但始终属于扇形域$[0,\ \infty]$。对于向量函数，我们可以给出特殊情况的图形表示，一种特殊情况为 $h(t,\ u)$是解耦的，这时的 $h_i(t,\ u)$只依赖 u_i，即

$$h(t,u)=\mathrm{col}(h_1(t,u_1),h_2(t,u_2),\cdots,h_m(t,u_m)) \tag{5.1}$$

在这种情况下，每个元素的关系图均属于扇形域$[0,\ \infty]$。一般对于向量情形用这种图形表示是不可能的，但我们将继续使用扇形域这个术语。如果对所有$(t,\ u)$都有 $u^{\mathrm{T}}h(t,\ u)\geqslant 0$，则称 h 属于扇形域$[0,\ \infty]$。

104

$u^{\mathrm{T}}y=0$ 为无源性的极端情况。在这种情况下，我们称系统是无损的。图 5.3 给出一个无损系统的例子，它是一个理想变压器，这里 $y=Su$，其中

$$u=\begin{bmatrix}v_1\\ i_2\end{bmatrix},\quad y=\begin{bmatrix}i_1\\ v_2\end{bmatrix},\quad S=\begin{bmatrix}0 & -N\\ N & 0\end{bmatrix}$$

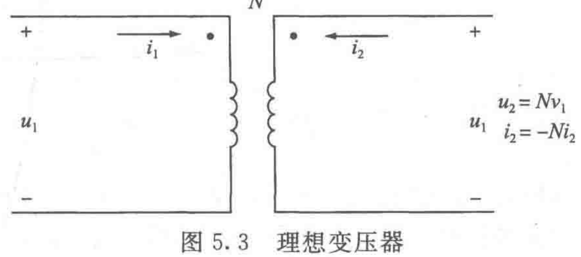


图 5.3 理想变压器

矩阵 S 是斜对称的，即成立 $S+S^{\mathrm{T}}=0$。此时，$u^{\mathrm{T}}y=u^{\mathrm{T}}Su=\frac{1}{2}u^{\mathrm{T}}(S+S^{\mathrm{T}})u=0$。

现在考虑函数 h，如果当 $u\neq 0$ 时，$u^{\mathrm{T}}y=u^{\mathrm{T}}h(t,\ u)\geqslant u^{\mathrm{T}}\varphi(u)>0$，那么函数 h 就称为*输入严格无源的*。这里的严格是指仅当 $u=0$ 时，$u^{\mathrm{T}}y=0$ 才成立。在标量情况下，输入严格无源函数的 u-y 图像总在第一、第三象限，并除了在原点外与 u 轴不接触。

另一方面，如果对所有 $y\neq 0$ 时，$u^{\mathrm{T}}y=u^{\mathrm{T}}h(t,\ u)\geqslant u^{\mathrm{T}}\rho(y)>0$，那么函数 h 就称为*输出严格无源的*。这里的严格依然是指仅当 $y=0$ 时，$u^{\mathrm{T}}y=0$ 才成立。同样，在标量情况下，输出严格无源的u-y 图总在第一、第三象限，并除了在原点外不接触 y 轴。为了方便起见，我们在下面定义中总结无源性的各种概念。

定义 5.1 系统 $y=h(t,\ u)$是：

- 无源的，如果 $u^{\mathrm{T}}y\geqslant 0$；
- 无损的，如果 $u^{\mathrm{T}}y=0$；
- 输入严格无源的，如果 $u^{\mathrm{T}}y\geqslant u^{\mathrm{T}}\varphi(u)>0$，$\forall u\neq 0$；
- 输出严格无源的，如果 $u^{\mathrm{T}}y\geqslant y^{\mathrm{T}}\rho(y)>0$，$\forall y\neq 0$。

在上述各种情况下，要求不等式或等式对所有的$(t,\ u)$成立。

接下来考虑标量函数 $y=h(t,\ u)$，设对所有$(t,\ u)$，成立不等式

$$\alpha u^2\leqslant uh(t,u)\leqslant \beta u^2 \tag{5.2}$$

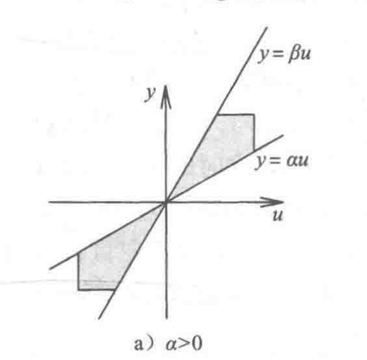
105

或者，等价地表述为

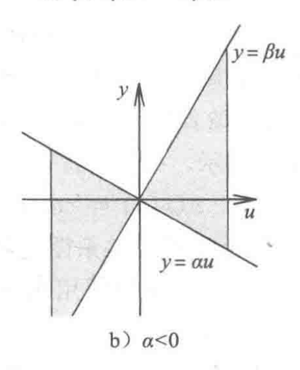
$$[h(t,u)-\alpha u][h(t,u)-\beta u]\leqslant 0 \tag{5.3}$$

其中，α 与 β 为实数，并满足 $\beta\geqslant\alpha$。函数的图像处于以直线 $y=\alpha u$ 与 $y=\beta u$ 为边界的扇形域内。这时也称 h 属于扇形域$[\alpha,\ \beta]$。图 5.4 给出 $\beta>0$ 但 α 有不同符号时的扇形域$[\alpha,\ \beta]$。如果将不等式(5.2)的某一个不等号换成严格不等号，这时相应地称 h 属于扇形域$(\alpha,\ \beta]$、$[\alpha,\ \beta)$或$(\alpha,\ \beta)$，表现在图像上意义是显然的。为了把扇形域定义推广到向量情况，首先考虑式(5.1)给出的解耦函数 $h(t,\ u)$。如果每个元素 h_i 满足常数为 α_i 和 β_i，且 $\beta_i>\alpha_i$ 的扇形域条件式(5.2)，定义两个对角矩阵

$$K_1=\operatorname{diag}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m),\quad K_2=\operatorname{diag}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)$$



a）$\alpha>0$



b）$\alpha<0$

图 5.4 扇形域$[\alpha,\ \beta]$，其中 $\beta>0$

容易看出，这时不等式

$$[h(t,u)-K_1u]^{\mathrm{T}}[h(t,u)-K_2u]\leqslant 0 \tag{5.4}$$

对所有$(t,\ u)$成立。注意，$K=K_2-K_1$ 为对角正定对称矩阵。不等式(5.4)可能对更一般的向量函数也成立。例如，如果对所有$(t,\ u)$，$h(t,\ u)$满足不等式

$$\|h(t,u)-Lu\|\leqslant\gamma\|u\|$$

记 $K_1=L-\gamma I$ 与 $K_2=L+\gamma I$，则有

$$[h(t,u)-K_1u]^{\mathrm{T}}[h(t,u)-K_2u]=\|h(t,u)-Lu\|^2-\gamma^2\|u\|^2\leqslant 0$$

这里，$K=K_2-K_1$ 依然为对角正定对称矩阵。上述讨论启发我们可以运用不等式(5.4)及正定对称矩阵 $K=K_2-K_1$ 为向量函数 $h(t,\ u)$定义扇形域$[K_1,\ K_2]$。下面给出扇形域的各种定义。

106

定义 5.2 称无记忆函数 $h(t,\ u)$属于扇形域

- $[0,\ \infty]$，如果 $u^{\mathrm{T}}h(t,\ u)\geqslant 0$；
- $[K_1,\ \infty]$，如果 $u^{\mathrm{T}}[h(t,\ u)-K_1u]\geqslant 0$；
- $[0,\ K_2]$，其中 $K_2=K_2^{\mathrm{T}}>0$，如果 $h^{\mathrm{T}}(t,\ u)[h(t,\ u)-K_2u]\leqslant 0$；
- $[K_1,\ K_2]$，其中 $K=K_2-K_1=K^{\mathrm{T}}>0$，如果

$$[h(t,u)-K_1u]^{\mathrm{T}}[h(t,u)-K_2u]\leqslant 0 \tag{5.5}$$

在上述所有情况中，都要求不等式对所有$(t,\ u)$成立。如果不等号换成是严格的，就对应地将扇形域记为$(0,\ \infty)$、$(K_1,\ \infty)$、$(0,\ K_2)$或者$(K_1,\ K_2)$。在标量情况下，用$(\alpha,\ \beta]$、$[\alpha,\ \beta)$或$(\alpha,\ \beta)$表示不等式(5.2)的一边或两边为严格不等号的情形。

扇形域$[0,\ K_2]$，其中 $K_2=\left(\dfrac{1}{\delta}\right)I>0$，对应于 $\rho(y)=\delta y$ 的输出严格无源函数。图 5.5 给出一种方法将在扇形域$[K_1,\ K_2]$上的函数变换成扇形域$[0,\ \infty]$上的函数。依图定义$\tilde{u}$、

$\hat{u}$与$\tilde{y}$，那么$\tilde{y}=h(t,\ u)-K_1u$和$\hat{u}=Ku=\tilde{u}+\tilde{y}$。由$[h(t,\ u)-K_1u]^{\mathrm{T}}[h(t,\ u)-K_2u]\leqslant 0$，可以得到

$$\tilde{y}^{\mathrm{T}}(\tilde{y}-Ku)\leqslant 0\Rightarrow \tilde{y}^{\mathrm{T}}(\tilde{y}-\hat{u})\leqslant 0\Rightarrow \tilde{y}^{\mathrm{T}}(-\tilde{u})\leqslant 0\Leftrightarrow \tilde{y}^{\mathrm{T}}\tilde{u}\geqslant 0$$

图 5.5　通过前馈和输出反馈可以将在扇形域$[K_1,\ K_2]$中的函数变换为扇形域$[0,\ \infty]$的函数

5.2　状态模型

现在我们来定义由下列状态模型描述的动态系统的无源性，考虑

$$\dot{x}=f(x,u),\quad y=h(x,u) \tag{5.6}$$

其中 f 为局部 Lipschitz 函数，h 连续，$f(0,\ 0)=0$ 和 $h(0,\ 0)=0$。假设系统的输入与输出维数相同。下列 RLC 电路将说明导出这个定义的一种起因。

107

例 5.1 图 5.6 给出的 RLC 电路，由一个电压源、线性电感、线性电容及非线性电阻组成，其中的非线性电阻 1 和 3 都是用它们的 v-i 特性 $i_1=h_1(v_1)$与 $i_3=h_3(v_3)$来描述的，而电阻 2 则是用它的 i-v 特性 $v_2=h_2(i_2)$来描述的。我们将电压 u 取为输入而将电流 y 作为输出，那么乘积 uy 是输入网络的功率流。用通过电感的电流 x_1 和电容两端的电压 x_2 作为状态变量，则状态模型是

$$L\dot{x}_1=u-h_2(x_1)-x_2,\quad C\dot{x}_2=x_1-h_3(x_2),\quad y=x_1+h_1(u)$$

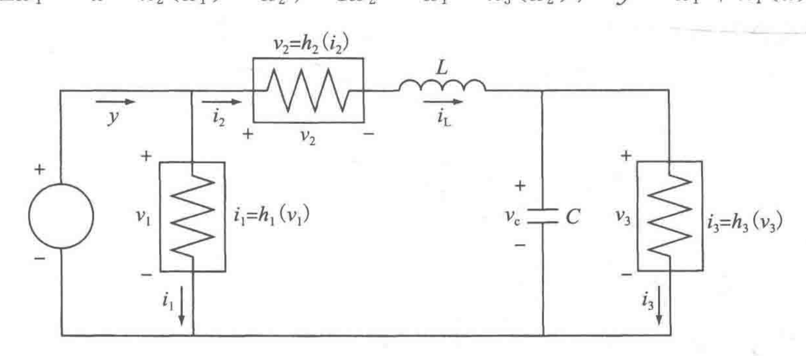


图 5.6　例 5.1 的 RLC 电路

与纯电阻网络比较，RLC 网络的特点是具有储能元件电感 L 与电容 C。如果在时间段$[0,\ t]$内网络吸收的能量大于或等于同一时间段内网络存储能量的变化量；即

$$\int_0^t u(s)y(s)\mathrm{d}s\geqslant V(x(t))-V(x(0)) \tag{5.7}$$

其中，$V(x)=\frac{1}{2}Lx_1^2+\frac{1}{2}Cx_2^2$ 为网络存储的能量函数，则称该系统是无源的；如果不等式(5.7)严格成立，那么吸收能量与存储能量变化量之差就是电阻消耗的能量。由于不等式(5.7)对所有 $t\geqslant 0$ 都成立，因此瞬时功率不等式

$$u(t)y(t) \geqslant \dot{V}(x(t),u(t)) \tag{5.8}$$

对所有 t 都成立，即输入网络的功率一定会大于或等于网络中能量的变化率。也可以通过计算 V 沿着系统轨线的导数得到不等式(5.8)。因为

108

$$\begin{aligned}\dot{V} &= Lx_1\dot{x}_1 + Cx_2\dot{x}_2 = x_1[u - h_2(x_1) - x_2] + x_2[x_1 - h_3(x_2)] \\ &= x_1[u - h_2(x_1)] - x_2h_3(x_2) \\ &= [x_1 + h_1(u)]u - uh_1(u) - x_1h_2(x_1) - x_2h_3(x_2) \\ &= uy - uh_1(u) - x_1h_2(x_1) - x_2h_3(x_2)\end{aligned}$$

因而，

$$uy = \dot{V} + uh_1(u) + x_1h_2(x_1) + x_2h_3(x_2)$$

如果 h_1、h_2 与 h_3 都为无源的，则 $uy \geqslant \dot{V}$，且整个系统是无源的。根据可能出现的各种情况，网络还存在其他四种可能的结果，分别说明如下。

情况 1：如果 $h_1=h_2=h_3=0$，则 $uy=\dot{V}$ 且网络中没有能量损耗，即系统是无损的。

情况 2：如果 h_2 与 h_3 是无源的，则 $uy \geqslant \dot{V}+uh_1(u)$。如果对所有 $u \neq 0$ 有 $uh_1(u)>0$，那么，仅当 $u(t)\equiv 0$ 时，才能使在时间区间$[0, t]$内吸收的能量等于储存能量的变化。这是输入严格无源的情况。

情况 3：如果 $h_1=0$ 且 h_3 是无源的，则 $uy \geqslant \dot{V}+yh_2(y)$。如果对所有 $y\neq 0$ 有 $yh_2(y)>0$，那么是输入严格无源的情形，因为仅当 $y(t)\equiv 0$ 时，在时间区间$[0, t]$吸收的能量等于储存能量的变化。

情况 4：如果 $h_1\in[0, \infty]$，$h_2\in(0, \infty)$及 $h_3\in(0, \infty)$，则

$$uy \geqslant \dot{V} + x_1h_2(x_1) + x_2h_3(x_2)$$

其中，$x_1h_2(x_1)+x_2h_3(x_2)$为 x 的正定函数。这是状态严格无源性情况，因为仅当 $x(t)\equiv 0$ 时，在时间区间$[0, t]$内吸收的能量等于储能的变化。具有这样性质的系统称为是状态严格无源的，或简称严格无源的。◀

定义 5.3 称系统式(5.6)是无源的，如果存在连续可微半正定函数 $V(x)$(称为存储函数)使得

$$u^{\mathrm{T}}y \geqslant \dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x}f(x,u), \quad \forall (x,u) \tag{5.9}$$

此外，称系统是

- 无损的，如果 $u^{\mathrm{T}}y=\dot{V}$；
- 输入严格无源的，如果 $u^{\mathrm{T}}y\geqslant\dot{V}+u^{\mathrm{T}}\varphi(u)$，其中 $u^{\mathrm{T}}\varphi(u)>0$，$\forall u\neq 0$；
- 输出严格无源的，如果 $u^{\mathrm{T}}y\geqslant\dot{V}+y^{\mathrm{T}}\rho(y)$，其中 $y^{\mathrm{T}}\rho(y)>0$，$\forall y\neq 0$；
- 严格无源的，如果 $u^{\mathrm{T}}y\geqslant\dot{V}+\psi(x)$，其中 ψ 为正定函数。

109

上述所有情况都要求不等式对所有(x, u)均成立。

例 5.2 在图 5.7a 中，积分器模型由下式表述

$$\dot{x} = u, \quad y = x$$

这个系统是无损的，因为将 $V(x)=\frac{1}{2}x^2$ 作为存储函数，$uy=\dot{V}$ 成立。

当无记忆函数与积分器并联，如图 5.7b 所示，系统表达式为

$$\dot{x} = u, \quad y = x + h(u)$$

依然用 $V(x)=\frac{1}{2}x^2$ 作为存储函数，则 $uy=\dot{V}+uh(u)$。如果 $h\in[0, \infty]$，则系统是无源的。如果对所有 $u\neq 0$，都有 $uh(u)>0$，则系统是输入严格无源的。

当无记忆函数与积分器组成闭合回路，如图 5.7c 所示，此时系统表达式如下

$$\dot{x} = -h(u) + u, \quad y = x$$

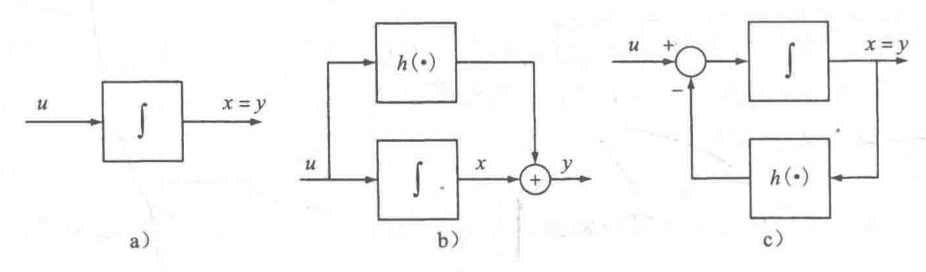


图 5.7 例 5.2

还是用 $V(x)=\frac{1}{2}x^2$ 作为存储函数，则 $uy=\dot{V}+yh(y)$。如果 $h\in[0, \infty]$，则系统是无源的。如果对所有 $y\neq 0$ 有 $yh(y)>0$，系统是输出严格无源的。◀

例 5.3 一个积分器与一个无源无记忆函数串联，如图 5.8a 所示，系统表达式为

$$\dot{x} = u, \quad y = h(x)$$

h 的无源性说明对所有 x 有 $\int_0^x h(\sigma)\mathrm{d}\sigma \geqslant 0$。将 $V(x)=\int_0^x h(\sigma)\mathrm{d}\sigma$ 当作存储函数，则 $\dot{V}=h(x)\dot{x}=yu$。因此系统是无损的。现假设由一阶系统$\left(\text{传递函数}\frac{1}{(as+1)}(a>0)\right)$替换积分器，如图 5.8b 所示。则系统状态模型如下：

$$a\dot{x} = -x + u, \quad y = h(x)$$

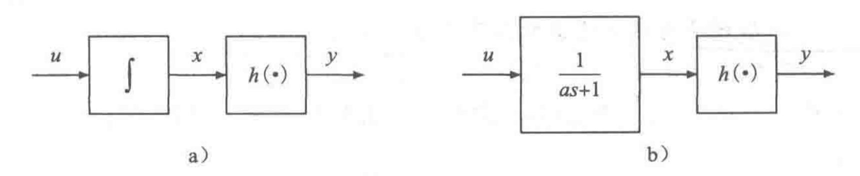


图 5.8 例 5.3

用 $V(x)=a\int_0^x h(\sigma)\mathrm{d}\sigma$ 作为存储函数，有：

$$\dot{V} = h(x)(-x+u) = yu - xh(x) \leqslant yu$$

因此系统是无源的。如果 $xh(x)>0\ \forall\, x\neq 0$，则系统是严格无源的。◀ 110

例 5.4 考虑系统

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -h(x_1) - ax_2 + u, \quad y = bx_2 + u$$

其中，$h\in[\alpha_1, \infty]$，而 a、b 和 α_1 为正常数。设

$$V(x) = \alpha\int_0^{x_1} h(\sigma)\mathrm{d}\sigma + \frac{1}{2}\alpha x^{\mathrm{T}}Px = \alpha\int_0^{x_1} h(\sigma)\mathrm{d}\sigma + \frac{1}{2}\alpha(p_{11}x_1^2 + 2p_{12}x_1x_2 + p_{22}x_2^2)$$

其中，α、p_{11} 与 $p_{11}p_{22}-p_{12}{}^2$ 都为正数。将 V 作为备选存储函数。考察

$$uy - \dot{V} = u(bx_2 + u) - \alpha[h(x_1) + p_{11}x_1 + p_{12}x_2]x_2 - \alpha(p_{12}x_1 + p_{22}x_2)[-h(x_1) - ax_2 + u]$$

取 $p_{22}=1$，$p_{11}=ap_{12}$ 及 $a=b$，从而消去交叉项 $x_2h(x_1)$、x_1x_2 与 x_2u，则

$$\begin{aligned}uy-\dot{V}&=u^2-bp_{12}x_1u+bp_{12}x_1h(x_1)+b(a-p_{12})x_2^2\\&=\left(u-\frac{1}{2}bp_{12}x_1\right)^2-\frac{1}{4}b^2p_{12}^2x_1^2+bp_{12}x_1h(x_1)+b(a-p_{12})x_2^2\\&\geqslant bp_{12}\left(\alpha_1-\frac{1}{4}bp_{12}\right)x_1^2+b(a-p_{12})x_2^2\end{aligned}$$

再取 $p_{12}=ak$，其中 $0<k<\min\left\{1,\ \frac{4\alpha_1}{(ab)}\right\}$，于是 p_{11}、$p_{11}p_{22}-p_{12}^2$、$bp_{12}\left(\alpha_1-\frac{1}{4}bp_{12}\right)$ 以及 $b(a-p_{12})$ 均为正数。因此，上述不等式表明系统是严格无源的。◀

例 5.5 考虑单摆方程

$$\dot{x}_1=x_2,\quad \dot{x}_2=-\sin x_1-bx_2+cu$$

其中，$b\geqslant 0$ 和 $c>0$。把 $y=x_2$ 看成输出，并用总能量

$$V(x)=\alpha\left[(1-\cos x_1)+\frac{1}{2}x_2^2\right]$$

作为备选存储函数，其中 $\alpha>0$。注意，当把 $V(x)$ 看成定义在 R^2 上的函数时，$V(x)$ 是半正定的，而不是正定的，因为它在原点以外也可为零。计算

[111]

$$uy-\dot{V}=ux_2-\alpha[x_2\sin x_1-x_2\sin x_1-bx_2^2+cx_2u]$$

取 $\alpha=\frac{1}{c}$，消除交叉乘积项 x_2u，得到

$$uy-\dot{V}=\left(\frac{b}{c}\right)x_2^2\geqslant 0$$

因此，当 $b=0$ 时系统是无源的，而当 $b>0$ 时系统是输出严格无源的[㊀]。◀

5.3 正实传递函数

定义 5.4 $m\times m$ 的真有理传递函数矩阵 $G(s)$ 称为是正实的，前提是它满足下面三个条件：

- $G(s)$ 的所有极点满足 $\mathrm{Re}[s]\leqslant 0$；
- 对于任意实数 ω，当 $\mathrm{j}\omega$ 不是 $G(s)$ 中任一元素的极点时，矩阵 $G(\mathrm{j}\omega)+G^{\mathrm{T}}(-\mathrm{j}\omega)$ 是半正定的；
- 当 $\mathrm{j}\omega$ 是 $G(s)$ 中某一元素的纯虚极点时，则它是单重极点，且记留数矩阵 $\mathrm{Res}G(\mathrm{j}\omega)=\lim\limits_{s\to \mathrm{j}\omega}(s-\mathrm{j}\omega)G(s)$，$\mathrm{Res}G(\mathrm{j}\omega)+\mathrm{Res}G^{\mathrm{T}}(-\mathrm{j}\omega)$ 是半正定的。

如果存在 $\varepsilon>0$，使得矩阵 $G(s-\varepsilon)$ 是正实的，则称矩阵 $G(s)$ 是严格正实的。

当 $m=1$ 时，$G(\mathrm{j}\omega)+G^{\mathrm{T}}(-\mathrm{j}\omega)=2\mathrm{Re}[G(\mathrm{j}\omega)]$ 为 ω 的偶函数。因此，定义 5.4 的第二个条件可简化为 $\mathrm{Re}[G(\mathrm{j}\omega)]\geqslant 0$，$\forall\omega\in[0,\infty)$，当 $G(\mathrm{j}\omega)$ 的 Nyquist 图在复平面的闭右半面时，该条件成立。而只有当传递函数的相对阶为零或 1 时，这个条件才能满足[㊁]。

下面引理给出了严格正实传递函数的充分必要条件[㊂]。

㊀ 原文似有误，根据定义 5.3，当 $b=0$ 时，$uy-\dot{V}=0$，系统应是无损的；设 $\psi(x)=\left(\frac{b}{c}\right)x_2^2$，它不是正定的，因此系统不会是输出严格无源的，只是无源的。——译者注

㊁ 有理传递函数 $G(s)=\frac{n(s)}{d(s)}$ 的相对阶是为 $\deg d-\deg n$。对于一个真传递函数，相对阶为非负整数。

㊂ 文献[3]给出了证明。

引理 5.1 设 $G(s)$ 为 $m\times m$ 真有理传递函数矩阵，并设 $\det[G(s)+G^{T}(-s)]$ 不恒为零[⊖]。那么，当且仅当下面条件成立，$G(s)$ 为严格正实的：

- $G(s)$ 为 Hurwitz 的，即 $G(s)$ 所有元素的极点都具有负实部；
- 对所有 $\omega\in R$ 矩阵 $G(j\omega)+G^{T}(-j\omega)$ 为正定的；
- $G(\infty)+G^{T}(\infty)$ 为正定的，或该矩阵为半正定的，且 $\lim\limits_{\omega\to\infty}\omega^{2(m-q)}\det[G(j\omega)+G^{T}(-j\omega)]>0$，其中 $q=\text{rank}[G(\infty)+G^{T}(\infty)]$。

当 $m=1$ 时，引理后两条的频域条件可简化为 $\text{Re}[G(j\omega)]>0$，$\forall\omega\in[0,\infty)$ 以及 $G(\infty)>0$ 或 $G(\infty)=0$，以及 $\lim\limits_{\omega\to\infty}\omega^{2}\text{Re}[G(j\omega)]>0$。

112

例 5.6 传递函数 $G(s)=\frac{1}{s}$ 为正实的，因为该函数没有极点满足 $\text{Re}[s]>0$，在 $s=0$ 有一简单极点且它的留数为 1，而且 $\text{Re}[G(j\omega)]=0$，$\forall\omega\neq0$。但不是严格正实的，因为对任意 $\varepsilon>0$，传递函数 $\frac{1}{(s-\varepsilon)}$ 在 $\text{Re}[s_z]>0$ 时，有一个极点 $s_z=\varepsilon$，即有正实部极点。当 $a>0$ 时，传递函数 $G(s)=\frac{1}{(s+a)}$ 为正实的，因为它没有极点满足 $\text{Re}[s]\geqslant0$，而且 $\text{Re}[G(j\omega)]=\frac{a}{\omega^{2}+a^{2}}>0$，$\forall\omega\in[0,\infty)$。由于 $a>0$，当 a 给定之后，那么对任意的 $\varepsilon\in(0,a)$，传递函数 $G(s-\varepsilon)=\frac{1}{(s+a-\varepsilon)}$ 都是正实的。因此，$G(s)=\frac{1}{(s+a)}$ 是严格正实的。由引理 5.1 可导出同样的结论，因为

$$\lim_{\omega\to\infty}\omega^{2}\text{Re}[G(j\omega)]=\lim_{\omega\to\infty}\frac{\omega^{2}a}{\omega^{2}+a^{2}}=a>0$$

传递函数 $G(s)=\frac{1}{(s^{2}+s+1)}$ 为非正实的，因为它的相对阶为 2。也可以通过计算看出，因为

$$\text{Re}[G(j\omega)]=\frac{1-\omega^{2}}{(1-\omega^{2})^{2}+\omega^{2}}<0,\quad\forall\omega>1$$

考虑 2×2 传递函数矩阵

$$G(s)=\frac{1}{s+1}\begin{bmatrix}s+1 & 1\\ -1 & 2s+1\end{bmatrix}$$

由于 $\det[G(s)+G^{T}(-s)]$ 不恒为零，我们可以应用引理 5.1。注意到 $G(\infty)+G^{T}(\infty)$ 为正定的，且

$$G(j\omega)+G^{T}(-j\omega)=\frac{2}{\omega^{2}+1}\begin{bmatrix}\omega^{2}+1 & -j\omega\\ j\omega & 2\omega^{2}+1\end{bmatrix}$$

对所有 $\omega\in R$ 都为正定的，我们可以推断 $G(s)$ 是严格正实的。

最后，考虑 2×2 传递函数矩阵

$$G(s)=\begin{bmatrix}\frac{s+2}{s+1} & \frac{1}{s+2}\\ \frac{-1}{s+2} & \frac{2}{s+1}\end{bmatrix}\quad\text{满足}\quad G(\infty)+G^{T}(\infty)=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

⊖ 等价地，$G(s)+G^{T}(-s)$ 在 s 的有理函数域的秩为 m。

可以进一步核实

$$G(\mathrm{j}\omega)+G^{\mathrm{T}}(-\mathrm{j}\omega)=\begin{bmatrix}\dfrac{2(2+\omega^2)}{1+\omega^2} & \dfrac{-2\mathrm{j}\omega}{4+\omega^2}\\ \dfrac{2\mathrm{j}\omega}{4+\omega^2} & \dfrac{4}{1+\omega^2}\end{bmatrix}$$

对所有 $\omega\in R$ 为正定的，且 $\lim\limits_{\omega\to(\infty)}\omega^2\det[G(\mathrm{j}\omega)+G^{\mathrm{T}}(-\mathrm{j}\omega)]=4$。从而根据引理 5.1，我们可知是 $G(s)$ 为严格正实的。◀

正实传递函数的无源性将通过使用下列两个著名的引理来说明，这两个引理分别为正实性引理和 Kalman-Yakubovich-Popov 引理[⊖]。这两个引理给出了正实性与严格正实性传递函数矩阵的代数特征。

引理 5.2　（正实性）　设 $G(s)=C(sI-A)^{-1}B+D$ 为 $m\times m$ 传递函数矩阵，其中 (A, B) 能控，(A, C) 能观。那么，$G(s)$ 为正实的当且仅当存在矩阵 $P=P^{\mathrm{T}}>0$、L 及 W，使得

$$PA+A^{\mathrm{T}}P=-L^{\mathrm{T}}L \tag{5.10}$$

$$PB=C^{\mathrm{T}}-L^{\mathrm{T}}W \tag{5.11}$$

$$W^{\mathrm{T}}W=D+D^{\mathrm{T}} \tag{5.12}$$

引理 5.3　(Kalman-Yakubovich-Popov)　设 $G(s)=C(sI-A)^{-1}B+D$ 为 $m\times m$ 传递函数矩阵，其中 (A, B) 能控，(A, C) 能观。那么，$G(s)$ 为严格正实的，当且仅当存在矩阵 $P=P^{\mathrm{T}}>0$、L、W 以及正常数 ε，使得

$$PA+A^{\mathrm{T}}P=-L^{\mathrm{T}}L-\varepsilon P \tag{5.13}$$

$$PB=C^{\mathrm{T}}-L^{\mathrm{T}}W \tag{5.14}$$

$$W^{\mathrm{T}}W=D+D^{\mathrm{T}} \tag{5.15}$$

证明：假设存在 $P=P^{\mathrm{T}}>0$、L、W 以及 $\varepsilon>0$ 满足式(5.13)～式(5.15)。设 $\mu=\frac{1}{2}\varepsilon$，并且有 $G(s-\mu)=C(sI-\mu I-A)^{-1}B+D$。由(5.13)，我们有

$$P(A+\mu I)+(A+\mu I)^{\mathrm{T}}P=-L^{\mathrm{T}}L \tag{5.16}$$

根据引理 5.2 可得出 $G(s-\mu)$ 为正实的。因此，$G(s)$ 是严格正实的。另一方面，假设 $G(s)$ 是严格正实的。则存在 $\mu>0$ 使得 $G(s-\mu)$ 是正实的。根据引理 5.2 可得出存在矩阵 $P=P^{\mathrm{T}}>0$、L、W 以及 ε 满足式(5.13)～式(5.15)。□

引理 5.4　设线性时不变系统

$$\dot{x}=Ax+Bu,\quad y=Cx+D$$

是 $G(s)=C(sI-A)^{-1}B+D$ 的最小实现，那么

- 如果 $G(s)$ 是正实的，则状态模型是无源的；
- 如果 $G(s)$ 是严格正实的，则状态模型是严格无源的。

证明：分别运用引理 5.2 与引理 5.3，并采用 $V(x)=\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Px$ 为存储函数

$$\begin{aligned}u^{\mathrm{T}}y-\frac{\partial V}{\partial x}(Ax+Bu)&=u^{\mathrm{T}}(Cx+Du)-x^{\mathrm{T}}P(Ax+Bu)\\&=u^{\mathrm{T}}Cx+\frac{1}{2}u^{\mathrm{T}}(D+D^{\mathrm{T}})u-\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(PA+A^{\mathrm{T}}P)x-x^{\mathrm{T}}PBu\end{aligned}$$

[⊖] 引理 5.2 的证明见文献[74]的引理 6.2。

$$=u^{\mathrm{T}}(B^{\mathrm{T}}P+W^{\mathrm{T}}L)x+\frac{1}{2}u^{\mathrm{T}}W^{\mathrm{T}}Wu$$

$$+\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}L^{\mathrm{T}}Lx+\frac{1}{2}\varepsilon x^{\mathrm{T}}Px-x^{\mathrm{T}}PBu$$

$$=\frac{1}{2}(Lx+Wu)^{\mathrm{T}}(Lx+Wu)+\frac{1}{2}\varepsilon x^{\mathrm{T}}Px\geqslant\frac{1}{2}\varepsilon x^{\mathrm{T}}Px$$

在引理5.2的情况下，$\varepsilon=0$，我们断定系统是无源的；而在引理5.3的情况下，$\varepsilon>0$，我们断定系统是严格无源的。 □

5.4 与稳定性的联系

这一节考虑如下形式的无源系统

$$\dot{x}=f(x,u),\quad y=h(x,u) \tag{5.17}$$

其中，f 是局部 Lipschitz 的，h 是连续的，且满足 $f(0,0)=0$ 和 $h(0,0)=0$，要研究零输入系统 $\dot{x}=f(x,0)$ 在原点平衡点的稳定性。

引理 5.5 如果系统式(5.17)是无源的，并存在正定存储函数 $V(x)$，则 $\dot{x}=f(x,0)$ 的原点是稳定的。

证明： 将 V 作为 $\dot{x}=f(x,0)$ 的备选 Lyapunov 函数，则 $\dot{V}\leqslant 0$。 □

为了证明 $\dot{x}=f(x,0)$ 在原点的渐近稳定性，我们要么证明 $\dot{V}$ 为负定的，要么应用不变性原理。下一引理应用不变性原理来讨论渐近稳定性，要证明当 $\dot{V}=0$ 时，如果系统式(5.17)的输入 $u=0$，则当 $y=0$ 时，必有 $y\equiv 0$，进一步

$$y(t)\equiv 0\Rightarrow x(t)\equiv 0 \tag{5.18}$$

对所有的解 $x(t)$ 成立。或者等价地证明，$\dot{x}=f(x,0)$ 除了零解 $x(t)\equiv 0$ 没有其他解可以停留在集合 $S=\{h(x,0)=0\}$ 内。式(5.18)给出的属性可解释为能观性条件。回忆线性系统

$$\dot{x}=Ax,\quad y=Cx$$

它的能观性等价于

$$y(t)=Ce^{At}x(0)\equiv 0\Leftrightarrow x(0)=0\Leftrightarrow x(t)\equiv 0$$

为便于应用，我们将式(5.18)表示的性质定义为系统式(5.17)的一种能观性。 115

定义 5.5 系统式(5.17)称为零状态能观的，如果零输入系统 $\dot{x}=f(x,0)$ 除了零解 $x(t)\equiv 0$ 没有其他解可以一直包含在集合 $S=\{h(x,0)=0\}$ 中。

引理 5.6 考虑系统式(5.17)的零输入系统 $\dot{x}=f(x,0)$。如果下面两条中有一条满足，那么原点是渐近稳定的。

- 系统严格无源的；
- 输出严格无源的且零状态能观的。

此外，如果存储函数是径向无界的，则原点是全局渐近稳定的。

证明： 假设系统是严格无源的，并设 $V(x)$ 为其存储函数。则当 $u=0$ 时，$\dot{V}$ 满足不等式 $\dot{V}\leqslant-\psi(x)$，其中 $\psi(x)$ 正定。从这个不等式出发，我们能证明 $V(x)$ 是正定的。由于对任意 $x\in R^n$，方程 $\dot{x}=f(x,0)$ 有唯一解 $\phi(t;x)$，$\phi(t;x)$ 的初始值为 x，并在某个区间 $[0,\delta]$ 上有定义。对不等式 $\dot{V}\leqslant-\psi(x)$ 两边积分，得到

$$V(\phi(\tau;x))-V(x)\leqslant-\int_0^\tau\psi(\phi(t;x))\mathrm{d}t,\quad \forall\tau\in[0,\delta]$$

利用 $V(\phi(\tau;\ x))\geqslant 0$，我们得到

$$V(x)\geqslant\int_0^\tau\psi(\phi(t;x))\mathrm{d}t$$

假设有 $\bar{x}\neq 0$ 使得 $V(\bar{x})=0$。那么上述不等式隐含

$$\int_0^\tau\psi(\phi(t;\bar{x}))\mathrm{d}t=0,\quad \tau\in[0,\delta]\Rightarrow\psi(\phi(t;\bar{x}))\equiv 0\Rightarrow\phi(t;\bar{x})\equiv 0\Rightarrow\bar{x}=0$$

这与假设 $\bar{x}\neq 0$ 矛盾。注意到 $\bar{x}$ 是任意的，即只要 $x\neq 0$，就有 $V(x)>0$。从而 $V(x)$ 可以作为备选 Lyapunov 函数。进一步由 $\dot{V}(x)\leqslant-\psi(x)$，可以断定原点是渐近稳定的。

现在假设系统是输出严格无源的，并记 $V(x)$ 为存储函数。则当 $u=0$ 时，$\dot{V}$ 满足不等式 $\dot{V}\leqslant-y^{\mathrm{T}}\rho(y)$，其中 $\rho(y)$ 满足对所有 $y\neq 0$ 有 $y^{\mathrm{T}}\rho(y)>0$。我们接着从该不等式出发证明 $V(x)$ 是正定的。如果有 $\bar{x}\neq 0$，使得 $V(\bar{x})=0$，则对不等式两边积分，重复上述推断，得到

$$0=V(\bar{x})\geqslant\int_0^\tau h^{\mathrm{T}}(\phi(t;\bar{x}),0)\rho(h(\phi(t;\bar{x})),0)\mathrm{d}t,\quad \forall\tau\in[0,\delta]\Rightarrow h(\phi(t;\bar{x}),0)\equiv 0$$

依据零状态能观性，

116

$$h(\phi(t;\bar{x}),0)\equiv 0\Rightarrow\phi(t;\bar{x})\equiv 0\Rightarrow\bar{x}=0$$

因此，对所有 $x\neq 0$ 有 $V(x)>0$。由于 $\dot{V}(x)\leqslant-y^{\mathrm{T}}\rho(y)$ 且 $y(t)\equiv 0\Rightarrow x(t)\equiv 0$，根据不变性原理我们断定原点是渐近稳定的。

最后，如果 $V(x)$ 是径向无界的，分别根据定理 3.3 与定理 3.5 可以得出全局渐近稳定性。 □

例 5.7 考虑具有 m 维输入 m 维输出的系统

$$\dot{x}=f(x)+G(x)u,\quad y=h(x)$$

其中，f 与 G 都是局部 Lipschitz 的，h 是连续的，且 $f(0)=0$ 和 $h(0)=0$。假设有连续可微半正定函数 $V(x)$ 使得

$$\frac{\partial V}{\partial x}f(x)\leqslant 0,\quad \frac{\partial V}{\partial x}G(x)=h^{\mathrm{T}}(x)$$

则

$$u^{\mathrm{T}}y-\frac{\partial V}{\partial x}[f(x)+G(x)u]=u^{\mathrm{T}}h(x)-\frac{\partial V}{\partial x}f(x)-h^{\mathrm{T}}(x)u=-\frac{\partial V}{\partial x}f(x)\geqslant 0$$

这表明系统是无源的。如果 $V(x)$ 正定，我们可以断定 $\dot{x}=f(x)$ 的原点是稳定的。如果我们有更强的条件

$$\frac{\partial V}{\partial x}f(x)\leqslant-kh^{\mathrm{T}}(x)h(x),\quad \frac{\partial V}{\partial x}G(x)=h^{\mathrm{T}}(x)$$

其中，$k>0$，则

$$u^{\mathrm{T}}y-\frac{\partial V}{\partial x}[f(x)+G(x)]\geqslant ky^{\mathrm{T}}y$$

只要取 $\rho(y)=ky$，则系统是输出严格无源的。如果还知道系统是零状态能观的，则 $\dot{x}=f(x)$ 的原点是渐近稳定的。此外，如果 $V(x)$ 径向无界的，原点将是全局渐近稳定的。 ◀

例 5.8 考虑单输入单输出系统[⊖]

⊖ 例 3.8 与 3.9 研究了该系统的 Lyapunov 稳定性。

$$\dot{x} = x_2, \quad \dot{x}_2 = -ax_1^3 - kx_2 + u, \quad y = x_2$$

其中，a 与 k 为正常数。设 $V(x)=\frac{1}{4}ax_1^4+\frac{1}{2}x_2^2$ 为备选存储函数，那么

$$\dot{V} = ax_1^3x_2 + x_2(-ax_1^3 - kx_2 + u) = -ky^2 + yu$$

因此，系统是输出严格无源的。而且，当 $u=0$ 时，

$$y(t) \equiv 0 \Leftrightarrow x_2(t) \equiv 0 \Rightarrow ax_1^3(t) \equiv 0 \Rightarrow x_1(t) \equiv 0$$

因此系统是零状态能观的。根据引理 5.6 可知，零输入系统的原点是全局渐近稳定的。◀ 117

5.5 练习

5.1 证明两个无源(输入严格无源、输出严格无源、严格无源)动态系统的并联是无源(输入严格无源、输出严格无源、严格无源)的。

5.2 考虑系统

$$\dot{x}_1 = -ax_1 + x_2, \quad \dot{x}_2 = -h(x_1) - bx_2 + u, \quad y = x_2$$

其中，$a\geqslant 0$，$b\geqslant 0$，h 是局部 Lipschitz 的，$h(0)=0$，且对所有 $x_1\neq 0$ 有 $x_1h(x_1)>0$。利用存储函数 $V(x) = k_1\int_0^{x_1} h(\sigma)\mathrm{d}\sigma + \frac{1}{2}k_2x_2^2$，适当选择正常数 k_1 与 k_2 使得系统是：

(1) 无源的；

(2) 当 $a=b=0$ 时，是无损的；

(3) 当 $b>0$ 时，是输出严格无源的；

(4) 当 $a>0$ 与 $b>0$ 时，是严格无源的。

5.3 考虑系统

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -g(x_1)(x_1 + x_2) + u, \quad y = x_1 + 2x_2$$

其中，g 是局部 Lipschitz 函数，且对所有 y 有 $g(y)\geqslant 1$。利用存储函数 $V(x) = \int_0^{x_1}\sigma g(\sigma)\mathrm{d}\sigma + \int_0^{x_2}(x_1 + 2\sigma)\mathrm{d}\sigma$，证明系统是无源的。

5.4 考虑系统

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -h(x_1) - ax_2 + u, \quad y = bx_1 + cx_2$$

其中，a、b、c 为正常数，h 是局部 Lipschitz 的，$h(0)=0$，且对所有 $x_1\neq 0$ 有 $x_1h(x_1)>0$。利用存储函数 $V(x) = k\int_0^{x_1}h(\sigma)\mathrm{d}\sigma + \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Px$，并适当选择其中的正常数 k 及正定矩阵 P，使得当 $b<ac$ 时系统是严格无源的。

5.5 考虑系统

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -h_1(x_1) - x_2 - h_2(x_3) + u, \quad \dot{x}_3 = x_2 - x_3, \quad y = x_2$$

其中，h_1 与 h_2 均为局部 Lipschitz 函数，且 $h_i(0)=0$。进一步对所有 $y\neq 0$ 有 $yh_i(y)>0$。利用存储函数 $V(x) = k_1\int_0^{x_1}h_1(\sigma)\mathrm{d}\sigma + k_2x_2^2 + k_3\int_0^{x_3}h_2(\sigma)\mathrm{d}\sigma$，适当选择正常数 k_1、k_2 和 k_3，使得系统是输出严格无源的。 118

5.6 考虑系统

$$M\dot{x} = -Kx + ah(x) + u, \quad y = h(x)$$

其中，x、u 与 y 均为 n 维向量，M 和 K 为正定对称矩阵，h 是局部 Lipschitz 的，$h\in[0, K]$，且对所有 x 有 $\int_0^x h^{\mathrm{T}}(\sigma)M\mathrm{d}\sigma\geqslant 0$。证明当 $a=1$ 时，系统是无源的，当 $a<1$时，系统是输出严格无源的。

5.7 对下列每个系统的给定输出证明系统具有所述的无源性。

(1) 考虑质量-弹性系统，式(A.6)，如输出为 $y=x_2$，它是输出严格无源的；

(2) 考虑隧道二极管电路，式(A.7)，如输出为 $y=x_2$，它是严格无源的；

(3) 考虑升压转换器，式(A.16)，如输出为 $y=k(x_1-\alpha k x_2)$，它是无源的。

5.8 考虑由方程式(A.34)描述的 m 个关节的机器臂。假设 $g(q)=0$ 只有一个孤立解 $q=q^*$，且势能 $P(q)$在 q^* 有最小值，即对所有 q 有 $P(q)\geqslant P(q^*)$。要求：

(1) 以 $V=\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}M(q)\dot{q}+P(q)-P(q^*)$为备选存储函数，证明当输入为 u、输出为 $\dot{q}$ 时，系统是无源的；

(2) 设 $u=-K_d\dot{q}+v$，其中 K_d 为正定对称矩阵。证明输入为 v、输出为 $\dot{q}$ 时，系统是输出无源的。

5.9 (文献[105])一个旋转刚体航天器的 Euler 方程如下

$J_1\dot{\omega}_1=(J_2-J_3)\omega_2\omega_3+u_1,\quad J_2\dot{\omega}_2=(J_3-J_1)\omega_3\omega_1+u_2,\quad J_3\dot{\omega}_3=(J_1-J_2)\omega_1\omega_2+u_3$

设 $\omega=\mathrm{col}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$为主轴的角速度向量，$u=\mathrm{col}(u_1, u_2, u_3)$为对应于主轴的输入转矩向量，$J_1$ 至 J_3 为对应主轴的转动惯量。

(1) 证明输入为 u 输出为 ω 时，系统是无损的；

(2) 设 $u=-K\omega+v$，其中 K 为正定对称矩阵。证明输入为 v、输出为 ω 时，系统是严格无源的。

5.10 考虑附录 A.12 节给出的 TORA 系统：

(1) 利用势能$\frac{1}{2}kx_c^2$ 与动能$\frac{1}{2}v^{\mathrm{T}}Dv$ 的和作为存储函数，其中

$$v=\begin{bmatrix}\dot{\theta}\\ \dot{x}_c\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}J+mL^2 & mL\cos\theta\\ mL\cos\theta & m+M\end{bmatrix}$$

119

证明输入为 u、输出为 $\dot{\theta}$ 时，系统是无源的；

(2) 设 $u=-\phi_1(\theta)+\omega$，其中 ϕ_1 是局部 Lipschitz 函数，$\phi_1(0)=0$，且对所有 $y\neq 0$ 有 $y\phi_1(y)>0$。利用

$$V=\frac{1}{2}v^{\mathrm{T}}Dv+\frac{1}{2}kx_c^2+\int_0^{\theta}\phi_1(\lambda)\mathrm{d}\lambda$$

为存储函数，证明输入为 ω、输出为 $\dot{\theta}$ 的系统是无源的。

5.11 证明传递函数$\frac{(b_1 s+b_2)}{(s^2+a_1 s+a_2)}$是严格正实的，当且仅当所有系数为正且 $b_2<a_1 b_1$。

5.12 如果 a_1、a_2、d 以及 $a_1 d+b_1$ 为正数，证明传递函数 $d+\frac{b_1 s}{(s^2+a_1 s+a_2)}$是严格正实的。

5.13 考虑系统

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u,\quad y=\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}x$$

(1) 求出传递函数并证明它是严格正实的；

(2) 选取 ε 使得 $A+\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)I$ 是 Hurwitz 矩阵，并从方程式(5.13)—(5.15)中解出 P、L 及 W。

5.14 考虑方程式(5.13)～式(5.15)，并假设$(D+D^{\mathrm{T}})$非奇异。选取 ε 使得 $A+\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)I$ 是 Hurwitz 矩阵。证明 P 满足 Riccati 方程[⊖]

$$PA_0+A_0^{\mathrm{T}}P-PB_0P+C_0=0$$

其中，$A_0=-\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)I-A+B\ (D+D^{\mathrm{T}})^{-1}C$，$B_0=B\ (D+D^{\mathrm{T}})^{-1}B^{\mathrm{T}}$，及 $C_0=-C^{\mathrm{T}}(D+D^{\mathrm{T}})^{-1}C$，且 L 由下式给出

$$L^{\mathrm{T}}L=(C^{\mathrm{T}}-PB)(D+D^{\mathrm{T}})^{-1}(C-B^{\mathrm{T}}P)$$

5.15 研究下列练习中各系统的零状态观测性：

5.2	5.3	5.4	5.5
5.6	5.7(1)	5.7(2)	5.7(3)
5.8(a)	5.8(b)	5.10(a)	5.10(b)

120

⊖ Riccati 方程可由 Matlab 命令"are(A_0，B_0，C_0)"求解。

第6章 输入-输出稳定性

本书的大部分章节都采用状态空间方法对非线性动态系统进行建模，并且重点分析状态变量的特性。实际上还存在另一个为动态系统建模的方法，那就是输入-输出方法。输入-输出模型可以将系统输出直接与输入联系起来，不需要知晓由状态方程描述的模型内部结构信息。系统可以看做一个黑箱，人们只能通过输入和输出了解黑箱内部的结构和参数。输入-输出方法可以处理无法用状态模型描述的系统，例如时滞系统，它就很难用状态模型描述，除非该系统采用近似模型。本章简要介绍了输入-输出稳定性的定义，并说明了它在状态模型下的意义㊀。本章的6.1节介绍了输入-输出模型和输入-输出意义下的$\mathcal{L}$稳定。6.2节研究了状态空间模型描述的非线性系统的$\mathcal{L}$稳定。最后，6.3节针对一类特殊的非线性系统，讨论了其$\mathcal{L}_2$增益的计算方法。

6.1 $\mathcal{L}$稳定性

考虑输入-输出系统

$$y = Hu$$

其中，H是由u到y的一个映射或者一个算子。输入u属于一个函数集合，这些函数将时间区间$[0,\infty)$映射到Euclid空间R^m，即$u:[0,\infty)\to R^m$。这个空间可以是有界的分段连续函数空间，即满足$\sup_{t\geqslant 0}\|u(t)\|<\infty$的分段连续函数$u(t)$；也可以是分段连续且平方可积函数空间，即$u(t)$是分段连续函数且满足$\int_0^\infty u^{\mathrm{T}}(t)u(t)\mathrm{d}t<\infty$。为了测量一个信号大小，我们引进范数$\|u\|$概念，范数是满足如下性质的映射：

- $\|u\|\geqslant 0$，且$\|u\|=0$当且仅当$u=0$；
- 任何正数a和任意u，$\|au\|=a\|u\|$㊁；
- 对任意的u_1和u_2，三角不等式$\|u_1+u_2\|\leqslant\|u_1\|+\|u_2\|$成立。

对有界的分段连续函数空间，范数定义为

$$\|u\|_{\mathcal{L}_\infty} = \sup_{t\geqslant 0}\|u(t)\| < \infty$$

该空间用$\mathcal{L}_\infty^m$表示，其中，m是u的维数。对分段连续且平方可积函数，范数定义为

$$\|u\|_{\mathcal{L}_2} = \sqrt{\int_0^\infty u^{\mathrm{T}}(t)u(t)\mathrm{d}t} < \infty$$

该空间用$\mathcal{L}_2^m$表示。更一般情况，空间$\mathcal{L}_p^m$对于$1\leqslant p<\infty$是所有分段连续函数$u:[0,\infty)\to R^m$的集合，其中的u满足

$$\|u\|_{\mathcal{L}_p} = \left(\int_0^\infty \|u(t)\|^p \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

㊀ 关于对输入-输出稳定的深入理解，读者可参看文献[35，116，147]。

㊁ 一般定义是对任意的实数a，$\|au\|=|a|\,\|u\|$。——译者注

$\mathcal{L}_p^m$ 中的下标 p 指的是用来定义空间的 p-范数，上标 m 还是函数 u 的维数。如果这些上下标在上下文中很清楚的话，我们可以去掉其中一个或者两个，简单地用$\mathcal{L}_p$、$\mathcal{L}^m$ 或者$\mathcal{L}$来表示讨论的空间。为了区分 $u(t)$在$\mathcal{L}$空间中的范数与作为 R^m 中向量的范数，我们记第一个范数为$\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$。

如果我们认为 $u\in\mathcal{L}^m$ 是一个“良性的”输入，那么问题就是输出 y 是否也是“良性的”，即 $y\in\mathcal{L}^q$ 是否成立，其中$\mathcal{L}^q$ 与$\mathcal{L}^m$ 是相同的空间，只是空间的维数 q(输出变量维数)与 m(输入变量维数)可能不同。一个系统如果使得任何“良性的”输入都产生“良性的”输出，那么就称这个系统为稳定的系统。一般说来，不能将 H 看成是从$\mathcal{L}^m$ 到$\mathcal{L}^q$ 的映射，因为对一个具体的 H 而言，一个输入 $u\in\mathcal{L}^m$ 可以产生一个不属于$\mathcal{L}^q$ 的输出 y，这类系统就是不稳定的。因此，H 通常被定义为一个从扩展空间$\mathcal{L}_e^m$ 到扩展空间$\mathcal{L}_e^q$ 的映射，这里$\mathcal{L}_e^m$ 被定义为

$$\mathcal{L}_e^m=\{u\,|\,u_\tau\in\mathcal{L}^m,\forall\,\tau\in[0,\infty)\}$$

122

其中，u_τ 是 u 的一个截断，具体定义是

$$u_\tau(t)=\begin{cases}u(t), & 0\leqslant t\leqslant\tau\\ 0, & t>\tau\end{cases}$$

扩展空间$\mathcal{L}_e^m$ 是一个线性空间，未扩展空间$\mathcal{L}^m$ 是该线性空间的一个子集。这就允许我们可以处理那些“不断增长”的无界信号。例如，信号 $u(t)=t$ 并不属于空间$\mathcal{L}_\infty$，但它的截断

$$u_\tau(t)=\begin{cases}t, & 0\leqslant t\leqslant\tau\\ 0, & t>\tau\end{cases}$$

却属于$\mathcal{L}_\infty$，而且对于每个有限的 τ 成立。因此，$u(t)=t$ 属于扩展空间$\mathcal{L}_{\infty e}$。

如果在任何时刻 t，输出$(Hu)(t)$的值仅仅依赖于时刻 t 和时刻 t 以前的输入值，则这个映射 $H:\mathcal{L}_e^m\to\mathcal{L}_e^q$ 称为是因果的。这等价于

$$(Hu)_\tau=(Hu_\tau)_\tau$$

对于用状态模型表示的动态系统来说，因果关系是一个固有属性。

定义了输入和输出函数空间后，就可以定义输入-输出稳定性了。我们从定义增益函数开始。

定义 6.1　一个标量连续函数 $g(r)$，$r\in[0,a)$称为是增益函数，如果它是非减的且 $g(0)=0$。

显然，$\mathcal{K}$类函数是一个增益函数，但反过来不成立。由于没有要求增益函数是严格增的，因此 $g=0$ 和 $g(r)=\text{sat}(r)$都是增益函数。

定义 6.2　如果存在一个定义在$[0,\infty)$上的增益函数 g 和一个非负常数β，使得对所有的 $u\in\mathcal{L}_e^m$ 和$\tau\in[0,\infty)$，有

$$\|(Hu)_\tau\|_{\mathcal{L}}\leqslant g(\|u_\tau\|_{\mathcal{L}})+\beta \tag{6.1}$$

则称这个映射 $H:\mathcal{L}_e^m\to\mathcal{L}_e^q$ 是$\mathcal{L}$稳定的。

如果存在非负常数 γ 和 β，使得对所有的 $u\in\mathcal{L}_e^m$ 和$\tau\in[0,\infty)$，有

$$\|(Hu)_\tau\|_{\mathcal{L}}\leqslant\gamma\|u_\tau\|_{\mathcal{L}}+\beta \tag{6.2}$$

则称这个映射是有限增益$\mathcal{L}$稳定的。

式(6.1)或式(6.2)中的常数 β 被称为偏正项或预置值。在定义中出现 β 是为了当 $u=0$ 时允许 Hu 不等于 0。当不等式(6.2)成立时，我们称系统的$\mathcal{L}$增益不超过 γ。

对于因果系统，$\mathcal{L}$稳定可以用更简单的式子来表示：

$$u\in\mathcal{L}^m\Rightarrow Hu\in\mathcal{L}^q$$

123

和

$$\|Hu\|_{\mathcal{L}} \leqslant g(\|u\|_{\mathcal{L}}) + \beta, \quad \forall u \in \mathcal{L}^m$$

而因果系统的有限增益$\mathcal{L}$稳定则可以表述成

$$\|Hu\|_{\mathcal{L}} \leqslant \gamma\|u\|_{\mathcal{L}} + \beta, \quad \forall u \in \mathcal{L}^m$$

$\mathcal{L}_\infty$稳定就是熟悉的有界输入有界输出稳定。也就是说，如果系统是$\mathcal{L}_\infty$稳定，则对每个有界输入 $u(t)$，输出 $Hu(t)$总是有界的。

例 6.1 一个自变量为实数的实值函数 $h(u)$可以看作是一个算子 H，对每个输入$u(t)$，输出就是 $y(t)=h(u(t))$。我们用这个简单算子说明$\mathcal{L}$稳定的定义。假设

$$|h(u)| \leqslant a + b|u|, \quad \forall u \in R$$

那么，取 $\gamma=b$ 和 $\beta=a$，H 是有限增益$\mathcal{L}_\infty$稳定。如果 $a=0$，对每个 $p\in[1, \infty)$成立，

$$\int_0^\infty |h(u(t))|^p \mathrm{d}t \leqslant (b)^p \int_0^\infty |u(t)|^p \mathrm{d}t$$

那么，对每个 $p\in[1, \infty]$[⊖]，算子 H 是有限增益$\mathcal{L}_p$ 稳定且具有零偏正值和 $\gamma=b$。最后，如果 $h(u)=u^2$，那么 H 是$\mathcal{L}_\infty$稳定且具有零偏正值和 $g(r)=r^2$。但它不是有限增益$\mathcal{L}_\infty$稳定，因为对所有的 $u\in R$，$h(u)=u^2$ 的界不可以用 $\gamma|u|+\beta$表示。 ◀

例 6.2 考虑由如下的卷积算子定义的单输入-单输出因果系统

$$y(t) = \int_0^t h(t-\sigma)u(\sigma)\mathrm{d}\sigma$$

其中，当 $t<0$ 时，$h(t)=0$。假设 $h\in\mathcal{L}_{1e}$，也就是说，对每个 $\tau\in[0, \infty)$，

$$\|h_\tau\|_{\mathcal{L}_1} = \int_0^\infty |h_\tau(\sigma)|\mathrm{d}\sigma = \int_0^\tau h(\sigma)\mathrm{d}\sigma < \infty$$

如果 $u\in\mathcal{L}_{\infty e}$，以及 $\tau\geqslant t$，则

$$|y(t)| \leqslant \int_0^t |h(t-\sigma)|\,|u(\sigma)|\mathrm{d}\sigma \leqslant \int_0^t |h(t-\sigma)|\mathrm{d}\sigma \sup_{0\leqslant\sigma\leqslant\tau}|u(\sigma)|$$

$$= \int_0^t |h(s)|\mathrm{d}s \sup_{0\leqslant\sigma\leqslant\tau}|u(\sigma)|$$

因此，

$$\|y_\tau\|_{\mathcal{L}_\infty} \leqslant \|h_\tau\|_{\mathcal{L}_1}\|u_\tau\|_{\mathcal{L}_\infty}, \quad \forall \tau \in [0,\infty)$$

这个不等式类似于式(6.2)，但与式(6.2)不同，因为式(6.2)要求的是常数 γ，需要独立于 τ。尽管对每个有限的 τ，$\|h_\tau\|_{\mathcal{L}_1}$ 是有限的，但它未必关于 τ 是一致有界的。例如，$h(t)=\mathrm{e}^t$ 有$\|h_\tau\|_{\mathcal{L}_1}=(\mathrm{e}^\tau-1)$，对所有的 $\tau\in[0, \infty)$它是有限的，但是关于 τ 不可能一致有界。如果 $h\in\mathcal{L}_1$，就是

$$\|h\|_{\mathcal{L}_1} = \int_0^\infty |h(\sigma)|\mathrm{d}\sigma < \infty$$

此时，成立不等式

124

$$\|y_\tau\|_{\mathcal{L}_\infty} \leqslant \|h\|_{\mathcal{L}_1}\|u_\tau\|_{\mathcal{L}_\infty}, \quad \forall \tau \in [0,\infty)$$

即不等式(6.2)成立，系统是有限增益$\mathcal{L}_\infty$稳定的。进一步，条件$\|h\|_{\mathcal{L}_1}<\infty$还保证了对每个 $p\in[1, \infty]$，系统是有限增益$\mathcal{L}_p$ 稳定的。首先考虑 $p=1$ 的情形，对 $t\leqslant\tau<\infty$，我们有

⊖ $p\in[1, \infty]$是指允许 $p=\infty$，但这时不等式要改成$\sup_{t\geqslant0}|h(u(t))| \leqslant b\sup_{t\geqslant0}|u(t)|$。——译者注

$$\int_0^\tau |y(t)|\,dt = \int_0^\tau \left|\int_0^t h(t-\sigma)u(\sigma)d\sigma\right| dt \leqslant \int_0^\tau\int_0^t |h(t-\sigma)|\,|u(\sigma)|\,d\sigma dt$$

交换积分顺序，可得

$$\int_0^\tau |y(t)|\,dt \leqslant \int_0^\tau |u(\sigma)| \int_\sigma^\tau |h(t-\sigma)|\,dt d\sigma \leqslant \int_0^\tau |u(\sigma)|\,\|h\|_{\mathcal{L}_1} d\sigma \leqslant \|h\|_{\mathcal{L}_1}\|u_\tau\|_{\mathcal{L}_1}$$

因此

$$\|y_\tau\|_{\mathcal{L}_1} \leqslant \|h\|_{\mathcal{L}_1}\|u_\tau\|_{\mathcal{L}_1}, \quad \forall \tau \in [0,\infty)$$

现在考虑 $p\in(1,\ \infty)$的情形，令 $q\in(1,\ \infty)$，它满足$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$。对 $t\leqslant\tau<\infty$，我们有

$$|y(t)| \leqslant \int_0^t |h(t-\sigma)|\,|u(\sigma)|\,d\sigma = \int_0^t |h(t-\sigma)|^{\frac{1}{q}}\,|h(t-\sigma)|^{\frac{1}{p}}\,|u(\sigma)|\,d\sigma$$

利用 Hölder 不等式⊖，得到

$$\begin{aligned}|y(t)| &\leqslant \left(\int_0^t |h(t-\sigma)|\,d\sigma\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^t |h(t-\sigma)|\,|u(\sigma)|^p d\sigma\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leqslant (\|h_\tau\|_{\mathcal{L}_1})^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^t |h(t-\sigma)|\,|u(\sigma)|^p d\sigma\right)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

125

因此

$$\begin{aligned}(\|y_\tau\|_{\mathcal{L}_p})^p &= \int_0^\tau |y(t)|^p dt \leqslant \int_0^\tau (\|h_\tau\|_{\mathcal{L}_1})^{\frac{p}{q}} \left(\int_0^t |h(t-\sigma)|\,|u(\sigma)|^p d\sigma\right) dt \\ &= (\|h_\tau\|_{\mathcal{L}_1})^{\frac{p}{q}} \int_0^\tau\int_0^t |h(t-\sigma)|\,|u(\sigma)|^p d\sigma dt\end{aligned}$$

通过交换积分顺序，可得

$$\begin{aligned}(\|y_\tau\|_{\mathcal{L}_p})^p &\leqslant (\|h_\tau\|_{\mathcal{L}_1})^{\frac{p}{q}} \int_0^\tau |u(\sigma)|^p \int_\sigma^t |h(t-\sigma)|\,dt d\sigma \\ &\leqslant (\|h_\tau\|_{\mathcal{L}_1})^{\frac{p}{q}} \|h_\tau\|_{\mathcal{L}_1} (\|u_\tau\|_{\mathcal{L}_p})^p \\ &= (\|h_\tau\|_{\mathcal{L}_1})^p (\|u_\tau\|_{\mathcal{L}_p})^p\end{aligned}$$

因此

$$\|y_\tau\|_{\mathcal{L}_p} \leqslant \|h\|_{\mathcal{L}_1}\|u_\tau\|_{\mathcal{L}_p}$$

总之，如果$\|h\|_{\mathcal{L}_1}<\infty$，则对每个 $p\in[1,\ \infty]$，由卷积算子定义的因果系统是有限增益$\mathcal{L}_p$稳定的，且只要取 $\gamma=\|h\|_{\mathcal{L}_1}$，$\beta=0$，则式(6.2)满足。◀

定义 6.2 的一个缺点是不等式(6.1)或者不等式(6.2)需要对输入空间$\mathcal{L}^m$ 的所有函数成立。而有的时候输入只是输入空间的一个子集，这个定义就将这类情形排除在外了。下一个例子用来说明这个事实，它促使我们定义小信号$\mathcal{L}$稳定。

例 6.3 考虑一个单输入-单输出系统 $y=\tan u$，规定仅当输入在$|u(t)|<\frac{\pi}{2}$，$t\geqslant0$ 时，输出 $y(t)$才有定义。因此，在定义 6.2 的意义下，系统不是$\mathcal{L}_\infty$稳定。然而，如果限制 $u(t)$

⊖ Hölder 不等式是指如果 $f\in\mathcal{L}_{pe}$，$g\in\mathcal{L}_{pe}$，其中，$p\in(1,\ \infty)$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，则对任意的 $\tau\in[0,\ \infty)$

$$\int_0^\tau |f(t)g(t)|\,dt \leqslant \left(\int_0^\tau |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^\tau |g(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

(参阅文献[7])。

在$|u| \leqslant r < \frac{\pi}{2}$内，则下式成立：

$$|y| \leqslant \left(\frac{\tan r}{r}\right)|u|$$

即得不等式

$$\|y\|_{\mathcal{L}_p} \leqslant \left(\frac{\tan r}{r}\right)\|u\|_{\mathcal{L}_p}$$

对每个$u \in \mathcal{L}_p$成立，其中，$|u(t)| \leqslant r$，$\forall t \geqslant 0$，p是$[1, \infty]$中的任何数。在$\mathcal{L}_\infty$空间，$|u(t)| \leqslant r$意味着$\|u\|_{\mathcal{L}_\infty} \leqslant r$，表明前面的不等式仅仅对范数较小的输入信号成立。然而，对$p < \infty$的空间$\mathcal{L}_p$，输入信号的范数可以不必受上界r的限制。例如，对每个$p \in [1, \infty)$[⊖]，函数

126

$$u(t) = r e^{-\frac{rt}{a}}, \quad a > 0$$

属于$\mathcal{L}_p$，且它满足$|u(t)| \leqslant r$，但它的$\mathcal{L}_p$范数

$$\|u\|_{\mathcal{L}_p} = r\left(\frac{a}{rp}\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leqslant p < \infty$$

可以任意大。◀

定义 6.3 如果存在一个正数r使得不等式(6.1)(式(6.2))对所有满足$\sup_{0 \leqslant t}\|u(t)\| \leqslant r$的$u \in \mathcal{L}_e^m$和所有$\tau \in [0, \infty)$成立，则这个映射$H: \mathcal{L}_e^m \to \mathcal{L}_e^q$称为是小信号$\mathcal{L}$稳定(相应地，小信号有限增益$\mathcal{L}$稳定)。

6.2 状态模型的$\mathcal{L}$稳定性

直观上，输入-输出稳定性定义是很有吸引力的，这就是我们将其扩展到动态系统的有界输入-有界输出稳定的原因。在 Lyapunov 稳定性理论中，我们着重研究了平衡点的稳定性和状态变量趋向无穷时的行为。人们自然要问：从 Lyapunov 稳定理论出发，输入-输出稳定性能有什么结果？在这一小节中，我们将说明利用 Lyapunov 稳定理论可以建立由状态模型描述的非线性系统的$\mathcal{L}$稳定性。

考虑系统

$$\dot{x} = f(x, u), \quad y = h(x, u) \tag{6.3}$$

设初始状态$x(0) = x_0$，其中f是局部 Lipschitz 的，对所有的$x \in D$和$u \in D_u$，h是连续的，其中$D \subset R^n$是包含$x = 0$的一个区域，$D_u \subset R^m$是包含$u = 0$的一个区域。输出y的维数q与输入u的维数m可以是不同的。对每个固定的初始状态$x_0 \in D$，状态模型式(6.3)定义了一个算子H，它对每个输入信号$u(t)$，对应到其产生的输出信号$y(t)$。假设$x = 0$是如下零输入系统的一个平衡点

$$\dot{x} = f(x, 0) \tag{6.4}$$

如果式(6.4)表示的系统原点是渐近(或者指数)稳定的，则对f和h做一些怎样的假设，就能使得系统式(6.3)对某个输入空间$\mathcal{L}$是$\mathcal{L}$稳定的或者小信号$\mathcal{L}$稳定的？我们首先在指数稳定的情形下进行研究，然后扩展到渐近稳定情形。

⊖ 原文为$p \in [1, \infty]$，与下文$1 \leqslant p < \infty$不符，故此处有修正。——译者注

定理 6.1　考虑系统式(6.3)，取 $r>0$ 和 $r_u>0$ 使得 $\{\|x\|\leqslant r\}\subset D$，$\{\|u\|\leqslant r_u\}\subset D_u$。设对所有的 $x\in D$ 和 $u\in D_u$，如下条件成立：

127

- $x=0$ 是 $\dot{x}=f(x,0)$ 的一个指数稳定平衡点，且存在 Lyapunov 函数 $V(x)$ 和正数 c_i，$i=1,2,3,4$，使得

$$c_1\|x\|^2\leqslant V(x)\leqslant c_2\|x\|^2,\quad \frac{\partial V}{\partial x}f(x,0)\leqslant -c_3\|x\|^2,\quad \left\|\frac{\partial V}{\partial x}\right\|\leqslant c_4\|x\| \tag{6.5}$$

- 存在非负常数 L、η_1 和 η_2，使得 f 和 h 满足不等式

$$\|f(x,u)-f(x,0)\|\leqslant L\|u\| \tag{6.6}$$

$$\|h(x,u)\|\leqslant \eta_1\|x\|+\eta_2\|u\| \tag{6.7}$$

那么，对所有满足 $\|x_0\|\leqslant r\sqrt{\frac{c_1}{c_2}}$ 的初始条件 x_0，系统(6.3)是小信号有限增益 $\mathcal{L}_p$ 稳定，其中 $p\in[1,\infty]$。特别的，对每个输入 $u\in\mathcal{L}_{pe}$，它满足 $\sup_{0\leqslant t\leqslant\tau}\|u(t)\|\leqslant\min\left\{r_u,\ \frac{c_1c_3r}{(c_2c_4L)}\right\}$。那么对所有的 $\tau\in[0,\infty)$，输出 $y(t)$ 满足

$$\|y_\tau\|_{\mathcal{L}_p}\leqslant\gamma\|u_\tau\|_{\mathcal{L}_p}+\beta \tag{6.8}$$

其中，

$$\gamma=\eta_2+\frac{\eta_1c_2c_4L}{c_1c_3},\quad \beta=\eta_1\rho\|x_0\|\sqrt{\frac{c_2}{c_1}},\quad 和\ \rho=\begin{cases}1, & 如果\ p=\infty\\ \left(\frac{2c_2}{c_3p}\right)^{\frac{1}{p}}, & 如果\ p\in[1,\infty)\end{cases}$$

进一步，如果原点是全局指数稳定且上述假设全局成立(此时 $D=R^n$ 和 $D_u=R^m$)，则对每个 $x_0\in R^n$，系统(6.3)对每个 $p\in[1,\infty]$ 是有限增益 $\mathcal{L}_p$ 稳定的，并且对每个 $u\in\mathcal{L}_{pe}$，不等式(6.8)总成立。

证明：考察 V 沿着 $\dot{x}=f(x,u)$ 轨线的导数

$$\begin{aligned}\dot{V}&=\frac{\partial V}{\partial x}f(x,0)+\frac{\partial V}{\partial x}[f(x,u)-f(x,0)]\\&\leqslant -c_3\|x\|^2+c_4L\|x\|\|u\|\leqslant -\frac{c_3}{c_2}V+\frac{c_4L}{\sqrt{c_1}}\|u\|\sqrt{V}\end{aligned}$$

令 $W(x)=\sqrt{V(x)}$。当 $V(x(t))\neq 0$，可得 $\dot{W}$ 为

$$\dot{W}=\frac{\dot{V}}{2\sqrt{V}}\leqslant -\frac{c_3}{2c_2}W+\frac{c_4L}{2\sqrt{c_1}}\|u\| \tag{6.9}$$

当 $V(x(t))=0$ 时，直接计算 W 的导数，得到[⊖]

128

$$\dot{W}=\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta}[W(x(t+\delta))-W(x(t))]\leqslant\frac{c_4L}{2\sqrt{c_1}}\|u\|$$

因此，不等式(6.9)总成立。设 $a=\frac{c_3}{(2c_2)}$ 和 $b=\frac{c_4L}{(2\sqrt{c_1})}$，将式(6.9)写成

$$\dot{W}\leqslant -aW+b\|u\|$$

设 $U(t)=\mathrm{e}^{at}W(x(t))$，则对

$$\dot{U}=\mathrm{e}^{at}\dot{W}+a\mathrm{e}^{at}W\leqslant -a\mathrm{e}^{at}W+b\mathrm{e}^{at}\|u\|+a\mathrm{e}^{at}W=b\mathrm{e}^{at}\|u\|$$

⊖　参看练习 3.24 和文献[74]中的 5.6 节，了解如何得到这个不等式。

两边积分，可得

$$U(t) \leqslant U(0) + \int_0^t b\mathrm{e}^{a\tau} \|u(\tau)\| \mathrm{d}\tau$$

因此

$$W(x(t)) \leqslant \mathrm{e}^{-at} W(x(0)) + \int_0^t \mathrm{e}^{-a(t-\tau)} b \|u(\tau)\| \mathrm{d}\tau$$

注意到

$$\sqrt{c_1}\|x\| \leqslant W(x) \leqslant \sqrt{c_2}\|x\|$$

将 $b=\frac{c_4 L}{(2\sqrt{c_1})}$ 代入，可得

$$\|x(t)\| \leqslant \sqrt{\frac{c_2}{c_1}}\|x_0\|\mathrm{e}^{-at} + \frac{c_4 L}{2c_1}\int_0^t \mathrm{e}^{-a(t-\tau)}\|u(\tau)\|\mathrm{d}\tau \tag{6.10}$$

直接验证可知，当

$$\|x_0\| \leqslant r\sqrt{\frac{c_1}{c_2}} \quad 和 \quad \sup_{0\leqslant\sigma\leqslant t}\|u(\sigma)\| \leqslant \frac{c_1 c_3 r}{c_2 c_4 L}$$

时，$\|x(t)\|\leqslant r$；因此 $x(t)$ 位于假设条件的有效区域内，即 $x(t)\in D$。用式(6.7)，可得

$$\|y(t)\| \leqslant k_1\mathrm{e}^{-at} + k_2\int_0^t \mathrm{e}^{-a(t-\tau)}\|u(\tau)\|\mathrm{d}\tau + k_3\|u(t)\|$$

其中，

$$k_1 = \sqrt{\frac{c_2}{c_1}}\|x_0\|\eta_1, \quad k_2 = \frac{c_4 L\eta_1}{2c_1}, \quad k_3 = \eta_2$$

设

$$y_1(t) = k_1\mathrm{e}^{-at}, \quad y_2(t) = k_2\int_0^t \mathrm{e}^{-a(t-\tau)}\|u(\tau)\|\mathrm{d}\tau, \quad y_3(t) = k_3\|u(t)\|$$

假设对于 $p\in[1,\infty]$，有 $u\in\mathcal{L}_{pe}^m$，可得 $\|y_{3\tau}\|_{\mathcal{L}_p}\leqslant k_3\|u_\tau\|_{\mathcal{L}_p}$，利用例 6.2 的结果，可以证明 $\|y_{2\tau}\|_{\mathcal{L}_p}\leqslant\left(\frac{k_2}{a}\right)\|u_\tau\|_{\mathcal{L}_p}$。关于第一项 $y_1(t)$，可以验证

$$\|y_{1\tau}\|_{\mathcal{L}_p} \leqslant k_1\rho, \quad 其中, \rho = \begin{cases} 1, & 如\ p=\infty \\ \left(\frac{1}{ap}\right)^{\frac{1}{p}}, & 如\ p\in[1,\infty) \end{cases}$$

129

因此，利用三角不等式，式(6.8)成立，其中，

$$\gamma = k_3 + \frac{k_2}{a}, \quad \beta = k_1\rho$$

当所有的假设全局成立时，就不再需要限制 $\|x_0\|$ 或 $\|u(t)\|$。因此，式(6.8)对每个 $x_0\in R^n$ 和 $u\in\mathcal{L}_{pe}$ 都成立。 □

应用 Lyapunov 逆定理(定理 3.8)，存在一个满足式(6.5)的 Lyapunov 函数。因此，我们有如下的推论。

推论 6.1 假设在原点($x=0$，$u=0$)的某个邻域内，f 是连续可微的而 h 满足式(6.7)。如果原点 $x=0$ 是 $\dot{x}=f(x,0)$ 的一个指数稳定平衡点，那么存在一个常数 $r_0>0$ 使得对每个 x_0 满足 $\|x_0\|<r_0$，系统式(6.3)对每个 $p\in[1,\infty]$ 是小信号有限增益 $\mathcal{L}_p$ 稳定的。进一步，如果假设全局成立，原点是全局指数稳定的，且 f 是全局 Lipschitz 的，则对每个 $x_0\in R^n$，系统式(6.3)对每个 $p\in[1,\infty]$ 是有限增益 $\mathcal{L}_p$ 稳定的。

例 6.4 考虑如下系统

$$\dot{x} = -x - x^3 + u, \quad y = \tanh x + u$$

其初值为 $x(0)=x_0$。当采用 Lyapunov 函数 $V(x)=\frac{1}{2}x^2$ 时，原点是 $\dot{x}=-x-x^3$ 的全局指数稳定平衡点。取 $c_1=c_2=\frac{1}{2}$，$c_3=c_4=1$，函数 V 全局满足式(6.5)。取 $L=\eta_1=\eta_2=1$，则函数 f 和 h 全局满足式(6.6)和式(6.7)。因此，对每个 $x_0\in R$ 和 $p\in[1, \infty]$，系统是有限增益 $\mathcal{L}_p$ 稳定的。 ◀

例 6.5 考虑如下系统

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 - a\tanh x_1 + u, \quad y = x_1$$

其中，a 是一个非负常数。设

$$V(x) = x^{\mathrm{T}}Px = p_{11}x_1^2 + 2p_{12}x_1x_2 + p_{22}x_2^2$$

将 V 作为零输入系统的备选 Lyapunov 函数，那么

$$\dot{V} = -2p_{12}(x_1^2 + ax_1\tanh x_1) + 2(p_{11} - p_{12} - p_{22})x_1x_2 - 2ap_{22}x_2\tanh x_1 - 2(p_{22} - p_{12})x_2^2$$

选择 $p_{11}=p_{12}+p_{22}$ 来抵消交叉项 x_1x_2。然后，取 $p_{22}=2p_{12}=1$ 使得 P 正定，这样得到

$$\dot{V}(x) = -x_1^2 - x_2^2 - ax_1\tanh x_1 - 2ax_2\tanh x_1$$

130

注意到对所有的 x_1，$x_1\tanh x_1\geqslant 0$ 和 $|\tanh x_1|\leqslant|x_1|$，我们得到

$$\dot{V}(x) \leqslant -\|x\|^2 + 2a|x_1||x_2| \leqslant -(1-a)\|x\|^2$$

因此，对所有的 $a<1$，取 $c_1=\lambda_{\min}(P)$，$c_2=\lambda_{\max}(P)$，$c_3=1-a$ 和 $c_4=2\|P\|=2\lambda_{\max}(P)$，函数 V 全局满足式(6.5)。取 $L=\eta_1=1$ 和 $\eta_2=0$，函数 f 和 h 全局满足式(6.6)和式(6.7)。因此，对每个 $x_0\in R^2$ 和 $p\in[1, \infty]$，系统是有限增益 $\mathcal{L}_p$ 稳定的，且它的 $\mathcal{L}_p$ 增益可以由 $\gamma=\frac{2[\lambda_{\max}(P)]^2}{[(1-a)\lambda_{\min}(P)]}$ 给出。 ◀

现在转而讨论当 $\dot{x}=f(x, 0)$ 的原点是渐近稳定的情形，我们只研究 $\mathcal{L}_\infty$ 稳定性。下面两个定理分别给出了 $\mathcal{L}_\infty$ 稳定和小信号 $\mathcal{L}_\infty$ 稳定的条件。

定理 6.2 考虑系统式(6.3)，假设对所有的 (x, u)，f 是局部 Lipschitz 的，h 是连续的，且存在增益函数 g_1 和 g_2 和一个非负常数 η，使得下列不等式成立

$$\|h(x,u)\| \leqslant g_1(\|x\|) + g_2(\|u\|) + \eta \tag{6.11}$$

那么当系统 $\dot{x}=f(x, u)$ 是输入-状态稳定的时候，对任意 $x_0\in R^n$，系统(6.3)是 $\mathcal{L}_\infty$ 稳定的。

证明： 输入-状态稳定意味着对所有的 $t\geqslant 0$，$\|x(t)\|$ 满足不等式

$$\|x(t)\| \leqslant \max\{\beta(\|x_0\|,t), \quad \gamma(\sup_{0\leqslant\sigma\leqslant t}\|u(\sigma)\|)\} \tag{6.12}$$

其中，β 和 γ 分别是 $\mathcal{KL}$ 类函数和 $\mathcal{K}$ 类函数。利用不等式(6.11)，我们可得

$$\begin{aligned}\|y(t)\| &\leqslant g_1(\max\{\beta(\|x_0\|,t),\gamma(\sup_{0\leqslant\sigma\leqslant t}\|u(\sigma)\|)\}) + g_2(\|u(t)\|) + \eta \\ &\leqslant g_1(\beta(\|x_0\|,t)) + g_1(\gamma(\sup_{0\leqslant\sigma\leqslant t}\|u(\sigma)\|)) + g_2(\|u(t)\|) + \eta\end{aligned}$$

其中利用了性质 $g_1(\max\{a, b\})\leqslant g_1(a)+g_1(b)$，容易证明这个性质对任何增益函数都成立。因此，对所有的 $\tau\in[0, \infty)$

$$\|y_\tau\|_{\mathcal{L}_\infty} \leqslant g(\|u_\tau\|_{\mathcal{L}_\infty}) + \beta_0 \tag{6.13}$$

其中 $g=g_1\circ\gamma+g_2$ 和 $\beta_0=g_1(\beta((\|x_0\|), 0))+\eta$。 □

定理 6.3 考虑系统式(6.3)，其中 f 是局部 Lipschitz 的，且 h 在原点($x=0$，$u=0$)的某个邻域内连续。如果 $\dot{x}=f(x, 0)$的原点是渐近稳定，那么存在一个常数 $k>0$，使得对满足$\|x_0\|<k$ 的任何 x_0，系统式(6.3)是小信号$\mathcal{L}_\infty$稳定的。

131

证明： 由引理 4.7，系统式(6.3)是局部输入-状态稳定。因此，存在正常数 k 和 k_1，使得不等式(6.12)对所有的$\|x(0)\|\leqslant k$ 和$\|u(t)\|\leqslant k_1$ 都成立。由于 h 是连续的，不等式(6.11)在原点($x=0$，$u=0$)的某个邻域内成立。剩余部分的证明与定理 6.2 的证明完全一样，略。□

例 6.6 考虑系统

$$\dot{x}=-x-2x^3+(1+x^2)u^2, \quad y=x^2+u$$

在例 4.13 中，我们已经看到此状态方程是输入-状态稳定的。取 $g_1(r)=r^2$，$g_2(r)=r$ 和 $\eta=0$，输出函数 h 全局满足(6.11)。因此，系统是$\mathcal{L}_\infty$稳定的。◀

例 6.7 考虑系统

$$\dot{x}_1=-x_1^3+x_2, \quad \dot{x}_2=-x_1-x_2^3+u, \quad y=x_1+x_2$$

取 $V=(x_1^2+x_2^2)$，我们有

$$\dot{V}=-2x_1^4-2x_2^4+2x_2u$$

利用 $x_1^4+x_2^4\geqslant\frac{1}{2}\|x\|^4$，可得

$$\begin{aligned}\dot{V}&\leqslant-\|x\|^4+2\|x\|\,|u|\\&=-(1-\theta)\|x\|^4-\theta\|x\|^4+2\|x\|\,|u|, \quad 0<\theta<1\\&\leqslant-(1-\theta)\|x\|^4, \forall\|x\|\geqslant\left(\frac{2|u|}{\theta}\right)^{\frac{1}{3}}\end{aligned}$$

当取 $\alpha_1(r)=\alpha_2(r)=r^2$，$W_3(x)=(1-\theta)\|x\|^4$ 和 $\rho(r)=\left(\frac{2r}{\theta}\right)^{\frac{1}{3}}$ 时，V 全局满足定理 4.6 的不等式(4.36)和不等式(4.37)。因此状态方程是输入-状态稳定。进一步，当 $g_1(r)=\sqrt{2}r$，$g_2=0$ 和 $\eta=0$ 时，函数 $h=x_1+x_2$ 全局满足式(6.11)。因此，系统是$\mathcal{L}_\infty$稳定的。◀

6.3 $\mathcal{L}_2$ 增益

$\mathcal{L}_2$ 稳定在系统分析中扮演着特殊的角色，因为习惯上都采用平方可积函数作为系统输入、输出信号，这样的信号称为有限能量信号[㊀]。在许多控制问题中[㊁]，从干扰输入 u 到被控输出 y 之间习惯采用输入-输出描述，而要求 y 是一个很小的信号。将输入信号取成$\mathcal{L}_2$函数，就可以要求控制系统的输入-输出模型是有限增益$\mathcal{L}_2$ 稳定的，并可以进一步要求$\mathcal{L}_2$增益实现最小化。在这类问题中[㊂]，重要的不仅是判别系统是有限增益$\mathcal{L}_2$ 稳定的，还要能进一步算出$\mathcal{L}_2$ 增益或者它的上界。这一节将对一些特殊的系统给出如何计算$\mathcal{L}_2$ 增益的上界的方法。我们从线性系统开始。

132

定理 6.4 考虑线性系统

㊀ 如果将 $u(t)$认为是电流或者电压，则 $u^{\mathrm{T}}(t)u(t)$正比于信号在 t 时刻的瞬时功率，它关于时间的积分是信号能量的一个度量。

㊁ 参见关于 H_∞控制的文献，例如，文献[14]、[37]、[41]、[68]、[143]或[154]。

㊂ 这类问题通常称为干扰抑制，希望干扰到输出间的增益尽量小。——译者注

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du$$

其中，A 是 Hurwitz 矩阵。令 $G(s)=C(sI-A)^{-1}B+D$，则系统的$\mathcal{L}_2$ 增益小于或者等于$\sup_{\omega\in R}\|G(j\omega)\|$[㊀]。

证明：由于线性，我们设置 $x(0)=0$。从 Fourier 变换理论[㊁]可知，因果信号 $u\in\mathcal{L}_2$ 的 Fourier 变换 $U(j\omega)$为

$$U(j\omega) = \int_0^{\infty} u(t)e^{-j\omega t}dt, \quad 且 \quad Y(j\omega) = G(j\omega)U(j\omega)$$

应用 Parseval 定理[㊂]，有

$$\begin{aligned}\|y\|_{\mathcal{L}_2}^2 &= \int_0^{\infty} y^T(t)y(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Y^*(j\omega)Y(j\omega)d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} U^*(j\omega)G^T(-j\omega)G(j\omega)U(j\omega)d\omega \\ &\leqslant (\sup_{w\in R}\|G(j\omega)\|)^2 \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} U^*(j\omega)U(j\omega)d\omega \\ &= (\sup_{w\in R}\|G(j\omega)\|)^2\|u\|_{\mathcal{L}_2}^2\end{aligned}$$

这就说明了$\mathcal{L}_2$ 增益小于或者等于$\sup_{\omega\in R}\|G(j\omega)\|$。　□

进一步可以证明$\sup_{\omega\in R}\|G(j\omega)\|$确实是系统的$\mathcal{L}_2$ 增益，而不仅仅是它的一个上界[㊃]。对非线性系统，我们给出定理 6.5 和定理 6.6 来估计$\mathcal{L}_2$ 增益。这两个定理证明都基于如下引理。

133

引理 6.1　考虑多输入-多输出系统

$$\dot{x} = f(x,u), \quad y = h(x,u) \tag{6.14}$$

其中，$x(0)=x_0$，$f(0, 0)=0$，$h(0, 0)=0$，对所有的 $x\in R^n$ 和 $u\in R^m$，f 是局部 Lipschitz 的和 h 是连续的。令 $V(x)$是一个连续可微、半正定函数，使得对所有的(x, u)有

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x}f(x,u) \leqslant k(\gamma^2\|u\|^2 - \|y\|^2) \tag{6.15}$$

其中，k 和 γ 为正常数，那么对每个 $x_0\in R^n$，系统是有限增益$\mathcal{L}_2$ 稳定的，且它的增益小于或者等于 γ。

证明：对式(6.15)的两端在区间$[0, \tau]$上积分，可得

$$V(x(\tau)) - V(x(0)) \leqslant k\gamma^2\int_0^{\tau}\|u(t)\|^2dt - k\int_0^{\tau}\|y(t)\|^2dt$$

由于 $V(x(\tau))\geqslant 0$，

$$\int_0^{\tau}\|y(t)\|^2dt \leqslant \gamma^2\int_0^{\tau}\|u(t)\|^2dt + \frac{V(x(0))}{k}$$

两边开方并利用不等式$\sqrt{a^2+b^2}\leqslant a+b$($a$，$b$ 是非负实数)，可得

$$\|y_\tau\|_{\mathcal{L}_2} \leqslant \gamma\|u_\tau\|_{\mathcal{L}_2} + \sqrt{\frac{V(x(0))}{k}} \tag{6.16}$$

㊀ 这是复数矩阵 $G(j\omega)$的诱导 2 范数，该范数等于 $\sqrt{\lambda_{\max}[G^T(-j\omega)G(j\omega)]} = \sigma_{\max}|G(j\omega)|$。当 $G(j\omega)$被当作是 Hardy 空间 H_∞ 的一个元素时，这个量可以认为是 $G(j\omega)$的 H_∞ 范数(参见文献[41])。

㊁ 参见文献[35]。

㊂ Parseval 定理(文献[35])说明对一个因果信号 $\lambda\in\mathcal{L}_2$，下式成立：

$$\int_0^{\infty} y^T(t)y(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Y^*(j\omega)Y(j\omega)d\omega$$

㊃ 参见文献[74，定理 5.4]。

这证明了引理的结论。 □

定理 6.5 考虑多输入-多输出系统

$$\dot{x}=f(x,u),\quad y=h(x,u) \tag{6.17}$$

其中，$x(0)=x_0$，$f(0,0)=0$，$h(0,0)=0$，对所有的 $x\in R^n$ 和 $u\in R^m$，f 是局部 Lipschitz 的和 h 是连续的。如果系统是输出严格无源的，且

$$u^{\mathrm{T}}y\geqslant \dot{V}+\delta y^{\mathrm{T}}y,\quad \delta>0 \tag{6.18}$$

则系统是有限增益$\mathcal{L}_2$ 稳定的，且它的增益小于或者等于$\frac{1}{\delta}$。

证明：

$$\dot{V}\leqslant u^{\mathrm{T}}y-\delta y^{\mathrm{T}}y=-\frac{1}{2\delta}(u-\delta y)^{\mathrm{T}}(u-\delta y)+\frac{1}{2\delta}u^{\mathrm{T}}u-\frac{\delta}{2}y^{\mathrm{T}}y$$

$$\leqslant\frac{\delta}{2}\left(\frac{1}{\delta^2}u^{\mathrm{T}}u-y^{\mathrm{T}}y\right)$$

134 应用引理 6.1，定理获证。 □

定理 6.6 考虑多输入多输出系统

$$\dot{x}=f(x)+G(x)u,\quad y=h(x) \tag{6.19}$$

其中，$x(0)=x_0$，$f(0)=0$，$h(0)=0$，对所有的 $x\in R^n$，f 和 G 都是局部 Lipschitz 的且 h 是连续的。如果存在连续可微、半正定函数 $V(x)$对所有的 $x\in R^n$ 成立不等式

$$\frac{\partial V}{\partial x}f(x)+\frac{1}{2\gamma^2}\frac{\partial V}{\partial x}G(x)G^{\mathrm{T}}(x)\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}}+\frac{1}{2}h^{\mathrm{T}}(x)h(x)\leqslant 0 \tag{6.20}$$

其中，γ 是一个正常数，则对每个 $x_0\in R^n$，系统(6.19)是有限增益$\mathcal{L}_2$ 稳定，且它的增益小于或者等于 γ。

证明： 通过配方，可得

$$\frac{\partial V}{\partial x}f(x)+\frac{\partial V}{\partial x}G(x)u=-\frac{1}{2}\gamma^2\left\|u-\frac{1}{\gamma^2}G^{\mathrm{T}}(x)\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}}\right\|^2+\frac{\partial V}{\partial x}f(x)+$$
$$\frac{1}{2\gamma^2}\frac{\partial V}{\partial x}G(x)G^{\mathrm{T}}(x)\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}}+\frac{1}{2}\gamma^2\|u\|^2$$

将式(6.20)代入，可得

$$\frac{\partial V}{\partial x}f(x)+\frac{\partial V}{\partial x}G(x)u\leqslant\frac{1}{2}\gamma^2\|u\|^2-\frac{1}{2}\|y\|^2-\frac{1}{2}\gamma^2\left\|u-\frac{1}{\gamma^2}G^{\mathrm{T}}(x)\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}}\right\|^2$$

因此，

$$\dot{V}\leqslant\frac{1}{2}(\gamma^2\|u\|^2-\|y\|^2)$$

应用引理 6.1，证明完成。 □

不等式(6.20)称为 Hamilton-Jacobi 不等式(当用等号代替不等号时，称为 Hamilton-Jacobi 方程)。寻找满足式(6.20)的函数 $V(x)$一般需要解一个偏微分方程。与定理 6.1 不同，用定理 6.5 和 6.6 判别的有限增益$\mathcal{L}_2$ 稳定性结果不要求零输入系统的原点是指数稳定的。这一点可以从下面例子中得到说明。

例 6.8 考虑单输入-单输出系统

$$\dot{x}_1=x_2,\quad \dot{x}_2=-ax_1^3-kx_2+u,\quad y=x_2$$

其中，a 和 k 是正常数。它的零输入系统是例 3.8 的一个特例，Lyapunov 函数可以取为

$V(x)=\frac{1}{4}ax_1^4+\frac{1}{2}x_2^2$。当 $u\neq 0$ 时，

$$\dot{V}=ax_1^3x_2-ax_1^3x_2-kx_2^2+x_2u=-kx_2^2+x_2u$$

135

因此

$$yu=\dot{V}+ky^2$$

从定理 6.5 可知该系统是有限增益$\mathcal{L}_2$ 稳定的，且它的增益不超过$\frac{1}{k}$。取 $\gamma=\frac{1}{k}$可以证明

$$V(x)=\left(\frac{1}{k}\right)\left(\frac{1}{4}ax_1^4+\frac{1}{2}x_2^2\right)$$

满足 Hamilton-Jacobi 不等式(6.20)。应用定理 6.6，可以得到相同的结论。注意到在这个例子中，定理 6.1 的条件并不满足，因为零输入系统的原点不是指数稳定的。原点的线性化可得到矩阵

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -k\end{bmatrix}$$

它不是 Hurwitz 的。◀

例 6.9 考虑线性系统

$$\dot{x}=Ax+Bu,\quad y=Cx$$

假设 $P\geqslant 0$ 是如下 Riccati 方程一个解

$$PA+A^{\mathrm{T}}P+\frac{1}{\gamma^2}PBB^{\mathrm{T}}P+C^{\mathrm{T}}C=0 \tag{6.21}$$

其中，$\gamma>0$ 为常数。取 $V(x)=\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Px$，因$\left[\frac{\partial V}{\partial x}\right]=x^{\mathrm{T}}P$，容易看出 $V(x)$满足 Hamilton-Jacobi 方程

$$x^{\mathrm{T}}PAx+\frac{1}{2\gamma^2}x^{\mathrm{T}}PB^{\mathrm{T}}BPx+\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}Cx=0$$

因此，系统是有限增益$\mathcal{L}_2$ 稳定的，且它的增益不超过 γ。◀

在引理 6.1 中，我们假设不等式(6.15)是全局成立。从证明来看，如果不等式仅仅对 $x\in D\subset R^n$ 和 $u\in D_u\subset R^m$ 成立，其中 D 和 D_u 是分别包含 $x=0$ 和 $u=0$ 的区域，那么，只要 $x(t)$ 和 $u(t)$ 对所有的 $t\geqslant 0$ 都存于 D 和 D_u 中，仍将得到不等式(6.16)。当$\|x_0\|$和$\sup_{0\leqslant t\leqslant\tau}\|u(t)\|$充分小时，可以由 $\dot{x}=f(x,0)$的原点的渐近稳定性保证此时 $x(t)$仍在原点的某个邻域内。用这个事实来证明下面关于小信号$\mathcal{L}_2$ 稳定的引理。

引理 6.2 假定引理 6.1 的条件在 $x\in D\subset R^n$ 和 $u\in D_u\subset R^m$ 时成立，其中 D 和 D_u 分别是包含 $x=0$ 和 $u=0$ 的区域。进一步假设 $x=0$ 是 $\dot{x}=f(x,0)$的一个渐近稳定平衡点。那么，存在$r>0$，使得对每个 x_0 满足$\|x_0\|\leqslant r$，系统式(6.14)是小信号有限增益$\mathcal{L}_2$ 稳定的，且它的增益不超过 γ。

136

证明：根据引理 4.7，系统 $\dot{x}=f(x,u)$是局部输入状态稳定的。因此，存在正数 k_1、k_2、$\mathcal{KL}$类函数 β 和$\mathcal{K}$类函数 γ_0，使得当初始状态$\|x_0\|\leqslant k_1$ 且输入满足$\sup_{0\leqslant t\leqslant\tau}\|u(t)\|\leqslant k_2$ 时，对所有的 $0\leqslant t\leqslant\tau$，解 $x(t)$满足

$$\|x(t)\|\leqslant\max\{\beta(\|x_0\|,t),\gamma_0(\sup_{0\leqslant\sigma\leqslant t}\|u(\sigma)\|)\}$$

因此，通过选择 k_1 和 k_2 足够小，我们就能保证对所有的 $0\leqslant t\leqslant\tau$，$x\in D$ 和 $u\in D_u$。类似

于引理 6.1 的证明过程，我们可得到式(6.16)。 □

应用引理 6.2，可以得到定理 6.5 和定理 6.6 关于小信号的对应结论。

定理 6.7 考虑系统(式(6.17))。假设式(6.18)在原点($x=0$，$u=0$)的某个邻域成立，且 $x=0$ 是 $\dot{x}=f(x, 0)$的一个渐近稳定平衡点。那么，系统是小信号有限增益$\mathcal{L}_2$ 稳定的，且它的$\mathcal{L}_2$ 增益小于或等于$\dfrac{1}{\delta}$。

定理 6.8 结合系统式(6.19)，假设式(6.20)在原点($x=0$，$u=0$)的某个邻域成立，且 $x=0$ 是 $\dot{x}=f(x)$的一个渐近稳定平衡点。那么，系统是小信号有限增益$\mathcal{L}_2$ 稳定的，且它的$\mathcal{L}_2$ 增益小于或等于 γ。

例 6.10 对例 6.8 做一点变化，考虑系统

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -a(x_1 - \frac{1}{3}x_1^3) - kx_2 + u, \quad y = x_2$$

其中，a、$k>0$。函数 $V(x)=a\left(\frac{1}{2}x_1^2-\frac{1}{12}x_1^4\right)+\frac{1}{2}x_2^2$ 在集合$\{|x_1|\leqslant\sqrt{6}\}$上是半正定的，且满足不等式(6.18)，由于

$$\dot{V} = -kx_2^2 + x_2 u = -ky^2 + yu$$

当 $u=0$ 时，$\dot{V}=-kx_2^2\leqslant 0$。原点的渐近稳定性可通过 LaSalle 不变性原理得到，具体为当$\{|x_1|<\sqrt{3}\}$时，有

$$x_2(t)\equiv 0 \Rightarrow x_1(t)[3-x_1^2(t)]\equiv 0 \Rightarrow x_1(t)\equiv 0$$

或者通过线性化系统来说明，线性化会产生一个 Hurwitz 矩阵。用定理 6.7，我们可推断出系统是小信号有限增益$\mathcal{L}_2$ 稳定的，且它的$\mathcal{L}_2$ 增益是不超过$\dfrac{1}{k}$的。 ◀

6.4 练习

137

6.1 证明两个$\mathcal{L}$稳定(相应地，有限增益$\mathcal{L}$稳定)系统的串联是$\mathcal{L}$稳定(有限增益$\mathcal{L}$稳定)的。

6.2 证明两个$\mathcal{L}$稳定(相应地，有限增益$\mathcal{L}$稳定)系统的并联是$\mathcal{L}$稳定(有限增益$\mathcal{L}$稳定)的。

6.3 考虑无记忆函数 $y=h(u)$，其中 h 属于扇形域$[\alpha, \beta]$，其中，$\beta>\alpha\geqslant 0$。证明对每个 $p\in[1, \infty]$，h 是有限增益$\mathcal{L}_p$ 稳定的，且给出$\mathcal{L}_p$ 增益的估计。

6.4 对图 6.1 中每个图所表示的继电器特性，考察其$\mathcal{L}_\infty$和$\mathcal{L}_2$ 稳定性。

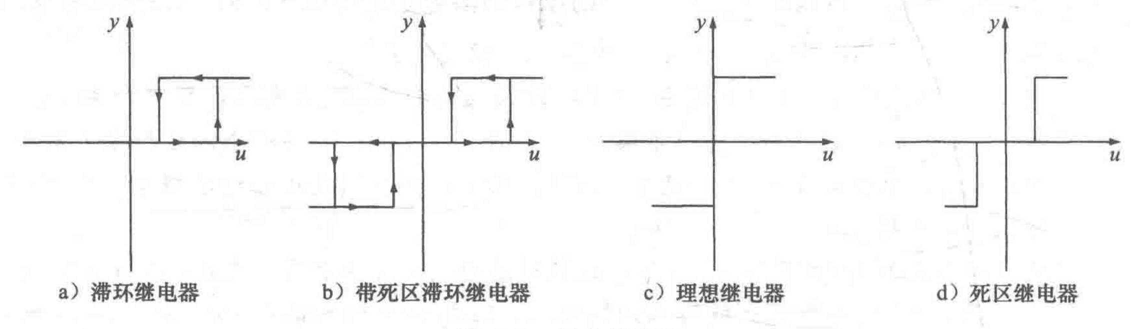


图 6.1 继电器特性

6.5 考虑系统

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 - \psi(x_2) + u, \quad y = x_2$$

其中，ψ 是局部 Lipschitz 的，且属于扇形域$[k,\infty]$，$k>0$。证明对每个 $p\in[1,\infty]$，系统是有限增益$\mathcal{L}_p$ 稳定的，且给出$\mathcal{L}_p$ 增益的估计。

138

6.6 考虑系统

$$\dot{x}_1=-x_1+x_2,\quad \dot{x}_2=-\psi(x_1)-x_2+u,\quad y=x_2$$

其中，ψ 是局部 Lipschitz 的，且属于扇形域$[k,\infty]$，$k>0$，证明系统是$\mathcal{L}_\infty$ 稳定的。并讨论对 ψ 加什么条件可使得系统是有限增益$\mathcal{L}_\infty$ 稳定的？

6.7 对练习 4.14 中的每一个系统，当输出是如下情形时，考察其$\mathcal{L}_\infty$ 稳定和有限增益$\mathcal{L}_\infty$ 稳定。

(1) $y=x$　(2) $y=\sin x$　(3) $y=x$　(4) $y=x$

(5) $y=x_1^2$　(6) $y=x_1+x_2$　(7) $y=x_1+x_2$　(8) $y=x_2$

(9) $y=x_2$　(10) $y=x_1$

6.8 对于练习 4.15 的每个系统，当输出是 x_1 时，考察其$\mathcal{L}_\infty$ 稳定和小信号$\mathcal{L}_\infty$ 稳定。

6.9 考察下列指定系统的有限增益$\mathcal{L}_2$ 稳定性：

(1) 练习 5.2；

(2) 练习 5.5；

(3) 练习 5.6。

如果稳定，则进一步估计其$\mathcal{L}_2$ 增益。

6.10 考虑隧道二级管电路(式(A.7))，设其输出是 $y=x_2$，

(1) 证明系统是$\mathcal{L}_\infty$ 稳定的；

(2) 证明系统是有限增益$\mathcal{L}_2$ 稳定的，且估计其$\mathcal{L}_2$ 增益。

6.11 考虑系统

$$\dot{x}_1=-2x_1+x_2,\quad \dot{x}_2=-2x_1-\psi(x_1)+u,\quad y=-x_1+x_2$$

其中，ψ 是局部 Lipschitz 的无源函数。

(1) 设 $u=0$，用 $V(x)=\int_0^{x_1}\psi(\sigma)\mathrm{d}\sigma+\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{2}(x_2-x_1)^2$，证明原点是全局渐近稳定的；

(2) 证明系统是$\mathcal{L}_\infty$ 稳定的；

(3) 证明系统是有限增益$\mathcal{L}_2$ 稳定的，并估计其$\mathcal{L}_2$ 增益。

6.12 证明练习 5.5 的系统是有限增益$\mathcal{L}_2$ 稳定的，估计其$\mathcal{L}_2$ 增益。

139

6.13 考虑单摆(式(A.2))，其中 $b>0$：

(1) 证明：如果输出是 $y=x_1$ 或 $y=x_2$，对每个 $p\in[1,\infty]$，系统是小信号有限增益$\mathcal{L}_p$ 稳定的；

(2) 证明：如果输出是 $y=x_2$，系统是有限增益$\mathcal{L}_2$ 稳定的，估计其$\mathcal{L}_2$ 增益。

6.14 一个 m 关节的机械臂由式(A.35)给出。假设方程 $g(q)=0$ 只有一个孤立解 $q=q^*$，且势能 $P(q)$在 q^* 最小，也就是说对所有的 q，$P(q)\geqslant P(q^*)$。令 $u=-K_d\dot{q}+v$，其中 K_d 是一个正定对称矩阵。证明当输入是 v 和输出是 $\dot{q}$ 时，系统是有限增益$\mathcal{L}_2$ 稳定的，并估计其$\mathcal{L}_2$ 增益。提示：参考练习 5.8。

6.15 考虑系统

$$\dot{x}_1=-x_1-x_2+u,\quad \dot{x}_2=\psi_1(x_1)-\psi_2(x_2),\quad y=x_1$$

其中，ψ_1 和 ψ_2 是局部 Lipschitz 函数，且 ψ_i 属于扇形域$[\alpha_i,\beta_i]$，$\beta_i>\alpha_i>0$。

(1) 证明对每个 $p\in[1, \infty]$，系统是有限增益$\mathcal{L}_p$ 稳定的，且估计其$\mathcal{L}_p$ 增益；

(2) 应用定理 6.6 证明其$\mathcal{L}_2$ 增益不超过$\frac{\beta_1}{\alpha_1}$。

6.16 考虑系统

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\psi(x_1) - x_2 + u, \quad y = x_1 + 2x_2$$

其中，ψ 是局部 Lipschitz 的，$\psi(0)=0$，且对 $\forall\, x_1$，有 $x_1\psi(x_1)\geqslant \alpha x_1^2$，$\alpha>0$。应用定理 6.6 证明系统是有限增益$\mathcal{L}_2$ 稳定的，并估计其$\mathcal{L}_2$ 增益。提示：应用函数

$$V(x) = k\left(x^{\mathrm{T}}Px + \int_0^{x_1}\psi(\sigma)\mathrm{d}\sigma\right)$$

6.17 考虑 TORA 系统式(A.49)～式(A.52)，且设 $u=-\beta x_2+w$，其中 $\beta>0$。研究输入是 w 和输出是 x_2 时系统的$\mathcal{L}_2$ 稳定性。令 $E(x)$ 是势能$\frac{1}{2}kx_3^2$ 和动能$\frac{1}{2}v^{\mathrm{T}}Dv$ 的和，其中

$$v = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad 和 \quad D = \begin{bmatrix} J + mL^2 & mL\cos x_1 \\ mL\cos x_1 & m + M \end{bmatrix}$$

(1) 用 $V(x)=\alpha E(x)$ 证明总可以选择 α 使得 $V(x)$ 满足式(6.20)；

140

(2) 系统是有限增益$\mathcal{L}_2$ 稳定的，且其$\mathcal{L}_2$ 增益不超过$\frac{1}{\beta}$。

第7章 反馈系统的稳定性

许多系统可以采用图7.1给出的负反馈结构来描述。这种反馈结构给控制理论带来了新的挑战和机遇。这种挑战和机遇表现在两个稳定系统按照这样的反馈连接可能导致一个不稳定的闭环系统；另一方面也造就了机会，即两个或者一个不稳定的系统利用反馈连接可产生一个稳定的闭环系统。对线性时不变系统，其中的 H_1 和 H_2 可以采用传递函数来描述，从 Nyquist 稳定判据可知，如果回路相位小于180°或者回路增益小于1，闭环系统是稳定的。7.1节的无源性定理和7.2节的小增益定理分别将这两个结论扩展到非线性系统。

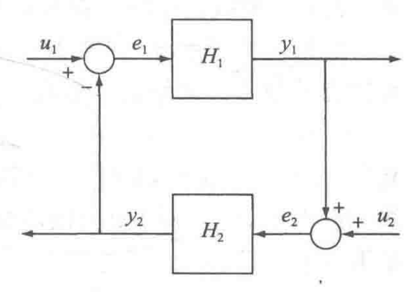


图7.1 反馈连接

有关无源性的一个主要结论是*两个无源系统的反馈连接是无源的*。再增加一些条件，我们能证明在反馈连接下原点是一个渐近稳定平衡点，或者其输入-输出映射是有限增益 $\mathcal{L}_2$ 稳定的。5.3节给出了正实传递函数的频域特性，本章将用它给出无源性和传递函数相位之间的联系，说明一个正实传递函数的相位变化不会超过90°，因此回路相位变化不会超过180°。如果两个传递函数中一个是严格正实的，回路相位变化将严格小于180°。小增益定理用来处理一类反馈系统，其中每个环节都是有限增益 $\mathcal{L}$ 稳定的且回路增益小于1[⊖]。

这类反馈结构的另一个好处是：我们可以将系统的模型进行这样处理，让它在前向通道上是一个线性时不变系统，而在反馈通道上是一个无记忆非线性函数。7.3节给出的绝对稳定性就是利用这个结构优势来定义的。该节还给出了圆判据和 Popov 判据。这些判据中非线性部分可以是未知的，只要它属于一个给定的扇形域，而对线性部分的要求则是建立在经典 Nyquist 稳定判据和 Nyquist 图上的频域条件。

7.1 无源性定理

考虑图7.1给出的反馈系统，其中两个子系统 H_1 和 H_2 要么是由状态模型描述的时不变动态系统

$$\dot{x}_i = f_i(x_i, e_i), \quad y_i = h_i(x_i, e_i) \tag{7.1}$$

要么是一个(可能是时变)无记忆函数

$$y_i = h_i(t, e_i) \tag{7.2}$$

研究的目的是用 H_1 和 H_2 的无源性来分析整个反馈系统的稳定性。这首先需要保证反馈系统可以建立一个合理定义的状态模型。当 H_1 和 H_2 都是动态系统时，闭环状态模型就具有如下形式

$$\dot{x} = f(x, u), \quad y = h(x, u) \tag{7.3}$$

⊖ 经典小增益定理在非线性系统的推广可参见文献[69，90，138]。

其中，$x=\text{col}(x_1, x_2)$，$u=\text{col}(u_1, u_2)$和$y=\text{col}(y_1, y_2)$。我们假设f是局部Lipschitz的，h是连续的，且$f(0, 0)=0$和$h(0, 0)=0$。如果方程组

$$e_1 = u_1 - h_2(x_2, e_2), \quad e_2 = u_2 + h_1(x_1, e_1) \tag{7.4}$$

对每个(x_1, x_2, u_1, u_2)有唯一解(e_1, e_2)，则反馈连接产生一个意义确定(也称"合理定义")的状态模型。从$f_i(0, 0)=0$和$h_i(0, 0)=0$可以得到$f(0, 0)=0$和$h(0, 0)=0$。容易看出，如果h_1独立于e_1或者h_2独立于e_2，式(7.4)总有唯一解。在这样情形下，闭环状态模型中的函数f和h就继承了f_i和h_i的光滑属性。尤其，如果f_i和h_i是局部Lipschitz，则f和h也是。对线性系统，要求h_i独立于e_i等价于要求H_i的传递函数是严格正则的[⊖]。

142

如果一个子系统(例如H_1)是一个动态系统，而另一个是无记忆函数，那么闭环系统的状态模型可以采用如下形式

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad y = h(t, x, u) \tag{7.5}$$

其中，$x=x_1$，$u=\text{col}(u_1, u_2)$和$y=\text{col}(y_1, y_2)$。假设f对t是分段连续，对于(x, u)是局部Lipschitz的，h对t是分段连续，对(x, u)是连续的，且$f(t, 0, 0)=0$和$h(t, 0, 0)=0$。如果方程

$$e_1 = u_1 - h_2(t, e_2), \quad e_2 = u_2 + h_1(x_1, e_1) \tag{7.6}$$

对每个(x_1, t, u_1, u_2)有唯一解(e_1, e_2)，则反馈连接产生一个意义确定的状态模型，式(7.5)。当h_1不依赖于e_1，或者h_2不依赖于e_2的时候，式(7.6)必然产生唯一解。

下面的定理给出以后分析的出发点。

定理 7.1 两个无源子系统按图7.1做反馈连接，得到的闭环系统必是无源的。

证明： 令$V_1(x_1)$和$V_2(x_2)$分别是H_1和H_2的存储函数。如果有一个子系统是无记忆函数，则对应地取$V_i=0$。由于子系统都是无源的，因此$e_i^{\mathrm{T}} y_i \geqslant \dot{V}_i$。根据图7.1，有

$$e_1^{\mathrm{T}} y_1 + e_2^{\mathrm{T}} y_2 = (u_1 - y_2)^{\mathrm{T}} y_1 + (u_2 + y_1)^{\mathrm{T}} y_2 = u_1^{\mathrm{T}} y_1 + u_2^{\mathrm{T}} y_2$$

则

$$u^{\mathrm{T}} y = u_1^{\mathrm{T}} y_1 + u_2^{\mathrm{T}} y_2 \geqslant \dot{V}_1 + \dot{V}_2$$

取$V(x)=V_1(x_1)+V_2(x_2)$作为闭环系统的存储函数，那么$u^{\mathrm{T}} y \geqslant \dot{V}$。 □

设输入$u=0$，我们可以用无源性来研究闭环系统原点的稳定性和渐近稳定性。原点的稳定性可以从定理7.1和引理5.5直接得到。因此，我们主要关注渐近稳定性研究。下面的定理是定理7.1和引理5.6的直接结果。

定理 7.2 考虑两个由式(7.1)描述的时不变动态系统组成的反馈连接。当$u=0$时，如果下面条件中有一个满足，则闭环系统式(7.3)的原点是渐近稳定的。

- 两个子系统都是严格无源的；
- 两个子系统都是输出严格无源的，且零状态可观；
- 一个子系统是严格无源的，另一个是输出严格无源的，且零状态可观。

143

进一步，如果每个子系统的存储函数是径向无界的，则原点是全局渐近稳定的。

证明： 令$V_1(x_1)$和$V_2(x_2)$分别是H_1和H_2的存储函数。如同引理5.6的证明一样，可以知道$V_1(x_1)$和$V_2(x_2)$都是正定函数。取$V(x)=V_1(x_1)+V_2(x_2)$作为闭环系统的备选Lyapunov函数。对于第一种情形，由于$u=0$，因此$\dot{V}$的导数满足

⊖ 如果传递函数分母的次数大于分子的次数，则称这个传递函数是严格正则的；如果传递函数分母的次数不小于分子的次数，则称是正则的。——译者注

$$\dot{V} \leqslant u^{\mathrm{T}} y - \psi_1(x_1) - \psi_2(x_2) = -\psi_1(x_1) - \psi_2(x_2)$$

因此，原点是渐近稳定的。当第二种情形，

$$\dot{V} \leqslant -y_1^{\mathrm{T}} \rho_1(y_1) - y_2^{\mathrm{T}} \rho_2(y_2)$$

其中，$y_i^{\mathrm{T}} \rho_i(y_i) > 0$，$y_i \neq 0$。这里的 $\dot{V}$ 仅是半负定的，且 $\dot{V} = 0 \Rightarrow y = 0$。为了应用不变性原理，我们需要证明 $y(t) \equiv 0 \Rightarrow x(t) \equiv 0$。注意，$y_2(t) \equiv 0 \Rightarrow e_1(t) \equiv 0$，用 H_1 的零状态可观性，$y_1(t) \equiv 0 \Rightarrow x_1(t) \equiv 0$。类似地，$y_1(t) \equiv 0 \Rightarrow e_2(t) \equiv 0$，且用 H_2 的零状态可观性，$y_2(t) \equiv 0 \Rightarrow x_2(t) \equiv 0$。因此，原点是渐近稳定的。对于第三种情形(设 H_1 是严格无源的)，

$$\dot{V} \leqslant -\psi_1(x_1) - y_2^{\mathrm{T}} \rho_2(y_2)$$

$\dot{V} = 0$ 意味着 $x_1 = 0$ 和 $y_2 = 0$。再一次，$y_2(t) \equiv 0 \Rightarrow e_1(t) \equiv 0$，它同 $x_1(t) \equiv 0$ 一起可以推导出 $y_1(t) \equiv 0$。由此可得，$e_2(t) \equiv 0$，利用 H_2 的零状态可观性，$y_2(t) \equiv 0 \Rightarrow x_2(t) \equiv 0$。因此原点是渐近稳定的。最后，如果 $V_1(x_1)$ 和 $V_2(x_2)$ 是径向无界的，则 $V(x)$ 是径向无界，原点是全局渐近稳定的。 □

上述证明利用了子系统存储函数的和作为反馈系统的一个备选 Lyapunov 函数。这样的分析有点过于苛刻，因为我们采用了从 $\dot{V}_1 \leqslant 0$ 和 $\dot{V}_2 \leqslant 0$ 来导出 $\dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2 \leqslant 0$。显然，这是不必要的。只要 $\dot{V} \leqslant 0$ 在某个区域内成立，我们可以允许 $\dot{V}_1$(或者 $\dot{V}_2$)在这个区域是正的，而另一个是足够负的就行了。这种想法在例 7.2 和例 7.3 中会得到进一步的说明，这里首先给出例 7.1，它是定理 7.2 的一个直接应用。

例 7.1 考虑

$$H_1: \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -a x_1^3 - k x_2 + e_1 \\ y_1 = x_2 \end{cases} \quad 和 \quad H_2: \begin{cases} \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = -b x_3 - x_4^3 + e_2 \\ y_2 = x_4 \end{cases}$$

的反馈连接，其中，a、b 和 k 都是正数。用 $V_1 = \frac{1}{4} a x_1^4 + \frac{1}{2} x_2^2$ 作为 H_1 的存储函数，得到

$$\dot{V}_1 = a x_1^3 x_2 - a x_1^3 x_2 - k x_2^2 + x_2 e_1 = -k y_1^2 + y_1 e_1$$

144

因此，H_1 是输出严格无源的。另外，当 $e_1 = 0$ 时，我们有

$$y_1(t) \equiv 0 \Leftrightarrow x_2(t) \equiv 0 \Rightarrow x_1(t) \equiv 0$$

这就说明 H_1 是零状态可观测的。用 $V_2 = \frac{1}{2} b x_3^2 + \frac{1}{2} x_4^2$ 作为 H_2 的存储函数，可得

$$\dot{V}_2 = b x_3 x_4 - b x_3 x_4 - x_4^4 + x_4 e_2 = -y_2^4 + y_2 e_2$$

因此，H_2 也是输出严格无源的。而且，当 $e_2 = 0$ 时，

$$y_2(t) \equiv 0 \Leftrightarrow x_4(t) \equiv 0 \Rightarrow x_3(t) \equiv 0$$

这就说明 H_2 也是零状态可观测的。因此，用定理 7.2 的第二种情形以及 V_1 和 V_2 都是径向无界的事实，我们推断出原点是全局渐近稳定的。 ◀

例 7.2 重新考虑上述例子，但是将 H_1 的输出改为 $y_1 = x_2 + e_1$。从

$$\dot{V}_1 = -k x_2^2 + x_2 e_1 = -k(y_1 - e_1)^2 - e_1^2 + y_1 e_1$$

能推断出 H_1 是无源的，但不能得出严格无源或者输出严格无源的结论。因此，不能应用定理 7.2。如采用

$$V(x) = V_1 + V_2 = \frac{1}{4} a x_1^4 + \frac{1}{2} x_2^2 + \frac{1}{2} b x_3^2 + \frac{1}{2} x_4^2$$

作为闭环系统的一个备选 Lyapunov 函数，得到

$$\dot{V}=-kx_2^2+x_2e_1-x_4^4+x_4e_2=-kx_2^2-x_2x_4-x_4^4+x_4(x_2-x_4)$$
$$=-kx_2^2-x_4^4-x_4^2\leqslant 0$$

而且，$\dot{V}=0$ 意味着 $x_2=x_4=0$，并且

$$x_2(t)\equiv 0\Rightarrow ax_1^3(t)-x_4(t)\equiv 0\Rightarrow x_1(t)\equiv 0$$
$$x_4(t)\equiv 0\Rightarrow -bx_3(t)+x_2(t)-x_4(t)\equiv 0\Rightarrow x_3(t)\equiv 0$$

因此，利用 LaSalle 不变性原理和 V 是径向无界的，可以得出原点是全局渐近稳定的。◀

例 7.3 重新考虑系统

$$\dot{x}_1=x_2,\quad \dot{x}_2=-h_1(x_1)-h_2(x_2)$$

这个系统在例 3.8 和例 3.9 中曾讨论过，其中，h_1 和 h_2 都是局部 Lipschitz 函数，且属于扇形域 (0，∞)。这个系统可以认为是图 7.2 给出的反馈结构的状态模型，其中 H_1 由一个负反馈回路组成，其前向通道是积分器，反馈增益是 h_2，积分器的输出为状态变量 x_2；H_2 则由 h_1 和一个积分器串联而成，x_1 是积分器的输出。在例 5.2 看到，利用存储函数 $V_1=\frac{1}{2}x_2^2$ 可知 H_1 是输出严格无源，而从例 5.3 可知，利用存储函数 $V_2=\int_0^{x_1}h_1(\sigma)\mathrm{d}\sigma$，可知 H_2 是无损的。因为 H_2 既不是严格无源也不是输出严格无源的，所以不能直接应用定理 7.2。然而，利用 $V(x)=V_1+V_2=\int_0^{x_1}h_1(\sigma)\mathrm{d}\sigma+\frac{1}{2}x_2^2$ 作为一个备选 Lyapunov 函数，我们还是可以证得原点是渐近稳定的。在例 3.8 和例 3.9 中已经用它证明了原点的渐近稳定性，且如果 $|y|\to\infty$ 时，$\int_0^y h_1(z)\mathrm{d}z\to\infty$ 成立，那么原点是全局渐近稳定的。这里不再重复那些已经做过的分析，但注意，如果 $h_1(y)$ 和 $h_2(y)$ 仅对 $y\in(-a,a)$ 属于扇形域 (0，∞)，则 Lyapunov 分析就要被限制到原点周围的某个区域，这就导致了例 3.8 中那样的局部渐近稳定的结论。这个例子说明无源性作为一个工具对 Lyapunov 法是有用的，它可以讨论有限区域的情形。◀

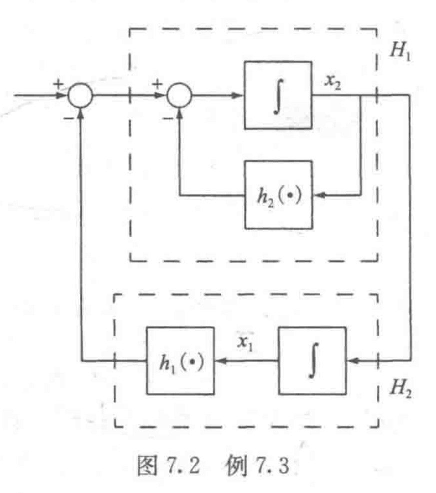


图 7.2 例 7.3

当反馈连接的一个子系统是动态系统而另一个是无记忆函数的时候，我们可以利用动态系统的存储函数作为备选 Lyapunov 函数，进行 Lyapunov 法分析。然而，必须要注意区分无记忆函数是时不变的还是时变的，这点很重要。当闭环系统含有时变环节时，我们就不能像证明定理 7.2 那样应用不变性原理。下面两个定理分别给出这两种情形的处理方法。

定理 7.3 考虑图 7.1 给出的反馈连接，其中一个子系统是由式(7.1)给出的严格无源的时不变动态系统，另一个是形如式(7.2)的无记忆(可能时变)无源函数。则闭环系统(式(7.5))的原点(当 $u=0$ 时)是一致渐近稳定的。进一步，如果动态系统的存储函数是径向无界的，则原点是全局一致渐近稳定的。

证明： 从引理 5.6 的证明可知 $V_1(x_1)$ 是正定的，它的导数是：

$$\dot{V}_1=\frac{\partial V_1}{\partial x_1}f_1(x_1,e_1)\leqslant e_1^{\mathrm{T}}y_1-\psi_1(x_1)=-e_2^{\mathrm{T}}y_2-\psi_1(x_1)\leqslant-\psi_1(x_1)$$

应用定理 4.2 可以得出结论。□

[145] [146]

定理 7.4 考虑图 7.1 给出的反馈连接，其中，H_1 是由式(7.1)给出的时不变动态系统，H_2 是形为式(7.2)的时不变无记忆函数。假设 H_1 是零状态可观的且有一个正定存储函数 $V_1(x)$，该函数满足

$$e_1^{\mathrm{T}} y_1 \geqslant \dot{V}_1 + y_1^{\mathrm{T}} \rho_1(y_1) \tag{7.7}$$

而 H_2 满足

$$e_2^{\mathrm{T}} y_2 \geqslant e_2^{\mathrm{T}} \phi_2(e_2) \tag{7.8}$$

如果下式还成立

$$v^{\mathrm{T}}[\rho_1(v) + \phi_2(v)] > 0, \forall v \neq 0 \tag{7.9}$$

则闭环系统(式(7.5))的原点(当 $u=0$ 时)是渐近稳定的。进一步，如果 V_1 是径向无界的，则原点是全局渐近稳定的。

证明： 用 $V_1(x_1)$ 作为备选 Lyapunov 函数，那么

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &= \frac{\partial V_1}{\partial x_1} f_1(x_1, e_1) \leqslant e_1^{\mathrm{T}} y_1 - y_1^{\mathrm{T}} \rho_1(y_1) \\ &= -e_2^{\mathrm{T}} y_2 - y_1^{\mathrm{T}} \rho_1(y_1) \leqslant -[y_1^{\mathrm{T}} \phi_2(y_1) + y_1^{\mathrm{T}} \rho_1(y_1)]\end{aligned}$$

不等式(7.9)说明 $\dot{V}_1 \leqslant 0$，且 $\dot{V}_1 = 0 \Rightarrow y_1 = 0$。进一步 $y_1 \equiv 0 \Rightarrow e_2 \equiv 0 \Rightarrow e_1 \equiv 0$。由于条件 H_1 是零状态可观的，所以 $x_1 \equiv 0$，于是应用 LaSalle 不变性原理可得出结论。 □

例 7.4 考虑图 7.1 给出的反馈连接，其中一个子系统有严格正实传递函数，而另一个是无源时变无记忆函数。从引理 5.4 可知动态子系统是严格无源的，并具有正定存储函数 $V(x) = \frac{1}{2} x^{\mathrm{T}} P x$。于是根据定理 7.3 可知闭环系统的原点是全局一致渐近稳定的。这是 7.3 节给出的圆判据的另一种版本。 ◀

例 7.5 考虑由

$$H_1: \begin{cases} \dot{x} = f(x) + G(x) e_1 \\ y_1 = h(x) \end{cases} \quad 和 \quad H_2: y_2 = \sigma(e_2)$$

[147]

构成的反馈连接，其中 e_i，$y_i \in R^m$，$\sigma(0) = 0$，以及对所有的 $e_2 \neq 0$，$e_2^{\mathrm{T}} \sigma(e_2) > 0$。假设存在一个径向无界正定函数 $V_1(x)$，使得

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} f(x) \leqslant 0, \quad \frac{\partial V_1}{\partial x} G(x) = h^{\mathrm{T}}(x), \quad \forall x \in R^n$$

且 H_1 是零状态可观的。这两个子系统都是无源的，且 H_2 满足 $e_2^{\mathrm{T}} y_2 = e_2^{\mathrm{T}} \sigma(e_2)$。由于 $\rho_1 = 0$，式(7.7)满足；而 $\phi_2 = \sigma$，式(7.8)满足。故对所有的 $v \neq 0$，$v\sigma(v) > 0$，式(7.9)满足。于是根据定理 7.4，闭环系统的原点是全局渐近稳定的。 ◀

通过结构的等价变换可以拓宽定理 7.3 和 7.4 的应用范围。假设 H_1 是时不变动态系统，而 H_2 是属于扇形域$[K_1, K_2]$(可能是时变的)无记忆函数，设 $K = K_2 - K_1$ 是一个正定对称矩阵。5.1 节给出一种方法，将原先属于扇形域$[K_1, K_2]$的函数通过图 5.5 给出的输入前馈和输出反馈变换成扇形域$[0, \infty]$上的函数。H_2 的输入前馈可以用 H_1 的输出反馈来抵消(见图 7.3b)，如果只是讨论原点的渐近稳定性，这种处理是一个等效反馈连接。类似地，K^{-1} 左乘 H_2 可以用 K 右乘 H_1 来抵消，如图 7.3c 所示。最后，反馈通道的输出反馈能被前向通道的输入前馈抵消，如图 7.3d 所示。经图 7.3变换后，反馈系统仍由两个子系统 $\widetilde{H}_1$ 和 $\widetilde{H}_2$ 组成，而其中的 $\widetilde{H}_2$ 是属于扇形域$[0, \infty]$的一个无记忆函数。如果 $\widetilde{H}_2$ 是时变的，我们可以应用定理 7.3；如果它是时不变的，就可以用定理 7.4。

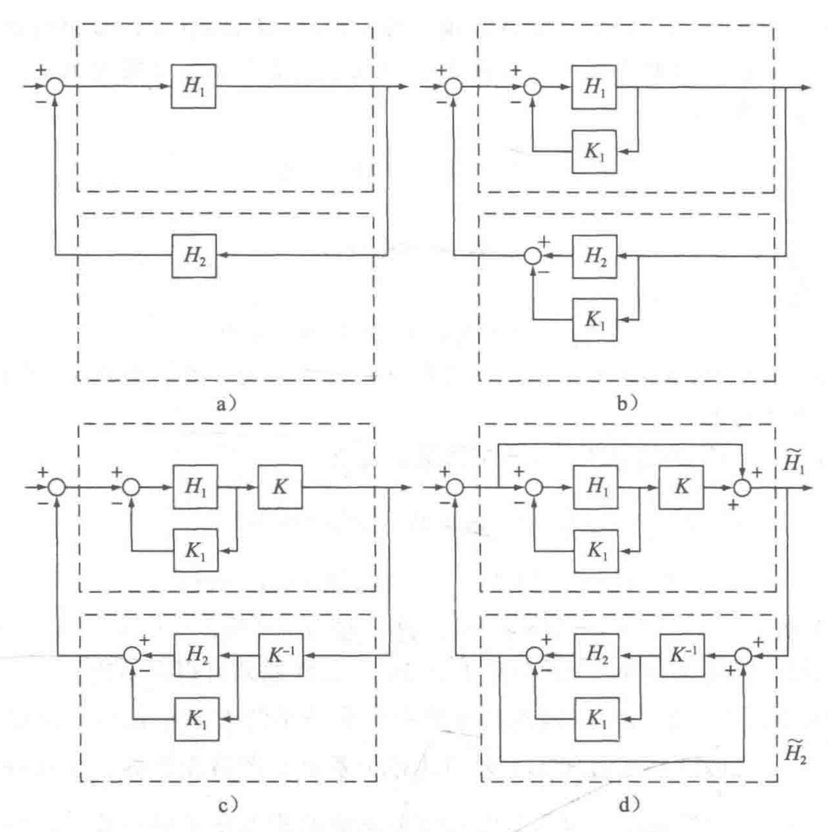


图 7.3 具有常数增益的结构等价变换。一个扇形域$[K_1, K_2]$上的无记忆函数 H_2 被变换成一个扇形域$[0, \infty]$上的无记忆函数$\widetilde{H}_2$

例 7.6 考虑由

$$H_1:\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2\\ \dot{x}_2 = -h(x_1) + cx_2 + e_1\\ y_1 = x_2\end{cases} \quad 和\ H_2: y_2 = \sigma(e_2)$$

构成的反馈连接。其中 $\sigma \in [\alpha, \beta]$，$h \in [\alpha_1, \infty]$，$c > 0$，$\alpha_1 > 0$ 和 $b = \beta - \alpha > 0$。应用图 7.3d给出的结构等价变换($K_1 = \alpha$ 和 $K_2 = \beta$)，得到

$$\widetilde{H}_1:\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2\\ \dot{x}_2 = -h(x_1) - ax_2 + \widetilde{e}_1\\ \widetilde{y}_1 = bx_2 + \widetilde{e}_1\end{cases} \quad 和\ \widetilde{H}_2: \widetilde{y}_2 = \widetilde{\sigma}(\widetilde{e}_2)$$

其中，$\widetilde{\sigma} \in [0, \infty]$和 $a = \alpha - c$。应用例 5.4 的结果，当 $\alpha > c$ 时，$\widetilde{H}_1$ 是严格无源的并存在一个径向无界的存储函数。因此应用定理 7.3 可知反馈连接系统的原点是全局渐近稳定的。 ◀

148

对于图 7.1 给出的反馈连接系统，无源性定理也能用来讨论闭环系统的有限增益$\mathcal{L}_2$ 稳定性。假设 H_1：$\mathcal{L}_{2e}^m \to \mathcal{L}_{2e}^m$和 H_2：$\mathcal{L}_{2e}^m \to \mathcal{L}_{2e}^m$。定义 $e = \text{col}(e_1, e_2)$。假设反馈系统具有一个形如式(7.3)或式(7.5)给出的状态模型，且假设对每个 $u \in \mathcal{L}_{2e}^m$，存在确定的输出 e，$y \in \mathcal{L}_{2e}^m$。将闭环系统看做是输入 u 到输出 e 或者输出 y 的映射，要讨论的问题是：它是否为有限增益$\mathcal{L}_2$ 稳定的？不难看出从 u 到 e 的映射是有限增益$\mathcal{L}_2$ 稳定的，当且仅当从 u 到 y 的映射是有限增益$\mathcal{L}_2$ 稳定的。因此，只要其中任意一个映射是有限增益$\mathcal{L}_2$ 稳定的，我们就可以说这个反馈连接是有限增益$\mathcal{L}_2$ 稳定的。下一个定理是定理 6.5 的直接结果。

149

定理 7.5　设反馈连接中的两个系统都是输出严格无源的，且下式成立：

$$e_i^{\mathrm{T}} y_i \geqslant \dot{V}_i + \delta_i y_i^{\mathrm{T}} y_i, \quad \delta_i > 0,$$

则它们组成的反馈连接是有限增益$\mathcal{L}_2$稳定的，且其$\mathcal{L}_2$增益不会大于$\dfrac{1}{\min\{\delta_1,\ \delta_2\}}$。

证明：记 $V=V_1+V_2$ 和 $\delta=\min\{\delta_1,\ \delta_2\}$，那么

$$\begin{aligned} u^{\mathrm{T}} y = e_1^{\mathrm{T}} y_1 + e_2^{\mathrm{T}} y_2 &\geqslant \dot{V}_1 + \delta_1 y_1^{\mathrm{T}} y_1 + \dot{V}_2 + \delta_2 y_2^{\mathrm{T}} y_2 \\ &\geqslant \dot{V} + \delta(y_1^{\mathrm{T}} y_1 + y_2^{\mathrm{T}} y_2) = \dot{V} + \delta y^{\mathrm{T}} y \end{aligned}$$

应用定理 6.5，结论获证。□

在定理 6.5 的证明中，是从不等式

$$u^{\mathrm{T}} y \geqslant \dot{V} + \delta y^{\mathrm{T}} y \tag{7.10}$$

得到

$$\dot{V} \leqslant \frac{1}{2\delta} u^{\mathrm{T}} u - \frac{\delta}{2} y^{\mathrm{T}} y \tag{7.11}$$

进而证明系统是有限增益$\mathcal{L}_2$稳定的。然而，对一些反馈连接即使式(7.10)不成立，仍然可能得到形如式(7.11)的不等式。在下个定理中，这个想法将用来证明一个更一般的结果，而定理 7.5 则是它的特殊情形。

定理 7.6　考虑图 7.1 给出的反馈连接，假设每个子系统都存在存储函数 $V_i(x_i)$，使得

$$e_i^{\mathrm{T}} y_i \geqslant \dot{V}_i + \varepsilon_i e_i^{\mathrm{T}} e_i + \delta_i y_i^{\mathrm{T}} y_i, \quad i = 1,2 \tag{7.12}$$

成立。进一步，如果

$$\varepsilon_1 + \delta_2 > 0 \text{ 且 } \varepsilon_2 + \delta_1 > 0 \tag{7.13}$$

则从 u 到 y 的闭环映射是有限增益$\mathcal{L}_2$稳定的。

证明：将不等式(7.12)在 $i=1$，2 的两种情形相加，并应用等式

$$\begin{aligned} e_1^{\mathrm{T}} y_1 + e_2^{\mathrm{T}} y_2 &= u_1^{\mathrm{T}} y_1 + u_2^{\mathrm{T}} y_2 \\ e_1^{\mathrm{T}} e_1 &= u_1^{\mathrm{T}} u_1 - 2u_1^{\mathrm{T}} y_2 + y_2^{\mathrm{T}} y_2 \\ e_2^{\mathrm{T}} e_2 &= u_2^{\mathrm{T}} u_2 + 2u_2^{\mathrm{T}} y_1 + y_1^{\mathrm{T}} y_1 \end{aligned}$$

可得

$$\dot{V} \leqslant - y^{\mathrm{T}} L y - u^{\mathrm{T}} M u + u^{\mathrm{T}} N y$$

其中，$V(x)=V_1(x_1)+V_2(x_2)$和

$$L = \begin{bmatrix} (\varepsilon_2+\delta_1)I & 0 \\ 0 & (\varepsilon_1+\delta_2)I \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 I & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 I \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} I & 2\varepsilon_1 I \\ -2\varepsilon_2 I & I \end{bmatrix}$$

150

令 $a=\min\{\varepsilon_2+\delta_1,\ \varepsilon_1+\delta_2\}>0$，$b=\|N\|\geqslant 0$ 和 $c=\|M\|\geqslant 0$，则

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leqslant -a\|y\|^2 + b\|u\|\|y\| + c\|u\|^2 \\ &= -\frac{1}{2a}(b\|u\| - a\|y\|)^2 + \frac{b^2}{2a}\|u\|^2 - \frac{a}{2}\|y\|^2 + c\|u\|^2 \\ &\leqslant \frac{k^2}{2a}\|u\|^2 - \frac{a}{2}\|y\|^2 \end{aligned}$$

其中，$k^2=b^2+2ac$。应用引理 6.1，结论可得。□

如式(7.12)成立，且取 $\varepsilon_1=\varepsilon_2=0$，而 $\delta_1>0$ 和 $\delta_2>0$，则由定理 7.6 可以直接导出定理 7.5。然而，条件式(7.13)还可以适应更广泛的情形，例如，H_1 和 H_2 是输入严格无源的，

且存在 $\varepsilon_i>0$ 使得 $e_i^{\mathrm{T}}y_i \geqslant \dot{V}_i+\varepsilon_i u_i^{\mathrm{T}}u_i$，则式(7.13)满足。又如一个子系统(比如 H_1)是无源的，而另一个满足式(7.12)，并具有正的 ε_2 和 δ_2。更有意义的情形是尽管常数 ε_i、δ_i 中有些是负的，但式(7.13)依然可能成立。例如，一个负 ε_1 可通过一个正 δ_2 来补偿，反之亦然。

例 7.7 考虑由

$$H_1:\begin{cases}\dot{x}=f(x)+G(x)e_1\\ y_1=h(x)\end{cases}\quad \text{和}\quad H_2: y_2=\sigma(e_2)$$

构成的反馈连接。其中 e_i，$y_i\in R^m$，σ 具有式(5.1)给出的解耦非线性形式，σ 的每个分量 σ_k 都在扇形域$[\alpha,\beta]$内，$\beta>\alpha>0$。假设存在一个半正定函数 $V_1(x)$，使得

$$\frac{\partial V_1}{\partial x}f(x)\leqslant 0,\quad \frac{\partial V_1}{\partial x}G(x)=h^{\mathrm{T}}(x),\quad \forall x\in R^n$$ [1]

显然，两个子系统都是无源的，而且 H_2 满足

$$\alpha e_2^{\mathrm{T}}e_2\leqslant e_2^{\mathrm{T}}y_2\leqslant \beta e_2^{\mathrm{T}}e_2,\quad \frac{1}{\beta}y_2^{\mathrm{T}}y_2\leqslant e_2^{\mathrm{T}}y_2\leqslant \frac{1}{\alpha}y_2^{\mathrm{T}}y_2$$

那么

$$e_2^{\mathrm{T}}y_2=\gamma e_2^{\mathrm{T}}y_2+(1-\gamma)e_2^{\mathrm{T}}y_2\geqslant \gamma\alpha e_2^{\mathrm{T}}e_2+(1-\gamma)\frac{1}{\beta}y_2^{\mathrm{T}}y_2,\quad 0<\gamma<1$$

因此有 $\varepsilon_1=\delta_1=0$，$\varepsilon_2=\gamma\alpha$，$\delta_2=\dfrac{(1-\gamma)}{\beta}$。式(7.13)也满足[2]，所以 u 到 y 的闭环映射是有限增益$\mathcal{L}_2$ 稳定的。◀

151

例 7.8 考虑由

$$H_1:\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=-ax_1^3-\sigma(x_2)+e_1\\ y_1=x_2\end{cases}\quad \text{和}\quad H_2: y_2=ke_2$$

构成的反馈连接。其中 $\sigma\in[-\alpha,\infty]$，$a>0$，$\alpha>0$ 和 $k>0$。如果 σ 在扇形域$[0,\infty]$内，应用存储函数 $V_1(x)=\frac{1}{4}ax_1^4+\frac{1}{2}x_2^2$ 可以证明 H_1 是无源的。当 $\sigma\in[-\alpha,\infty]$时，我们有

$$\dot{V}_1=ax_1^3x_2-ax_1^3x_2-x_2\sigma(x_2)+x_2e_1\leqslant \alpha x_2^2+x_2e_1=\alpha y_1^2+y_1e_1$$

因此，取 $\varepsilon_1=0$，$\delta_1=-\alpha$，H_1 满足式(7.12)。因为

$$e_2y_2=ke_2^2=\gamma ke_2^2+\frac{(1-\gamma)}{k}y_2^2,\quad \text{其中 } 0<\gamma<1$$

取 $\varepsilon_2=\gamma k$，$\delta_2=\dfrac{(1-\gamma)}{k}$，$H_2$ 也满足式(7.12)。如果 $k>\alpha$，我们总能选择合适的 γ，使得 $\gamma k>\alpha$。因此，$\varepsilon_1+\delta_2>0$，$\varepsilon_2+\delta_1>0$。那么只要 $k>\alpha$，从 u 到 y 的闭环映射是有限增益$\mathcal{L}_2$ 稳定的。◀

7.2 小增益定理

继续考虑图 7.1 给出的反馈连接，其中，H_1：$\mathcal{L}_e^m\to\mathcal{L}_e^q$ 和 H_2：$\mathcal{L}_e^q\to\mathcal{L}_e^m$。假设两个系统

---

[1] 由此条件可得 $\dot{V}=\frac{\partial V}{\partial x}f(x)+\frac{\partial V}{\partial x}G(x)e_1=\frac{\partial V}{\partial x}f(x)+h^{\mathrm{T}}(x)e_1\leqslant y_1^{\mathrm{T}}e_1$，式(7.12)成立。——译者注

[2] 原文在此还提及式(7.9)成立，显得多余。——译者注

是有限增益$\mathcal{L}$稳定的，即

$$\|y_{1\tau}\|_{\mathcal{L}} \leqslant \gamma_1 \|e_{1\tau}\|_{\mathcal{L}} + \beta_1, \quad \forall e_1 \in \mathcal{L}_e^m, \quad \forall \tau \in [0,\infty) \tag{7.14}$$

$$\|y_{2\tau}\|_{\mathcal{L}} \leqslant \gamma_2 \|e_{2\tau}\|_{\mathcal{L}} + \beta_2, \quad \forall e_2 \in \mathcal{L}_e^q, \quad \forall \tau \in [0,\infty) \tag{7.15}$$

进一步假设反馈系统对每对输入 $u_1 \in \mathcal{L}_e^m$ 和 $u_2 \in \mathcal{L}_e^q$ 是有确定意义的，即对每一对 u_1 和 u_2 存在唯一输出e_1，$y_2 \in \mathcal{L}_e^m$ 和 e_2，$y_1 \in \mathcal{L}_e^q$。如果 H_1 和 H_2 都有状态模型描述，则假设反馈连接有确定的状态模型。记$u=\text{col}(u_1,\ u_2)$，$y=\text{col}(y_1,\ y_2)$和 $e=\text{col}(e_1,\ e_2)$。下一个(小增益)定理给出了反馈连接是有限增益$\mathcal{L}$稳定的一个充分条件；即从 u 到e，或者等价于从 u 到 y 的映射是有限增益$\mathcal{L}$稳定的充分条件。

定理 7.7　在上文的假设下，如果 $\gamma_1\gamma_2<1$，则反馈连接是有限增益$\mathcal{L}$稳定。

证明：在下面的证明过程中，总用$\|\cdot\|$来表示$\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$。依然假设解存在，因此下式成立：

$$e_{1\tau} = u_{1\tau} - (H_2 e_2)_\tau, \quad e_{2\tau} = u_{2\tau} + (H_1 e_1)_\tau$$

152

则

$$\begin{aligned}\|e_{1\tau}\| &\leqslant \|u_{1\tau}\| + \|(H_2 e_2)_\tau\| \leqslant \|u_{1\tau}\| + \gamma_2 \|e_{2\tau}\| + \beta_2 \\ &\leqslant \|u_{1\tau}\| + \gamma_2(\|u_{2\tau}\| + \gamma_1 \|e_{1\tau}\| + \beta_1) + \beta_2 \\ &= \gamma_1\gamma_2 \|e_{1\tau}\| + (\|u_{1\tau}\| + \gamma_2 \|u_{2\tau}\| + \beta_2 + \gamma_2\beta_1)\end{aligned}$$

因为 $\gamma_1\gamma_2<1$，所以对所有的 $\tau\in[0,\ \infty)$成立

$$\|e_{1\tau}\| \leqslant \frac{1}{1-\gamma_1\gamma_2}(\|u_{1\tau}\| + \gamma_2 \|u_{2\tau}\| + \beta_2 + \gamma_2\beta_1) \tag{7.16}$$

类似地，对所有的 $\tau\in[0,\ \infty)$，

$$\|e_{2\tau}\| \leqslant \frac{1}{1-\gamma_1\gamma_2}(\|u_{2\tau}\| + \gamma_1 \|u_{1\tau}\| + \beta_1 + \gamma_1\beta_2)。 \tag{7.17}$$

应用三角不等式$\|e\| \leqslant \|e_1\| + \|e_2\|$，即可完成证明。　□

图 7.1 给出的反馈连接为研究反馈系统的鲁棒性能提供了一个便利的平台。通常，存在模型不确定性的反馈系统能以反馈连接形式表示，其中，H_1 为一个稳定的标称系统，而 H_2 可视为一个稳定扰动。因此只要 γ_2 足够小，就能使不等式 $\gamma_1\gamma_2<1$ 得到满足。因此，小增益定理为理解在反馈系统研究中产生的许多鲁棒结果提供了一个概念性框架。

例 7.9　考虑图 7.1 的反馈连接，$m=q$。如果 H_1 是一个线性时不变系统，并具有 Hurwitz 传递函数 $G(s)$。而 H_2 是一个无记忆函数 $y_2=\psi(t,\ e_2)$，满足

$$\|\psi(t,y)\| \leqslant \gamma_2 \|y\|, \quad \forall t \geqslant 0, \forall y \in R^m。$$

根据定理 6.4，H_1 是有限增益$\mathcal{L}_2$ 稳定的，且它的$\mathcal{L}_2$ 增益不超过 $\gamma_1=\sup_{\omega\in R}\|G(\mathrm{j}\omega)\|$。容易验证 H_2 是有限增益$\mathcal{L}_2$ 稳定的，它的$\mathcal{L}_2$ 增益$\leqslant\gamma_2$。假设反馈连接是有确定意义的，则由定理 7.7 可得出：如果 $\gamma_1\gamma_2<1$，则闭环系统是有限增益$\mathcal{L}_2$ 稳定[⊖]。　◀

例 7.10　考虑系统[⊜]

$$\dot{x} = f(t,x,v+d_1(t)), \quad \varepsilon\dot{z} = Az + B[u+d_2(t)], \quad v = Cz$$

其中，f 是一个光滑函数，A 是一个 Hurwitz 矩阵，且$-CA^{-1}B=I$，ε 是一个小的正参数，d_1、d_2 是干扰信号。这个模型的实际背景是：线性部分表示的是执行器状态模型，一般来说，它比对象的动态快得多，而对象的状态模型由非线性方程 $\dot{x}=f$ 表示。干扰信号

153

⊖ 应用下文的圆判据可得到相同的结论，见例 7.11。

⊜ 本例子来自文献[139]。

d_1，d_2 由输入端分别进入对象和执行器。假设干扰信号 d_1、d_2 同属于一个信号空间$\mathcal{L}$，其中$\mathcal{L}$可能是任何$\mathcal{L}_p$ 空间，控制的目标是降低 d_1、d_2 对状态 x 的干扰。如果通过反馈控制，使得从 d_1、d_2 到 x 的输入输出映射是有限增益$\mathcal{L}$稳定的，且其$\mathcal{L}$增益小于某个给定允许偏差 $\delta>0$，那么就算实现了控制目标。为了简化设计，通常先假设 $\varepsilon=0$ 忽略执行机构动态，然后用 $v=-CA^{-1}B(u+d_2)=u+d_2$ 代入对象的动态方程而得到降维模型

$$\dot{x}=f(t,x,u+d)$$

其中，$d=d_1+d_2$。假设状态变量是可以直接量测的，我们先采用这个模型设计状态反馈控制，得到一个光滑的状态反馈 $u=\phi(t,x)$，使得对某个 $\gamma<\delta$，下式成立：

$$\|x\|_{\mathcal{L}}\leqslant\gamma\|d\|_{\mathcal{L}}+\beta \tag{7.18}$$

现在的问题是如果将这个反馈律用于具有执行机构动态的实际系统，还能满足设计目标吗？这是一个关于执行机构具有未建模动态的鲁棒控制问题。当反馈应用到实际系统时，闭环系统是

$$\dot{x}=f(t,x,Cz+d_1(t)),\quad \varepsilon\dot{z}=Az+B[\phi(t,x)+d_2(t)]$$

假设 $d_2(t)$是可微的，且 $\dot{d}_2\in\mathcal{L}$。做变量替换

$$\eta=z+A^{-1}B[\phi(t,x)+d_2(t)]$$

应用变量 η，闭环系统形为

$$\dot{x}=f(t,x,\phi(t,x)+d(t)+C\eta),\quad \varepsilon\dot{\eta}=A\eta+\varepsilon A^{-1}B[\dot{\phi}+\dot{d}_2(t)]$$

其中，

$$\dot{\phi}=\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{\partial\phi}{\partial x}f(t,x,\phi(t,x)+d(t)+C\eta)$$

不难看出闭环系统可以用图 7.1 的形式表示，其中 H_1 定义为

$$\dot{x}=f(t,x,\phi(t,x)+e_1),\quad y=\dot{\phi}=\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{\partial\phi}{\partial x}f(t,x,\phi(t,x)+e_1)$$

H_2 定义为

154

$$\dot{\eta}=\frac{1}{\varepsilon}A\eta+A^{-1}Be_2,\quad y_2=-C\eta$$

且 $u_1=d_1+d_2=d$，$u_2=\dot{d}_2$。在这个描述里，系统 H_1 是降维的标称系统，而 H_2 表示未建模动态的影响。设置 $\varepsilon=0$，即断开了回路，整个闭环系统退化为标称系统。假设反馈函数 $\phi(t,x)$对所有的(t,x,e_1)满足不等式

$$\left\|\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{\partial\phi}{\partial x}f(t,x,\phi(t,x)+e_1)\right\|\leqslant c_1\|x\|+c_2\|e_1\| \tag{7.19}$$

其中，c_1、c_2 是非负常数。利用式(7.18)和式(7.19)，可知

$$\|y_1\|_{\mathcal{L}}\leqslant\gamma_1\|e_1\|_{\mathcal{L}}+\beta_1,\quad \text{其中 }\gamma_1=c_1\gamma+c_2,\beta_1=c_1\beta$$

因为 H_2 是线性时不变系统，且 A 是 Hurwitz 的，设 P 是 Lyapunov 方程 $PA+A^{\mathrm{T}}P=-I$ 的解，再记 $V(\eta)=\varepsilon\eta^{\mathrm{T}}P\eta$，那么定理 6.1 说明对每个 $p\in[1,\infty]$，H_2 是有限增益$\mathcal{L}_p$ 稳定的，且

$$\|y_2\|_{\mathcal{L}}\leqslant\gamma_2\|e_2\|_{\mathcal{L}}+\beta_2\overset{\text{def}}{=}\varepsilon\gamma_f\|e_2\|_{\mathcal{L}}+\beta_2$$

其中，$\gamma_f=2\lambda_{\max}^2(P)\dfrac{\|A^{-1}B\|\|C\|}{\lambda_{\min}(P)}$。因此，假设反馈连接是具有确定意义的，从定理 7.7 推断出如果 $\varepsilon\gamma_f\gamma_1<1$，从 u 到 e 的输入输出映射有限增益$\mathcal{L}$稳定。从式(7.16)得到，

$$\|e_1\|_{\mathcal{L}} \leqslant \frac{1}{1-\varepsilon\gamma_1\gamma_f}[\|u_1\|_{\mathcal{L}} + \varepsilon\gamma_f \|u_2\|_{\mathcal{L}} + \varepsilon\gamma_f\beta_1 + \beta_2]$$

应用式(7.18)

$$\|x\|_{\mathcal{L}} \leqslant \gamma \|e_1\|_{\mathcal{L}} + \beta$$

并由 u_1、u_2 定义，最终可得

$$\|x\|_{\mathcal{L}} \leqslant \frac{\gamma}{1-\varepsilon\gamma_1\gamma_f}[\|d\|_{\mathcal{L}} + \varepsilon\gamma_f \|\dot{d}_2\|_{\mathcal{L}} + \varepsilon\gamma_f\beta_1 + \beta_2] + \beta \tag{7.20}$$

当 $\varepsilon \to 0$ 时，式(7.20)右端趋向 $\gamma\|d\|_{\mathcal{L}} + \beta + \gamma\beta_2$。这就说明对于充分小的 ε，把对于降阶系统设计的反馈律应用到实际系统，从 d 到 x 映射的$\mathcal{L}$增益上界与标称系统的相当。◀

7.3 绝对稳定性

考虑图7.4给出的反馈连接。我们假设外部输入 $r=0$，只研究如下无输入的系统

$$\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx + Du, \quad u = -\psi(t,y) \tag{7.21}$$

155

其中，$x \in R^n$，u，$y \in R^m$。设(A, B)可控，(A, C)可观；ψ 是一个无记忆函数，它可能是时变、非线性的，但假设对 t 是分段连续和对 y 是局部 Lipschitz 的。假设反馈连接有一个意义确定的状态模型，即当对每个(t, x)

$$u = -\psi(t, Cx + Du) \tag{7.22}$$

有一个唯一解 u，在 $D=0$ 时，显然满足确定性要求。线性系统的传递函数矩阵为

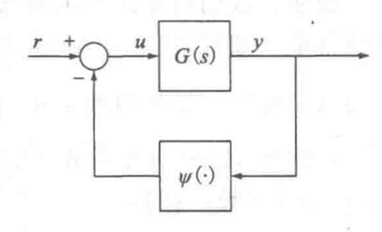


图7.4 反馈连接

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \tag{7.23}$$

它是方的和正则的。可控性和可观性的假设确保了$\{A, B, C, D\}$是 $G(s)$ 的一个最小实现。假设非线性函数 ψ 满足定义5.2中的某个扇形域条件。扇形域条件可以被全局满足，也就是说，对所有的 $y \in R^m$ 成立。扇形域条件也可以仅对 $y \in Y$ 成立，其中 $Y \subset R^m$ 是一个子集，但我们要求该子集的内点是连通的且包含原点。

对所有满足扇形域条件的非线性函数 ψ，原点 $x=0$ 总是系统式(7.21)的一个平衡点。现在的兴趣是研究原点的稳定性，这里不是针对一个给定的非线性函数，而是对所有满足给定扇形域约束的非线性函数。如果对于满足扇形域约束的所有非线性函数，原点是一致渐近稳定的，那么就称系统是绝对稳定的。该问题的形成源自 Lure，因此有时也称为 Lure 问题[⊖]。从传统上讲，绝对稳定性的定义是指原点是全局一致渐近稳定的。为了继承这个传统，我们将使用“绝对稳定”这个术语形容对所有全局满足扇形域条件且原点是全局一致渐近稳定的非线性函数。然而，有的时候我们也会考虑“有限域绝对稳定”问题。

定义 7.1 考虑系统式(7.21)，其中 ψ 满足定义5.2的某个扇形域条件。如果原点对给定扇形域里的任何非线性函数都是全局一致渐近稳定的，则称系统是绝对稳定的。如果原点只是一致渐近稳定的，则称系统是有限域绝对稳定的。

156

我们将利用 Lyapunov 方法来分析考察原点的渐近稳定性。Lyapunov 函数可以用7.1节给出的无源性理论来求取。特别地，如果闭环系统被表示为两个无源系统的反馈连接，则对闭环系统来说，两个存储函数的和可做一个备选的 Lyapunov 函数。5.1节给出的回路

⊖ 希望进一步了解相关历史，可参见文献[63，96，97，125]。

变换方法允许我们不必限制扇形域和备选 Lyapunov 函数成立的范围，下面导出圆判据和 Popov 判据。

7.3.1 圆判据

定理 7.8 如果满足下列条件中的一个，那么式(7.21)给出的系统是绝对稳定的：

- $\psi \in [K_1, \infty]$，$G(s)[I+K_1G(s)]^{-1}$是严格正实的；
- $\psi \in [K_1, K_2]$，$K=K_2-K_1=K^{\mathrm{T}}>0$，且$[I+K_2G(s)][I+K_1G(s)]^{-1}$是严格正实的。

如果扇形域条件仅在集合$Y \subset R^m$上，则上面的条件确保了有限域的绝对稳定。

这个定理被称为多变量圆判据，然而使用这个名字的原因并不清楚，不过对于单输入单输出情形，意义是清楚的。对每个$\psi \in [K_1, \infty]$或$\psi \in [K_1, K_2]$，方程式(7.22)有一个唯一解u的一个必要条件是矩阵$(I+K_1D)$是非奇异。这一点可以通过在式(7.22)中取$\psi = K_1 y$得出。因此，传递函数$[I+K_1G(s)]^{-1}$是正则的。

证明： 我们首先证明定理对扇形域$[0, \infty]$成立，然后通过回路变换可以将其推广到其他情形。如果$\psi \in [0, \infty]$且$G(s)$是严格正实的，图 7.4 给出的闭环系统是两个无源子系统的反馈连接。根据引理 5.4，线性系统的存储函数可以取成$V(x)=\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Px$，其中$P=P^{\mathrm{T}}>0$满足 Kalman-Yakubovich-Popov 方程式(5.13)～(5.15)。用这个$V(x)$作为备选 Lyapunov 函数，得到

$$\dot{V}(x) = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}P\dot{x} + \frac{1}{2}\dot{x}^{\mathrm{T}}Px = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(PA + A^{\mathrm{T}}P)x + x^{\mathrm{T}}PBu$$

由式(5.13)和式(5.14)可得到

$$\begin{aligned}\dot{V} &= -\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}L^{\mathrm{T}}Lx - \frac{1}{2}\varepsilon x^{\mathrm{T}}Px + x^{\mathrm{T}}(C^{\mathrm{T}} - L^{\mathrm{T}}W)u \\ &= -\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}L^{\mathrm{T}}Lx - \frac{1}{2}\varepsilon x^{\mathrm{T}}Px + (Cx + Du)^{\mathrm{T}}u - u^{\mathrm{T}}Du - x^{\mathrm{T}}L^{\mathrm{T}}Wu\end{aligned}$$

再应用式(5.15)和$u^{\mathrm{T}}Du=\frac{1}{2}u^{\mathrm{T}}(D+D^{\mathrm{T}})u$，可得

$$\dot{V} = -\frac{1}{2}\varepsilon x^{\mathrm{T}}Px - \frac{1}{2}(Lx + Wu)^{\mathrm{T}}(Lx + Wu) - y^{\mathrm{T}}\psi(t, y)$$

因为$y^{\mathrm{T}}\psi(t, y) \geqslant 0$，所以

157

$$\dot{V} \leqslant -\frac{1}{2}\varepsilon x^{\mathrm{T}}Px$$

于是原点是全局指数稳定的。如果ψ仅对$y \in Y$满足扇形域条件，那么前面的分析在原点的某个邻域内有效，则原点是指数稳定。对于$\psi \in [K_1, \infty]$情形，非线性函数可以通过图 7.3b中的回路变换在$[0, \infty]$上满足扇形域条件，这时线性系统的传递函数是$G(s)[I+K_1G(s)]^{-1}$，如果它是严格正实的，则应用前文证明系统是绝对稳定的。对于情形$\psi \in [K_1, K_2]$，非线性函数可以通过图 7.3d 中的回路变换，使它属于$[0, \infty]$，这时线性系统的传递函数是

$$I + KG(s)[I + K_1G(s)]^{-1} = [I + K_2G(s)][I + K_1G(s)]^{-1}$$

如它是严格正实的，则闭环系统绝对稳定。 □

例 7.11 考虑式(7.21)给出的系统，假设$G(s)$是 Hurwitz 且是严格正则的。令

$$\gamma_1 = \sup_{\omega \in R} \sigma_{\max}[G(j\omega)] = \sup_{\omega \in R} \|G(j\omega)\|$$

其中，$\sigma_{\max}[\cdot]$定义为一个复数矩阵的最大奇异值。因为$G(s)$是Hurwitz的，所以γ_1是有限常数。假设ψ满足不等式

$$\|\psi(t,y)\| \leqslant \gamma_2 \|y\|, \forall t \geqslant 0, \quad \forall y \in R^m \tag{7.24}$$

则它属于扇形域$[K_1, K_2]$，其中$K_1 = -\gamma_2 I$，$K_2 = \gamma_2 I$。为了应用定理7.8，我们只需要说明

$$Z(s) = [I + \gamma_2 G(s)][I - \gamma_2 G(s)]^{-1}$$

是严格正实的。注意$\det[Z(s) + Z^T(-s)]$不恒等于零，因为$Z(\infty) = I$。应用引理5.1，因为$G(s)$是Hurwitz的，如果$[I - \gamma_2 G(s)]^{-1}$也是Hurwitz的，那么$Z(s)$将是Hurwitz的。注意到[㊀]

$$\sigma_{\min}[I - \gamma_2 G(j\omega)] \geqslant 1 - \gamma_1 \gamma_2$$

那么当$\gamma_1\gamma_2 < 1$时，$\det[I - \gamma_2 G(j\omega)]$的图像既不经过也不包围原点。因此，应用多变量Nyquist判据[㊁]，$[I - \gamma_2 G(s)]^{-1}$是Hurwitz矩阵，从而$Z(s)$是Hurwitz的。接下来，我们说明$Z(j\omega) + Z^T(-j\omega) > 0$，$\forall \omega \in R$。因为

$$\begin{aligned}
Z(j\omega) + Z^T(-j\omega) &= [I + \gamma_2 G(j\omega)][I - \gamma_2 G(j\omega)]^{-1} \\
&\quad + [I - \gamma_2 G^T(-j\omega)]^{-1}[I + \gamma_2 G^T(-j\omega)] \\
&= [I - \gamma_2 G^T(-j\omega)]^{-1}[2I - 2\gamma_2^2 G^T(-j\omega) G(j\omega)] \\
&\quad \times [I - \gamma_2 G^T(j\omega)]^{-1}
\end{aligned}$$

158

所以，对所有的$\omega \in R$，$Z(j\omega) + Z^T(-j\omega)$是正定的充分必要条件是

$$\sigma_{\min}[I - \gamma_2^2 G^T(-j\omega) G(j\omega)] > 0, \forall \omega \in R$$

现在，由于$\gamma_1\gamma_2 < 1$，我们有

$$\begin{aligned}
\sigma_{\min}[I - \gamma_2^2 G^T(-j\omega) G(j\omega)] &\geqslant 1 - \gamma_2^2 \sigma_{\max}[G^T(-j\omega)] \sigma_{\max}[G(j\omega)] \\
&\geqslant 1 - \gamma_1^2 \gamma_2^2 > 0
\end{aligned}$$

最后，$Z(\infty) + Z^T(\infty) = 2I$。因此，引理5.1的所有条件都满足，我们断言当$\gamma_1\gamma_2 < 1$时，$Z(s)$是严格正实的，从而系统是绝对稳定的。这是一个鲁棒性的结论，说明前向是Hurwitz传递函数，反馈是一个满足式(7.24)的非线性函数，只要γ_2充分小，那么闭环将继续保持渐近稳定性[㊂]。◀

对于$m = 1$的情形，定理7.8的条件可通过$G(s)$的Nyquist图进行验证。当$\psi \in [\alpha, \beta]$，$\beta > \alpha$时，如果标量传递函数

$$Z(s) = \frac{1 + \beta G(s)}{1 + \alpha G(s)}$$

是严格正实的，则系统绝对稳定。应用引理5.1，$Z(s)$是严格正实，如果它是Hurwitz的，且

$$\mathrm{Re}\left[\frac{1 + \beta G(j\omega)}{1 + \alpha G(j\omega)}\right] > 0, \quad \forall \omega \in [0, \infty] \tag{7.25}$$

㊀ 证明中应用了复数矩阵的奇异值的如下性质：

$$\det G \neq 0 \Leftrightarrow \sigma_{\min}[G] > 0, \sigma_{\min}[G^{-1}] = \frac{1}{\sigma_{\min}}[G], \text{如果 } \sigma_{\min}[G] > 0$$

$$\sigma_{\min}[I + G] \geqslant 1 - \sigma_{\max}[G], \sigma_{\max}[G_1 G_2] \leqslant \sigma_{\max}[G_1] \sigma_{\max}[G_2]$$

㊁ 多变量的Nyquist稳定判据的说明可看文献[21，pp160～161]。

㊂ 不等式$\gamma_1\gamma_2 < 1$也能从小增益定理获得(参阅例7.9)。

为了将条件式(7.25)和$G(s)$的Nyquist图联系起来，我们根据α的符号，分为三种情形讨论。首先考虑$\beta>\alpha>0$，式(7.25)可以写为

$$\operatorname{Re}\left[\frac{\frac{1}{\beta}+G(\mathrm{j}\omega)}{\frac{1}{\alpha}+G(\mathrm{j}\omega)}\right]>0, \quad \forall\,\omega\in[0,\infty] \tag{7.26}$$

对于$G(s)$的Nyquist图上的一点q，两个复数$\left(\frac{1}{\beta}\right)+G(\mathrm{j}\omega)$和$\left(\frac{1}{\alpha}\right)+G(\mathrm{j}\omega)$（其中$G(\mathrm{j}\omega)=q$）可以分别用从$q$出发到$-\left(\frac{1}{\beta}\right)+\mathrm{j}0$和$-\left(\frac{1}{\alpha}\right)+\mathrm{j}0$的线段来表示（见图7.5）。如果两个复数的幅角之差小于$\frac{\pi}{2}$，即$\theta_1-\theta_2<\frac{\pi}{2}$那么这两个复数之比的实部是正的。定义复平面

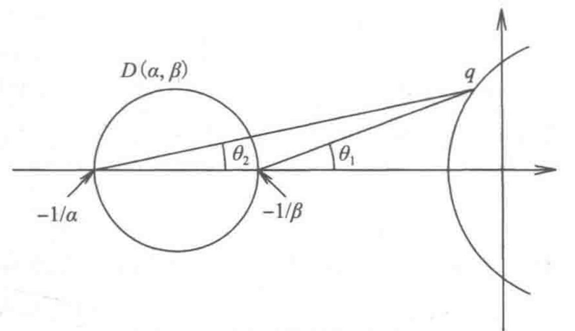


图7.5 圆判据的图示表示

上的闭圆盘$D(\alpha,\beta)$，该圆的直径是连接$-\left(\frac{1}{\alpha}\right)+\mathrm{j}0$和$-\left(\frac{1}{\beta}\right)+\mathrm{j}0$的线段。容易看出当$q$在闭圆盘$D(\alpha,\beta)$外时，$\theta_1-\theta_2<\frac{\pi}{2}$。因为要求式(7.26)对所有的$\omega$成立，所以要求$G(s)$的Nyquist图必须严格地在闭圆盘$D(\alpha,\beta)$之外。另一方面，如果$\frac{G(s)}{[1+\alpha G(s)]}$是Hurwitz的，则$Z(s)$是Hurwitz的。Nyquist稳定判据说明$\frac{G(s)}{[1+\alpha G(s)]}$是Hurwitz的，当且仅当$G(s)$的Nyquist图没有与点$-\left(\frac{1}{\alpha}\right)+\mathrm{j}0$相交，而是在逆时针上环绕该点$p$次，其中$p$是$G(s)$在开环右半复平面的极点数[⊖]。因此，如果$G(s)$的Nyquist图不进入圆盘$D(\alpha,\beta)$，而是在逆时针方向上环绕该闭圆盘$p$次，则定理7.8的条件被满足。接下来，考虑$\beta>0$，$\alpha=0$情形。对这种情形，定理7.8要求$1+\beta G(s)$时严格正实。如果$G(s)$是Hurwitz的，且

$$\operatorname{Re}[1+\beta G(\mathrm{j}\omega)]>0\Leftrightarrow\operatorname{Re}[G(\mathrm{j}\omega)]>-\frac{1}{\beta}, \quad \forall\,\omega\in[0,\infty]$$

它在图上的等价条件是$G(s)$的Nyquist图位于由$\operatorname{Re}[s]=-\frac{1}{\beta}$定义的垂直线右边。最后，考虑$\alpha<0<\beta$情形，式(7.25)等价于

$$\operatorname{Re}\left[\frac{\frac{1}{\beta}+G(\mathrm{j}\omega)}{\frac{1}{\alpha}+G(\mathrm{j}\omega)}\right]<0, \quad \forall\,\omega\in[0,\infty] \tag{7.27}$$

不等号与式(7.25)相反，这是因为从式(7.25)到式(7.27)乘以了常数$\frac{\alpha}{\beta}$。重复以前的证明，可知要使式(7.27)成立，$G(s)$的Nyquist图必须位于闭圆盘$D(\alpha,\beta)$内。因而，不能环绕$-\left(\frac{1}{\alpha}\right)+\mathrm{j}0$点。因此，根据Nyquist稳定判据，可以看出如果$\frac{G(s)}{[1+\alpha G(s)]}$是Hurwitz

159

⊖ 当$G(s)$在虚轴上有极点，Nyquist路径通常取成向右半平面缩进一点。

的，$G(s)$必须是 Hurwitz 的。上述三种情形讨论可由下面定理来概括，这个判据称为圆判据。 160

定理 7.9 考虑式(7.21)描述的一个单输入-单输出系统，其中$\{A, B, C, D\}$是$G(s)$的最小实现，$\psi\in[\alpha, \beta]$。如果下面条件中有一个满足，则系统是绝对稳定的。

1) 如果$0<\alpha<\beta$，则要求$G(s)$的 Nyquist 图不进入圆盘$D(\alpha, \beta)$内，而且在逆时针环绕该圆盘点p次，其中p是$G(s)$具有正实部极点个数。

2) 如果$0=\alpha<\beta$，则要求$G(s)$是 Hurwitz 的，且$G(s)$的 Nyquist 图位于垂直线$\mathrm{Re}[s]=-\frac{1}{\beta}$右边。

3) 如果$\alpha<0<\beta$，则要求$G(s)$是 Hurwitz 的，且$G(s)$的 Nyquist 图位于圆盘$D(\alpha, \beta)$内。

如果扇形域条件仅在一个区间$[a, b]$被满足，则上述条件保证有限域的绝对稳定。

圆判据允许我们仅通过利用$G(s)$的 Nyquist 图去考察绝对稳定性。其中重要的一点是因为 Nyquist 图可以由实验数据直接决定。有了$G(s)$的 Nyquist 图，我们就能确定系统是绝对稳定的可能扇形域。下面两个例子说明了圆判据的应用。

例 7.12 图 7.6 给出系统

$$G(s)=\frac{24}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

的 Nyquist 图。由于$G(s)$是 Hurwitz，所以允许α是负的，要应用圆判据的第三种情形。因此，我们需要决定一个包围$G(s)$的 Nyquist 图的圆盘$D(\alpha, \beta)$。很清楚，圆盘的选择不是唯一的。假设我们取复平面原点为圆盘中心，则圆盘为$D(-\gamma_2, \gamma_2)$，其中要选择半径$\left(\frac{1}{\gamma_2}\right)>0$。如果$G(j\omega)<\frac{1}{\gamma_2}$，则 Nyquist 图将在这个圆盘内。特别地，如果我们设定$\gamma_1=\sup_{\omega\in R}|G(j\omega)|$，则$\gamma_2$必须满足$\gamma_1\gamma_2<1$。这与我们在例 7.11 找到的条件相同。不难看出$|G(j\omega)|$在$\omega=0$时最大$\gamma_1=4$。因此，γ_2必须小于 0.25。于是系统对所有位于扇形域$[-0.25, 0.25]$上的非线性是绝对稳定的。从图 7.6 给出的 Nyquist 图和圆盘$D(-0.25, 0.25)$，不难发现将原点取成中心不是最好的选择。通过选取另一个中心，我们可能获得围绕 Nyquist 图更小的圆盘。例如取点$1.5+j0$为中心，从这点到 Nyquist 图的最大距离是 2.834。因此，选择圆盘的直径为 2.9，可以保证 Nyquist 图在圆盘$D\left(-\frac{1}{4.4}, \frac{1}{1.4}\right)$内，同时我们推断系统对所有在扇形域$[-0.227, 0.714]$上的非线性是绝对稳定的。同以前的扇形域相比可看出，让扇形域的下界小一点，就可能让其上界有较大提高。 161
显然，对于圆盘中心的选择仍然有优化的空间。在例 7.11 中，我们用范数不等式来确定扇形域的边界，相比之下，本例应用图形显示和圆判据来使扇形域的边界更直观，还能获得扇形域的保守性较小估计。下面考虑约束α为零及应用圆判据的第二种情形。这时要求 Nyquist 图位于垂直线$\mathrm{Re}[s]=-0.857$的右边。因此，我们推断系统对所有在扇形域$[0, 1.166]$的非线性是绝对稳定的。它给了将非线性限制在第一、第三象限内的β的最好估计。为了说明圆判据应用的灵活性，假设$\psi(y)=\mathrm{sat}(y)$，研究系统的稳定性。因为饱和非线性属于扇形域$[0, 1]$，因此可推断在扇形域是$[0, 1.166]$，而不是$(-0.25, 0.25)$或$[-0.227, 0.714]$。 ◀

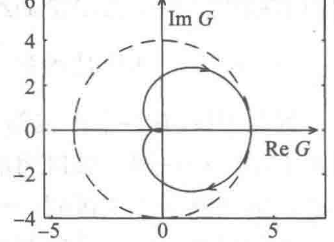


图 7.6 例 7.12 的 Nyquist 图

例 7.13 考虑线性系统的传递函数

$$G(s)=\frac{24}{(s-1)(s+2)(s+3)}$$

它不是 Hurwitz 的，因为它有一个极点在右半平面。因此，我们必须将 α 取成是正的，即圆判据的第一种情形。$G(s)$ 的 Nyquist 图如图 7.7 所示。根据圆判据知道，Nyquist 图必须沿着逆时针方向绕圆盘 $D(\alpha,\ \beta)$ 一圈。因此，整个圆盘必须在图的左叶内。取 $-3.2+\mathrm{j}0$ 为圆盘的中心，它近似于左叶在实轴上的两个端点之中点。从这个中心到 Nyquist 图的最近距离是 0.168 8，因此选择半径是 0.168，从而可得系统对所有在扇形域[0.296 9，0.329 8]上的非线性是绝对稳定。◀

162

图 7.7 例 7.13 的 Nyquist 图

从例 7.11 到例 7.13，都是全局满足扇形域条件的情形。下一个例子将给出扇形域条件仅在一个有限区间中满足。

例 7.14 考虑图 7.4 给出的反馈连接，其中线性系统由传递函数

$$G(s)=\frac{s+2}{(s+1)(s-1)}$$

给出，非线性部分是 $\psi(y)=\mathrm{sat}(y)$。非线性函数全局属于扇形域[0，1]。然而，由于 $G(s)$ 不是 Hurwitz 的，我们只能用圆判据的第一种情形，即扇形域条件需要一个正的 α。因此，我们不能用圆判据得出全局绝对稳定 ⊖，只能希望是有限域的绝对稳定。图 7.8 显示在区间 $[-a,\ a]$ 上，非线性函数 ψ 属于扇形域 $[\alpha,\ \beta]$，其中 $\alpha=\frac{1}{a}$，$\beta=1$。

因为 $G(s)$ 有一个正实部的极点，它的 Nyquist 图如图 7.9 所示，必须以逆时针方向绕圆盘 $D(\alpha,\ 1)$ 一圈。可以用解析法证明当 $\alpha>0.535\,9$ 时，式(7.25)满足。因此，选择 $\alpha=0.55$，扇形域条件在区间 $[-1.818,\ 1.818]$ 上满足，且圆盘 $D(0.55,\ 1)$ 被 Nyquist 图以逆时针方向环绕一次。从圆判据的第一情形，我们推断出系统是有限域的且绝对稳定的。也能用 Lyapunov 函数 $V=x^{\mathrm{T}}Px$ 来估计吸引域。$G(s)$ 的状态空间实现为

$$\dot{x}_1=x_2,\dot{x}_2=x_1+u,\quad y=2x_1+x_2$$

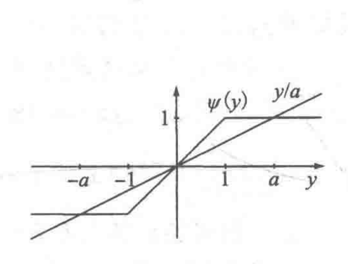


图 7.8 例 7.14 的扇形域

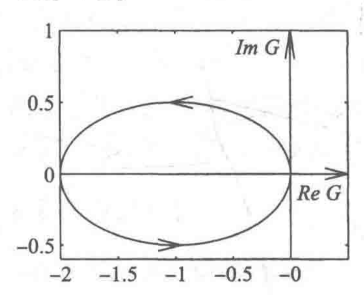


图 7.9 例 7.14 的 Nyquist 图

如同定理 7.8 证明，取二次型 Lyapunov 函数 $V=x^{\mathrm{T}}Px$，先用图 7.3d 给出的回路变换将非线性 ψ 变换为一个无源非线性。回路变换为

163

$$u=-\alpha y+\tilde{u}=-0.55y+\tilde{u},\quad \tilde{y}=(\beta-\alpha)y+\tilde{u}=0.45y+\tilde{u}$$

变换后的线性系统是

⊖ 事实上，原点不是全局渐近稳定的，因为系统有三个平衡点。

$$\dot{x} = Ax + B\tilde{u}, \quad \tilde{y} = Cx + D\tilde{u}$$

其中，

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.1 & -0.55 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.45 \end{bmatrix}, \quad D = 1$$

通过解 Kalman-Yakubovich-Popov 方程式(5.13)～式(5.15)得到矩阵 P。从方程式(5.15)解出 $W=\sqrt{2}$。取 $\varepsilon=0.02$，可以验证方程式(5.13)和式(5.14)有两个解，分别是[㊀]

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.4946 & 0.4834 \\ 0.4834 & 1.0774 \end{bmatrix}, \quad L_1 = \begin{bmatrix} 0.2946 & -0.4436 \end{bmatrix}$$

和

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0.7595 & 0.4920 \\ 0.4920 & 1.9426 \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} -0.2885 & 1.0554 \end{bmatrix}$$

因此对系统来说，$V_1(x)=x^{\mathrm{T}}P_1x$ 和 $V_2(x)=x^{\mathrm{T}}P_2x$ 是两个不同的 Lyapunov 函数。对每个 Lyapunov 函数，在 $\{|y|\leqslant 1.8181\}$ 约束下，用集合 $\{V(x)\leqslant c\}$ 估计吸引域。注意到[㊁]

$$\min_{\{|y|=1.818\}} V_1(x) = \frac{(1.818)^2}{b^{\mathrm{T}}P_1^{-1}b} = 0.3445 \text{ 和 } \min_{\{|y|=1.818\}} V_2(x) = \frac{(1.818)^2}{b^{\mathrm{T}}P_2^{-1}b} = 0.6212$$

其中，$b^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}$，我们通过集合 $\{V_1(x)\leqslant 0.34\}$ 和 $\{V_2(x)\leqslant 0.62\}$ 来估计吸引域，如图 7.10所示。根据注释 3.1，这两个集合的并集是吸引域的一个估计，它比用单独 Lyapunov函数估计的吸引域要大些。 ◀

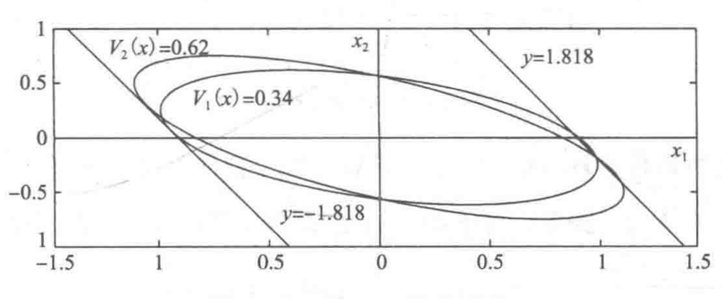


图 7.10 例 7.14 的吸引域

7.3.2 Popov 判据

考虑系统(7.21)的一个特殊情形：

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx, \quad u_i = -\psi_i(y_i), \quad 1 \leqslant i \leqslant m \tag{7.28}$$

其中，$x\in R^n$，u，$y\in R^m$，(A, B)可控，(A, C)可观，且 ψ_i 是一个局部 Lipschitz 的无记忆非线性函数，并属于扇形域$[0, k_i]$。在这个特殊情况下，传递函数$G(s)=C(sI-A)^{-1}B$ 是严格正则的，且 ψ_i 是时不变和解耦的，即 $\psi_i(y)=\psi_i(y_i)$。由于 $D=0$，反馈连接有一个确定的状态空间模型。下面的定理称为多变量 Popov 判据，它是通过一个(Lure 型)Lyapunov 函数 $V=\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Px+\sum\gamma_i\int_0^{y_i}\psi_i(\sigma)\mathrm{d}\sigma$ 来证明的。提出这个函数是受到回路变换的启发， 164

㊀ 选择 ε 值，使得 $H\left(s-\frac{\varepsilon}{2}\right)$ 是正实的且 Hurwitz 的，其中 $H(s)=C(sI-A)^{-1}B+D$，则 P 可以像在练习 5.14 描述的那样通过解一个 Riccati 方程得到。

㊁ 参见方程式(B.3)。

该回路变换将系统式(7.28)变换成两个无源的动态系统的反馈连接。

定理 7.10 系统式(7.28)是绝对稳定的，如果对 $1\leqslant i\leqslant m$，$\psi_i\in[0, k_i]$，$0<k_i\leqslant\infty$，且存在一个常数 $\gamma_i\geqslant 0$，使得对 A 的每个特征根 λ_k，$(1+\lambda_k\gamma_i)\neq 0$ 都成立，并且使得 $M+(I+s\Gamma)G(s)$ 是严格正实的，其中，$\Gamma=\mathrm{diag}(\gamma_1, \cdots, \gamma_m)$ 和 $M=\mathrm{diag}\left(\frac{1}{k_1}, \cdots, \frac{1}{k_m}\right)$。如果扇形域条件仅对集合 $Y\subset R^m$ 成立，则上述条件确保有限域的绝对稳定。

证明： 通过图 7.11 给出的回路变换，可以得到 $\widetilde{H}_1$ 和 $\widetilde{H}_2$ 组成的反馈连接，其中 $\widetilde{H}_1$ 是一个线性系统，它的传递函数是

$$\begin{aligned} M+(I+s\Gamma)G(s) &= M+(I+s\Gamma)C(sI-A)^{-1}B \\ &= M+C(sI-A)^{-1}B+\Gamma Cs(sI-A)^{-1}B \\ &= M+C(sI-A)^{-1}B+\Gamma C(sI-A+A)(sI-A)^{-1}B \\ &= M+(C+\Gamma CA)(sI-A)^{-1}B+\Gamma CB \end{aligned}$$

设 $\{\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}\}$ 是 $M+(I+s\Gamma)G(s)$ 的一个实现，其中 $\mathcal{A}=A$，$\mathcal{B}=B$，$\mathcal{C}=C+\Gamma CA$ 和 $\mathcal{D}=M+\Gamma CB$。令 λ_k 是 A 的一个特征根，且 v_k 是对应的一个特征向量，则

$$(C+\Gamma CA)v_k=(C+\Gamma C\lambda_k)v_k=(I+\lambda_k\Gamma)Cv_k$$

$(1+\lambda_k\gamma_i)\neq 0$ 蕴含了 $(\mathcal{A}, \mathcal{C})$ 是能观的；因此，$\{\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}\}$ 是一个最小实现。如果 $M+$ [165] $(I+s\Gamma)G(s)$ 是严格正实的，根据 Kalman-Yakubovich-Popov 引理，存在矩阵 $P=P^{\mathrm{T}}>0$，L 和 W 以及一个正数 ε，使得

$$PA+A^{\mathrm{T}}P=-L^{\mathrm{T}}L-\varepsilon P \tag{7.29}$$

$$PB=(C+\Gamma CA)^{\mathrm{T}}-L^{\mathrm{T}}W \tag{7.30}$$

$$W^{\mathrm{T}}W=2M+\Gamma CB+B^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}\Gamma \tag{7.31}$$

并且 $V=\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Px$ 可以作为 $\widetilde{H}_1$ 的一个存储函数。另一方面，可以验证用 $\sum\gamma_i\int_0^{y_i}\psi_i(\sigma)\mathrm{d}\sigma$ 作为存储函数 $\widetilde{H}_2$ 是无源的。因此，对于图 7.11 给出的反馈连接，存在存储函数

$$V=\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Px+\sum\gamma_i\int_0^{y_i}\psi_i(\sigma)\mathrm{d}\sigma$$

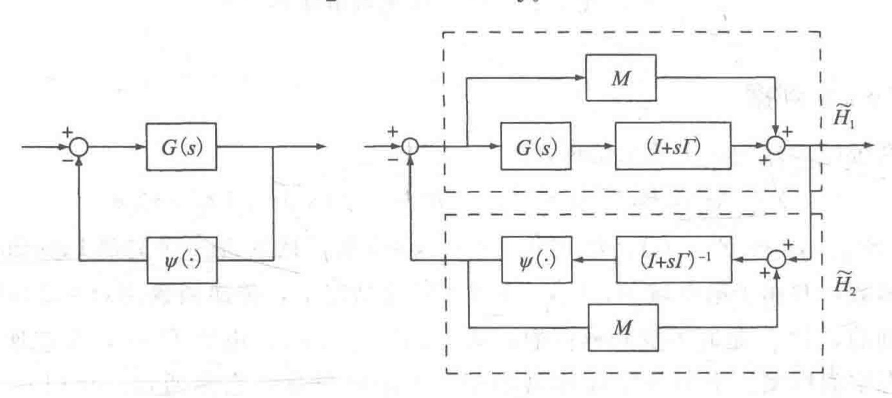


图 7.11 回路变换

将这个 V 作为由式(7.28)给出的系统的一个 Lyapunov 函数，则 $\dot{V}$ 导数是

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}P\dot{x}+\frac{1}{2}\dot{x}^{\mathrm{T}}Px+\psi^{\mathrm{T}}(y)\Gamma\dot{y} \\ &= \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(PA+A^{\mathrm{T}}P)x+x^{\mathrm{T}}PBu+\psi^{\mathrm{T}}(y)\Gamma C(Ax+Bu) \end{aligned}$$

应用式(7.29)和式(7.30)得出

$$\dot{V}=-\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}L^{\mathrm{T}}Lx-\frac{1}{2}\varepsilon x^{\mathrm{T}}Px+x^{\mathrm{T}}(C^{\mathrm{T}}+A^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}\Gamma-L^{\mathrm{T}}W)u$$
$$+\psi^{\mathrm{T}}(y)\Gamma CAx+\psi^{\mathrm{T}}(y)\Gamma CBu$$

用 $u=-\psi(y)$ 代入后再由式(7.31)可得到

$$\dot{V}=-\frac{1}{2}\varepsilon x^{\mathrm{T}}Px-\frac{1}{2}(Lx+Wu)^{\mathrm{T}}(Lx+Wu)-\psi(y)^{\mathrm{T}}[y-M\psi(y)]\leqslant-\frac{1}{2}\varepsilon x^{\mathrm{T}}Px$$

166

这就证明了原点是全局渐近稳定。如果 ψ 仅对 $y\in Y$ 满足扇形域条件，前面的证明在原点的某个邻域依然有效，说明原点是渐近稳定。 □

要求 $M+(I+s\Gamma)G(s)$ 是严格正实的，则 $G(s)$ 必须是 Hurwitz 的。可以采用圆判据使用过的方法，用一个回路变换去除对 $G(s)$ 的约束，即用 $G(s)[I+K_1G(s)]^{-1}$ 代替 $G(s)$。通常在 Popov 判据中不重复这种做法，下面通过一个例子来说明另一种做法。考虑 $m=1$ 的情形，我们给出一种图示方式来检查 $Z(s)=\left(\frac{1}{k}\right)+(1+s\gamma)G(s)$ 的严格正实性。应用引理5.1，$Z(s)$ 是严格正实的条件是：$G(s)$ 是 Hurwitz 的，且

$$\frac{1}{k}+\mathrm{Re}[G(\mathrm{j}\omega)]-\gamma\omega\mathrm{Im}[G(\mathrm{j}\omega)]>0,\quad \forall\,\omega\in[0,\infty] \tag{7.32}$$

其中，$G(\mathrm{j}\omega)=\mathrm{Re}[G(\mathrm{j}\omega)]+\mathrm{j}\mathrm{Im}[G(\mathrm{j}\omega)]$。如果我们将 ω 看成参数，在复平面上做出曲线 $\mathrm{Re}[G(\mathrm{j}\omega)]+\mathrm{j}\omega\mathrm{Im}[G(\mathrm{j}\omega)]$，则式(7.32)相当于该曲线位于一条直线的右边，而该直线经过点 $-\left(\frac{1}{k}\right)+\mathrm{j}0$，而其斜率为 $\frac{1}{\gamma}$（见图7.12）。这条曲线称为 $G(s)$ 的 Popov 曲线，与 Nyquist 曲线相比较，它将 $\mathrm{Im}[G(\mathrm{j}\omega)]$ 换成了 $\omega\mathrm{Im}[G(\mathrm{j}\omega)]$。如果式(7.32)仅对 $\omega\in[0,\infty)$ 成立，这意味着当 ω 趋于无穷大时，不等式的左边将趋于零，这时就需要验证

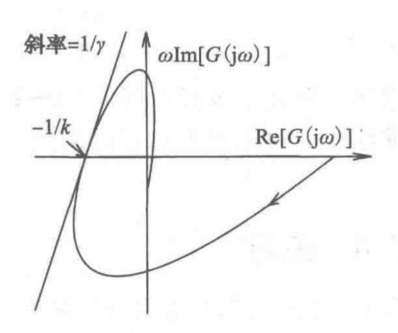


图7.12　Popov 图

$$\lim_{\omega\to\infty}\omega^2\left\{\frac{1}{k}+\mathrm{Re}[G(\mathrm{j}\omega)]-\gamma\omega\mathrm{Im}[G(\mathrm{j}\omega)]\right\}>0$$

当 $\gamma=0$ 时，式(7.32)就是圆判据第二种情形，$\mathrm{Re}[G(\mathrm{j}\omega)]>-\frac{1}{k}$，这就说明对于系统式(7.28)，Popov 判据的条件要比圆判据弱。换句话说，要求 $\gamma>0$ 蕴含绝对稳定可在较弱条件下成立。

例7.15 考虑二维系统

$$\dot{x}_1=x_2,\dot{x}_2=-x_2-h(y),\quad y=x_1$$

167

如果取 $\psi=h$，该系统符合式(7.28)，但其中的 A 不是 Hurwitz 矩阵。对第二个状态方程的右边加减项 αy，其中 $\alpha>0$，且定义 $\psi(y)=h(y)-\alpha y$，则系统依然具有式(7.28)的形式，但其中

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\alpha & -1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$$

假设 h 属于扇形域 $[\alpha,\beta]$，$\beta>\alpha$，则 ψ 属于扇形域 $[0,k]$，其中 $k=\beta-\alpha$，式(7.32)就成为

$$\frac{1}{k}+\frac{\alpha-\omega^2+\gamma\omega^2}{(\alpha-\omega^2)^2+\omega^2}>0,\quad \forall\,\omega\in[0,\infty]$$

只要选取 $\gamma>1$，对所有的有限正数 α、k 和 $\omega\in[0,\infty)$，这个不等式总成立。而当 $k=\infty$ 时，下式成立：

$$\lim_{\omega\to\infty}\frac{\omega^2(\alpha-\omega^2+\gamma\omega^2)}{(\alpha-\omega^2)^2+\omega^2}=\gamma-1>0$$

因此，线性部分是严格正实的，从而系统对于扇形域 $[\alpha,\infty]$ 上的所有非线性 h 是绝对稳定的，其中 α 可以任意小。图 7.13 给出 $\alpha=1$ 时 $G(j\omega)$ 的 Popov 图，其中只需要画出 $\omega\geqslant0$ 部分，因为 $\mathrm{Re}[G(j\omega)]$ 和 $\omega\mathrm{Im}[G(j\omega)]$ 都是 ω 的偶函数。由图中可看出直线经过原点且斜率为 1，$G(j\omega)$ 的Popov图从右边逼近这条直线。由图还可以看出对于任意经过原点斜率小于 1 的直线，$G(j\omega)$ 的 Popov 图总在直线右边，且当 ω 趋于∞时，渐近地趋向这条直线。为了体会 Popov 图中 $\gamma>0$ 的优势，根据定理 7.9 的第二种情形，$G(s)$ 的 Nyquist 图位于经过$\mathrm{Re}[s]=-\frac{1}{k}$的垂线的右边($\gamma=0$)，系统是绝对稳定的。

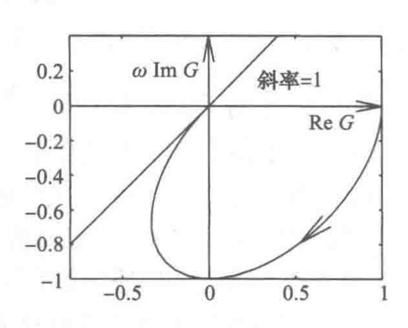


图 7.13　例 7.15 的 Popov 图

因为 Nyquist 图的一部分位于左半平面，所以 k 不能任意大。k 的最大允许值可以从条件

$$\frac{1}{k}+\frac{\alpha-\omega^2}{(\alpha-\omega^2)^2+\omega^2}>0,\quad \forall\,\omega\in[0,\infty]$$

求出。解此不等式可得 $k<1+2\sqrt{\alpha}$。因此，用圆判据仅能对扇形域$[\alpha,\ 1+\alpha+2\sqrt{\alpha}-\varepsilon]$上的非线性 h 得出绝对稳定的结论，其中 $\alpha>0$ 和 $\varepsilon>0$ 能任意小。◀

7.4 练习

7.1　考虑图 7.1 给出的反馈连接，其中

$$H_1: \dot{x}_1=-x_1+x_2,\quad \dot{x}_2=-x_1^3-x_2+e_1,\quad y_1=x_2$$
$$H_2: \dot{x}_3=-x_3^3+e_2,\quad y_2=x_3^3$$

168

令 $u_2=0$，$u=u_1$ 是输入，$y=y_1$ 是输出。

(1) 说明输入为零时，系统的原点是全局渐近稳定的。

(2) 说明从 u 到 y 的映射是有限增益$\mathcal{L}_2$ 稳定的。

7.2　对下列系统重复上一题的要求。

$$H_1: \dot{x}_1=x_2,\ \dot{x}_2=-x_1-\psi_1(x_2)+e_1,\quad y_1=x_2$$
$$H_2: \dot{x}_3=-a\psi_2(x_3)+e_2,\quad y_2=\psi_2(x_3)$$

其中，ψ_1、ψ_2 是局部 Lipschitz 函数，对所有的 z 满足 $z\psi_1(z)>bz^2$ 和 $z\psi_2(z)>0$，a、b 是正数。

7.3　考虑系统

$$\dot{x}_1=-x_1-x_2+u,\ \dot{x}_2=\psi_1(x_1)-\psi_2(x_2),\ y=x_1$$

其中，ψ_i 属于扇形域$[\alpha_i,\ \beta_i]$，$\beta_i>\alpha_i>0$，$i=1,\ 2$。

(1) 将此状态方程化为两个严格无源动态系统的反馈连接。

(2) 说明无输入时，系统的原点是全局指数稳定的。

(3) 求解 $V(x)\geqslant0$ 以满足 Hamilton-Jacobi 不等式，其中 $\gamma=\frac{\beta_1}{\alpha_1}$。

(4) 令 $u=-\psi_3(y)+r$，其中 ψ_3 属于扇形域$[-\delta,\ \delta]$，$\delta>0$。寻找 δ 的一个上界，使得从 r 到 y 的映射是有限增益$\mathcal{L}_2$ 稳定的。

7.4 考虑系统

$$\dot{x}_1=-x_1+x_2, \dot{x}_2=-\psi_1(x_1)-x_2+u, y=x_2$$

其中，ψ_1 属于扇形域$[k,\ \infty](k>0)$，令 $u=-\psi_2(t,\ y)+r$，ψ_2 是属于扇形域$[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$的一个时变无记忆函数。

(1) 说明输入为零时，闭环系统的原点是全局一致渐近稳定的。

(2) 说明从 r 到 y 的映射是有限增益$\mathcal{L}_2$ 稳定。

7.5 考虑系统

$$\dot{x}_1=-x_1-x_2+u, \dot{x}_2=x_1-x_2-x_2^3, y=x_1$$

(1) 说明输入为零时，系统的原点是全局指数稳定的。

(2) 说明系统是有限增益$\mathcal{L}_\infty$稳定的，且$\mathcal{L}_\infty$增益$\leqslant\sqrt{2}$。

169

(3) 令 $u=-\psi(y)+r$，其中，ψ 是局部 Lipschitz 的且属于扇形域$[-\delta,\ \delta]$，$\delta>0$。找出 δ 的一个上界，使得输入为 r 输出为 y 的系统是有限增益$\mathcal{L}_\infty$稳定的。

7.6 考虑二维系统

$$\dot{x}=\frac{x}{1+x^2}+z, \varepsilon\dot{z}=-z+u, y=x$$

其中，$\dot{z}$ 所在的方程表示快的执行机构动态，反馈控制是 $u=-2x+r$。寻找关于 ε 的一个上界，使得对每个 $p\in[1,\ \infty]$，从 r 到 y 的映射是有限增益$\mathcal{L}_p$ 稳定的。

7.7 考虑线性时变系统 $\dot{x}=[A+BE(t)C]x$，其中 A 是 Hurwitz 的，且$\|E(t)\|<k$，$\forall t\geqslant 0$。令 $\gamma=\sup_{\omega\in R}\sigma_{\max}[C(\mathrm{j}\omega I-A)^{-1}B]$，寻找关于 k 的一个上界，使得原点是一致渐近稳定的。

7.8 考虑图 7.1 的反馈连接

$$H_1:\dot{x}_1=-x_1+e_1, \dot{x}_2=x_1-x_2+e_1, y_1=x_1+x_2 \text{和 } H_2:y_2=\psi(e_2)$$

其中，ψ 是局部 Lipschitz 函数，对所有的 y，满足 $y\psi(y)\geqslant 0$ 和 $|\psi(y)|\leqslant 2$，且当 $|y|\leqslant 1$ 时，$\psi(y)=0$。证明输入为零时，系统的原点是全局指数稳定的。

7.9 考虑单输入系统 $\dot{x}=Ax+BM\mathrm{sat}\left(\frac{u}{M}\right)$，控制输入在 $\pm M$ 饱和，令 $u=-Fx$，其中 $A-BF$是 Hurwitz 的。应用圆判据去考察闭环系统原点的渐近稳定性。

(1) 说明闭环系统可表示为图 7.4 的形式，其中 $G(s)=-F(sI-A+BF)^{-1}B$ 和 $\psi(y)=y-M\mathrm{sat}\left(\frac{y}{M}\right)$。

(2) 说明如果 $\mathrm{Re}[G(\mathrm{j}\omega)]>-1$，$\forall\omega$，则原点是全局渐近稳定的。

(3) 如果 $\mathrm{Re}[G(\mathrm{j}\omega)]>-\beta$，$\forall\omega$，$\beta>1$，说明原点是渐近稳定的且它的吸引域可由$\{x^{\mathrm{T}}Px\leqslant c\}$估计，其中 P 满足

$$P(A-BF)+(A-BF)^{\mathrm{T}}P=-L^{\mathrm{T}}L-\varepsilon P, PB=-\beta F^{\mathrm{T}}-\sqrt{2}L^{\mathrm{T}}$$

和 $c>0$ 并且$\{x^{\mathrm{T}}Px\leqslant c\}\subset\left\{|Fx|\leqslant\frac{\beta M}{\beta-1}\right\}$。

(4) 当 $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$，$F=[2\quad 1]$，$M=1$ 时，估计吸引区域。

7.10 考虑图 7.4 的反馈连接，用圆判据和 Popov 判据寻找绝对稳定的扇形域[α，β]，其中

(1) $G(s)=\dfrac{1}{(s+2)(s-1)}$　　(2)$G(s)=\dfrac{1}{(s+2)(s+1)}$

(3) $G(s)=\dfrac{2s}{s^2-2s+1}$　　(4)$G(s)=\dfrac{2s}{s^2+2s+1}$

(5) $G(s)=\dfrac{1}{(s+1)^3}$　　(6)$G(s)=\dfrac{(s-1)}{(s+1)(s+2)}$

170

(7) $G(s)=\dfrac{(s+2)}{(s^2-1)(s+4)}$　　(8)$G(s)=\dfrac{(s+1)^2}{(s+2)(s-1)^2}$

第8章 特殊形式的非线性系统

当非线性系统具有某种特殊形式时，它的反馈控制设计就会变得方便起来。本章将介绍三种特殊形式：标准型、控制器型和观测器型[1]。8.1 节给出的标准型在以后的各章节里扮演着重要的角色。它可将线性系统反馈控制中的一些重要概念拓展到非线性系统中，比如传递函数的相对阶、系统的零点和最小相位系统，即所有零点都具有负实部的系统。高增益反馈是反馈控制的基本工具，它可以实现干扰抑制和降低对模型不确定性的敏感度[2]。线性系统的根轨迹分析说明对一个最小相位、相对阶是 1 的系统高增益反馈镇定，当增益趋于无穷时，一条根轨迹沿着负实轴趋于负无穷，而剩余的分支都趋于系统的零点。那么应用标准型就可以对非线性系统得到相同的性质，12.5.1 节将给出这样的结论。

8.2 节的控制器型是标准型的一个特殊情况，但是非常重要，因为描述成控制器型的非线性系统可以通过状态反馈转化为一个等价的可控线性系统。因此，转化为控制器型的过程称为反馈线性化。8.3 节给出观测器型，它将非线性系统的观测器设计转变成一个线性设计问题。

8.1 标准型

考虑一个 n 维的单输入-单输出系统

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad y = h(x) \tag{8.1}$$

171

其中，f、g、h 在区域 $D \subset R^n$ 内是充分光滑的。映射 f：$D \to R^n$ 和 g：$D \to R^n$ 也称为 D 上的向量场。y 的导数 $\dot{y}$ 是

$$\dot{y} = \frac{\partial h}{\partial x}[f(x) + g(x)u] \overset{\text{def}}{=} L_f h(x) + L_g h(x)u$$

其中，

$$L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} f(x)$$

称为 h 关于 f 或者沿着 f 的 Lie 导数。这个定义与我们熟悉的 h 沿着系统 $\dot{x} = f(x)$ 的导数的定义是一样的。但当这种记号对于沿着一个向量场反复求导或者对一个新的向量场再计算导数时显得很方便。例如，对于如下的情形

$$L_g L_f h(x) = \frac{\partial(L_f h)}{\partial x} g(x)$$

$$L_f^2 h(x) = L_f L_f h(x) = \frac{\partial(L_f h)}{\partial x} f(x)$$

$$L_f^k h(x) = L_f L_f^{k-1} h(x) = \frac{\partial(L_f^{k-1} h)}{\partial x} f(x)$$

---

[1] 本章内容大部分都是基于文献[66]的。

[2] 参阅文献[34]。

$$L_f^0 h(x) = h(x)$$

如果 $L_g h(x)=0$，则 $\dot{y}=L_f h(x)$独立于 u。如果我们继续计算 y 的二阶导数 $y^{(2)}$，则

$$y^{(2)} = \frac{\partial(L_f h)}{\partial x}[f(x)+g(x)u] = L_f^2 h(x) + L_g L_f h(x) u$$

再次，如果 $L_g L_f h(x)=0$ 成立，则 $y^{(2)}=L_f^2 h(x)$不依赖 u。重复这个过程，如果对于某个整数 ρ，$h(x)$满足

$$L_g L_f^{i-1} h(x) = 0, \quad i=1,2,\cdots,\rho-1 \text{ 和 } L_g L_f^{\rho-1} h(x) \neq 0$$

则 u 不会出现在表示 y，$\dot{y}$，…，$y^{(\rho-1)}$ 的方程中，它首次出现在 $y^{(\rho)}$ 的方程中，而且它的系数 $L_g L_f^{\rho-1} h(x)$在 D 上不恒等于零

$$y^{(\rho)} = L_f^\rho h(x) + L_g L_f^{\rho-1} h(x) u$$

这个整数 ρ 必定小于或等于 n ㊀。在下面的定义中，整数 ρ 称为系统(式(8.1))的相对阶。

定义 8.1 称非线性系统(式(8.1))在一个开集$\mathcal{R}\subset D$ 上有相对阶 $\rho(1\leqslant\rho\leqslant n)$，如果对于所有的 $x\in\mathcal{R}$，

172

$$L_g L_f^{i-1} h(x) = 0, \quad i=1,2,\cdots,\rho-1; \quad L_g L_f^{\rho-1} h(x) \neq 0 \tag{8.2}$$

如果一个系统有相对阶 ρ，则它的输入-输出映射可通过状态反馈控制

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{\rho-1} h(x)}(-L_f^\rho h(x) + v)$$

转化成积分器串联形式 $y^{(\rho)}=v$。

例 8.1 考虑可控的 van der Pol 方程式((A.13))：

$$\dot{x}_1 = \frac{x_2}{\varepsilon}, \quad \dot{x}_2 = \varepsilon\left[-x_1 + x_2 - \frac{1}{3}x_2^3 + u\right]$$

它的输出是 $y=x_1$。计算输出的导数，得

$$\dot{y} = \dot{x}_1 = \frac{x_2}{\varepsilon}, \quad \ddot{y} = \frac{\dot{x}_2}{\varepsilon} = -x_1 + x_2 - \frac{1}{3}x_2^3 + u$$

因此，系统在 R^2 中有相对阶 2。如果输出为 $y=x_2$，则

$$\dot{y} = \varepsilon\left[-x_1 + x_2 - \frac{1}{3}x_2^3 + u\right]$$

于是，系统在 R^2 中有相对阶 1。如果输出为 $y=\frac{1}{2}(\varepsilon^2 x_1^2 + x_2^2)$，则

$$\dot{y} = \varepsilon^2 x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 = \varepsilon x_1 x_2 + \varepsilon x_2\left[-x_1 + x_2 - \frac{1}{3}x_2^3 + u\right] = \varepsilon x_2^2 - \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)x_2^4 + \varepsilon x_2 u$$

即在集合 $\{x_2\neq 0\}$ 上，系统有相对阶 1。◀

例 8.2 具有 $\delta=0$，$f_l(x_3)=bx_3$ 的场控直流电动机(式(A.25))的状态方程模型为

$$\dot{x}_1 = d_1(-x_1 - x_2 x_3 + V_a), \quad \dot{x}_2 = d_2[-f_e(x_2) + u], \quad \dot{x}_3 = d_3(x_1 x_2 - b x_3)$$

其中，$d_1 \sim d_3$ 是正数。对于速度控制，我们选择的输出是 $y=x_3$。输出的导数是

$$\dot{y} = \dot{x}_3 = d_3(x_1 x_2 - b x_3)$$

$$\ddot{y} = d_3(x_1 \dot{x}_2 + \dot{x}_1 x_2 - b\dot{x}_3) = (\cdots) + d_2 d_3 x_1 u$$

系统在 $\{x_1\neq 0\}$ 上有相对阶 2。◀

例 8.3 考虑由传递函数

㊀ 对 $\rho\leqslant n$ 的证明，可参见文献[74，引理 C9]或者文献[66，引理 4.1.1]。

$$H(s)=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_0}\stackrel{\text{def}}{=}\frac{N(s)}{D(s)}$$

描述的一个线性系统，其中，$m<n$，$b_m\neq 0$。系统的状态模型可表示为

$$\dot{x}=Ax+Bu,\quad y=Cx$$

173

其中，

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & & \vdots \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_m & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & b_m & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

这个线性状态模型是式(8.1)的特殊情况，其中 $f(x)=Ax$，$g=B$ 和 $h(x)=Cx$。为了考察系统的相对阶，我们计算输出的导数。一阶导数是

$$\dot{y}=CAx+CBu$$

如果 $m=n-1$，则 $CB=b_{n-1}\neq 0$，系统有相对阶 1。否则，$CB=0$，继续计算二阶导数 $y^{(2)}$。注意，CA 是一个行向量，该向量通过将 C 元素向右边移动 1 个位置而得到，而 CA^2 通过将 C 元素向右边移动 2 个位置而得到，以此类推，因而我们得到

$$CA^{i-1}B=0,\quad i=1,2,\cdots,n-m-1 \text{ 和 } CA^{n-m-1}B=b_m\neq 0$$

u 首次出现在以下方程(含有 $y^{(n-m)}$)中，

$$y^{(n-m)}=CA^{n-m}x+CA^{n-m-1}Bu$$

所以，它的相对阶是 $\rho=n-m$ ㊀。

为了研究具有确定相对阶的系统的结构，我们从上面的线性系统继续讨论。应用 Euclid除法，可以得到 $D(s)=Q(s)N(s)+R(s)$，其中，$Q(s)$和 $R(s)$分别称为商式和余式，它们都是多项式。从 Euclid 除法可知，$\deg Q=n-m=\rho$，$\deg R<m$，且 $Q(s)$的首项系数是$\frac{1}{b_m}$。利用 $D(s)$的表示，将 $H(s)$写成

$$H(s)=\frac{N(s)}{Q(s)N(s)+R(s)}=\frac{\frac{1}{Q(s)}}{1+\frac{1}{Q(s)}\frac{R(s)}{N(s)}}$$

这说明，$H(s)$等价于前向通道为$\frac{1}{Q(s)}$和反馈通道为$\frac{R(s)}{N(s)}$的负反馈连接(见图 8.1)。ρ 阶传递函数$\frac{1}{Q(s)}$无零点，因此它可以用 ρ 维状态向量 $\xi=\text{col}(y,\dot{y},\cdots,y^{(\rho-1)})$建立如下状态模型

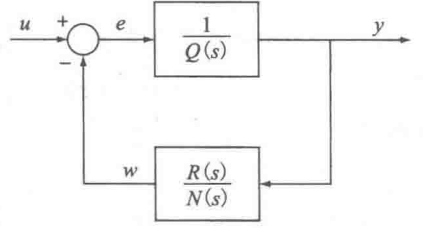


图 8.1　$H(s)$的反馈表示

174

㊀ 相对阶的定义与它在线性控制理论中是一致的，即 $H(s)$的分母和分子多项式阶数之差。

$$\dot{\xi} = (A_c + B_c\lambda^{\mathrm{T}})\xi + B_c b_m e, \quad y = C_c\xi$$

其中，(A_c, B_c, C_c)是ρ个积分器串联的规范形式，具体如下：

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\rho\times\rho}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

且$\lambda \in R^{\rho}$。再设

$$\dot{\eta} = A_0\eta + B_0 y, \quad w = C_0\eta$$

是$\dfrac{R(s)}{N(s)}$的一个(最小实现)状态模型实现，那么A_0的特征根是多项式$N(s)$的零点，即传递函数$H(s)$的零点。根据反馈连接的结构，上述分析说明$H(s)$可由如下状态模型实现

$$\dot{\eta} = A_0\eta + B_0 C_c\xi \tag{8.3}$$

$$\dot{\xi} = A_c\xi + B_c(\lambda^{\mathrm{T}}\xi - b_m C_0\eta + b_m u) \tag{8.4}$$

$$y = C_c\xi \tag{8.5}$$

下面将讨论对于具有相对阶ρ的非线性系统(式(8.1))，如何建立如同式(8.3)～(8.5)给出的状态空间模型。等价地，就是要找到变量替换$z = T(x)$，使得该系统在新状态z下可分为一个ρ维向量ξ和$(n-\rho)$维向量η，其中向量ξ的各个分量由输出和它直到$y^{(\rho-1)}$的导数组成，而η满足一个微分方程，该方程的右边依赖于η和ξ，但不直接依赖u。我们将

175

ξ取成与线性系统一样的形式：

$$\xi = \begin{bmatrix} y \\ y^{(1)} \\ \vdots \\ y^{(\rho-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ \vdots \\ L_f^{\rho-1} h(x) \end{bmatrix}$$

如果$\rho = n$，则不存在变量η，这时变量替换就是

$$z = T(x) = \mathrm{col}(h(x), L_f h(x), \cdots, L_f^{n-1} h(x)) \tag{8.6}$$

当$\rho < n$，变量替换就是

$$z = T(x) = \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \vdots \\ \phi_{n-\rho}(x) \\ --- \\ h(x) \\ \vdots \\ L_f^{\rho-1} h(x) \end{bmatrix} \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \varphi(x) \\ --- \\ \mathcal{H}(x) \end{bmatrix} \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \eta \\ --- \\ \xi \end{bmatrix} \tag{8.7}$$

其中，ϕ_1到$\phi_{n-\rho}$的选择是要使得$T(x)$在区域$D_x \subset \mathcal{R}$上是一个微分同胚，且

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial x} g(x) = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant n-\rho, \quad \forall x \in D_x \tag{8.8}$$

因此，u项就不出现在下列方程中：

$$\dot{\eta} = \frac{\partial \phi}{\partial x}[f(x) + g(x)u]$$

下个定理说明变量替换(式(8.6)或式(8.7))是合理的，至少局部是合理的 ㊀。

定理 8.1 考虑系统(式(8.1))，且假设它在$\mathcal{R}$上有相对阶 $\rho \leqslant n$。如果 $\rho=n$，则对每个 $x_0 \in \mathcal{R}$，存在 x_0 的一个邻域 N，使得限制在 N 上的式(8.6)给出的映射 $T(x)$ 是一个微分同胚。如果 $\rho<n$，则对每个 $x_0 \in \mathcal{R}$，存在 x_0 的一个邻域 N 和连续可微函数 $\phi_1(x)$，…，$\phi_{n-\rho}(x)$，使得式(8.8)对所有的 $x \in N$ 成立，且限制在 N 上，式(8.7)给出的映射 $T(x)$ 是一个微分同胚。

当 $\rho<n$ 时，变量替换(式(8.7))使得式(8.1)变为

$$\dot{\eta} = f_0(\eta,\xi) \tag{8.9}$$

$$\dot{\xi} = A_c\xi + B_c[L_f^\rho h(x) + L_g L_f^{\rho-1} h(x) u] \tag{8.10}$$

$$y = C_c\xi \tag{8.11}$$

176

其中，$\xi \in R^\rho$，$\eta \in R^{n-\rho}$，$(A_c，B_c，C_c)$是 ρ 个积分器的串联标准型，且

$$f_0(\eta,\xi) = \frac{\partial \phi}{\partial x} f(x)\Big|_{x=T^{-1}(z)} \tag{8.12}$$

在式(8.10)中，$L_f^\rho h$ 和 $L_g L_f^{\rho-1} h$ 还写成 x 的函数，是为了表明它们独立于 φ 的选择。如果用新坐标系表达，式(8.10)为

$$\dot{\xi} = A_c\xi + B_c[\tilde{\psi}(\eta,\xi) + \tilde{\gamma}(\eta,\xi)u]$$

其中，

$$\tilde{\psi}(\eta,\xi) = L_f^\rho h(x)\big|_{x=T^{-1}(z)}, \quad \tilde{\gamma}(\eta,\xi) = L_g L_f^{\rho-1} h(x)\big|_{x=T^{-1}(z)}$$

如果 x^* 是式(8.1)的一个平衡点，则由

$$\eta^* = \varphi(x^*), \quad \xi^* = [h(x^*) \quad 0 \quad \cdots \quad 0]$$

给出的$(\eta^*，\xi^*)$是式(8.9)～(8.10)的一个平衡点。如果 $h(x^*)=0$，我们可以通过选择 $\varphi(x)$使得 $\varphi(x^*)=0$，将平衡点 x^* 变换到原点$[\eta=0，\xi=0]$。这总是可能的，因为如果函数 φ_i 满足式(8.8)，那么它加上一个常数依然满足这个条件，也没有改变 $T(x)$是微分同胚的属性。

由式(8.9)～式(8.11)组成的模型称为标准型。这个标准型将系统分解为内部动态方程(8.9)和外部动态方程(8.10)及式(8.11)。通过状态反馈控制

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{\rho-1} h(x)}(-L_f^\rho h(x) + v)$$

可以将外部动态方程转化为 ρ 个积分器的串联形式，即 $y^{(\rho)}=v$，内部动态 η 是输出 y 不可观的。当$y(t)$等于零时，$\xi(t)$也为零。在式(8.9)中设置 $\xi=0$，得到动态方程

$$\dot{\eta} = f_0(\eta,0) \tag{8.13}$$

该方程称为系统的零动态。如果式(8.13)在研究的区域内有一个渐近稳定平衡点，则称系统在这个区域内是最小相位的。尤其，如果选择 $T(x)$使得原点$(\eta=0，\xi=0)$是式(8.9)～式(8.11)的一个平衡点，系统是最小相位就是零动态式(8.13)的原点是渐近稳定的。了解初始坐标系里零动态的特性是有意义的。看下式

177

$$y(t) \equiv 0 \Rightarrow \xi(t) \equiv 0 \Rightarrow u \equiv -\frac{L_f^\rho h(x(t))}{L_g L_f^{\rho-1} h(x(t))}$$

㊀ 定理 8.1 的证明参见[74，定理 13.1]或[66，命题 4.1.3]。[66，小节 9.1]给出这个定理的全局形式，[66，小节 5.1]给出多输入多输出系统的结论。

注意，如果输出是零，则状态方程的解必定限制在下列集合中

$$Z^* = \{x \in \mathcal{R} \mid h(x) = L_f h(x) = \cdots = L_f^{\rho-1} h(x) = 0\}$$

且输入必定是

$$u = u^*(x) \stackrel{\text{def}}{=} -\left.\frac{L_f^\rho h(x)}{L_g L_f^{\rho-1} h(x)}\right|_{x \in Z^*}$$

这时，系统的动态特性是

$$\dot{x} = f^*(x) \stackrel{\text{def}}{=} \left[f(x) - g(x)\frac{L_f^\rho h(x)}{L_g L_f^{\rho-1} h(x)}\right]_{x \in Z^*}$$

对于特殊情形 $\rho=n$，标准型就退化成

$$\dot{z} = A_c z + B_c[L_f^n h(x) + L_g L_f^{n-1} h(x) u], \quad y = C_c z \tag{8.14}$$

在这种情形下，系统没有零动态，但系统还被默认为最小相位的。

例 8.4 考虑有控制的 van der Pol 方程式((A.13))：

$$\dot{x}_1 = \frac{x_2}{\varepsilon}, \quad \dot{x}_2 = \varepsilon\left[-x_1 + x_2 - \frac{1}{3}x_2^3 + u\right], \quad y = x_2$$

在例 8.1 中我们看到系统在 R^2 中有相对阶 1。取 $\xi=y$，$\eta=x_1$，系统已经具有标准型结构。零动态由方程 $\dot{x}_1=0$ 给出，它没有一个渐近稳定平衡点。因此，系统不是最小相位的。◀

例 8.5 考虑系统

$$\dot{x}_1 = -x_1 + \frac{2+x_3^2}{1+x_3^2}u, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = x_1 x_3 + u, \quad y = x_2$$

它在原点有一个平衡点。输出的导数是

$$\dot{y} = \dot{x}_2 = x_3, \quad \ddot{y} = \dot{x}_3 = x_1 x_3 + u$$

因此，系统在 R^3 中有相对阶 2。为了描述零动态的特性，限制 x 在 $Z^* = \{x_2 = x_3 = 0\}$，且利用

[178]

$$u = u^*(x) = -\left.\frac{L_f^2 h(x)}{L_g L_f h(x)}\right|_{x \in Z^*} = -x_1 x_3 \,|_{x \in Z^*} = 0$$

得出零动态是 $\dot{x}_1 = -x_1$，这就说明系统是最小相位的。为了将系统转化为标准型，我们选择 $\varphi(x)$满足

$$\varphi(0) = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} g(x) = 0$$

并使得 $T(x)=\text{col}(\varphi(x), x_2, x_3)$在包含原点的某个域内是一个微分同胚。偏微分方程

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \cdot \frac{2+x_3^2}{1+x_3^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = 0, \quad \varphi(0) = 0$$

能通过分离变量法获解，得 $\varphi(x)=x_1 - x_3 - \tan^{-1} x_3$。映射 $T(x)$是一个全局微分同胚，因为它是正则的，且$\left[\frac{\partial T}{\partial x}\right]$对所有的 x 是非奇异的。因此，标准型

$$\begin{aligned}
\dot{\eta} &= -(\eta + \xi_2 + \tan^{-1}\xi_2)\left(1 + \frac{2+\xi_2^2}{1+\xi_2^2}\xi_2\right) \\
\dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\
\dot{\xi}_2 &= (\eta + \xi_2 + \tan^{-1}\xi_2)\xi_2 + u \\
y &= \xi_1
\end{aligned}$$

是全局有定义的。◀

例 8.6 例 8.2 给出的场控直流电动机在$\mathcal{R} = \{x_1 \neq 0\}$中有相对阶 2，$h = x_3$，$L_f h =$

$d_3(x_1x_2-bx_3)$。为了描述零动态的特性，限制 x 在

$$Z^* = \{x \in R \mid x_3 = 0, x_1x_2 - bx_3 = 0\} = \{x \in \mathcal{R} \mid x_2 = x_3 = 0\}$$

中，且取 $u=u^*(x)$，以获得 $\dot{x}_1=d_1(-x_1+V_a)$。零动态在 $x_1=V_a$ 处有一个渐近稳定平衡点。因此，系统是最小相位的。为了将系统变换成标准型，我们需要找到一个函数 $\varphi(x)$ 使得 $\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]g=\frac{d_2\partial\varphi}{\partial x_2}=0$ 和 $T=\mathrm{col}(\varphi(x),\ x_3,\ d_3(x_1x_2-bx_3))$ 在某域 $D_x\subset\mathcal{R}$ 是一个微分同胚。选择 $\varphi(x)=x_1-V_a$ 满足 $\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}=0$，并使 $T(x)$ 是 $\{x_1>0\}$ 上的一个微分同胚，还使得零动态的平衡点是原点。◀

8.2 控制器型

一个非线性系统称为具有控制器型，如果它的状态模型具有形式

$$\dot{x} = Ax + B[\psi(x) + \gamma(x)u] \tag{8.15}$$

179

其中，$(A,\ B)$ 可控，且在研究的区域内，对所有的 x，$\gamma(x)$ 是一个非奇异矩阵。通过反馈控制

$$u = \gamma^{-1}(x)[-\psi(x) + v]$$

其中，$\gamma^{-1}(x)$ 是 $\gamma(x)$ 的逆矩阵，系统式(8.15)转化成可控的线性系统

$$\dot{x} = Ax + Bv$$

因此，任何能写成控制器型的系统称为是可以反馈线性化的。

例 8.7 一个由式(A.35)给出的具有 m 个关节的机器臂，其状态模型是：

$$\dot{x}_1 = x_2,\quad \dot{x}_2 = M^{-1}(x)[u - C(x_1,x_2)x_2 - Dx_2 - g(x_1)]$$

取 $x=\mathrm{col}(x_1,\ x_2)$，将它写成式(8.15)表述的状态模型为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I_m \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ I_m \end{bmatrix},\quad \psi = -M^{-1}(Cx_2 + Dx_2 + g),\quad \gamma = M^{-1}$$ ◀

尽管有时状态模型不是控制器型，但是系统可能被转化为控制器型，则它是可以反馈线性化的。本节要给出可以反馈线性化单输入系统的特性[⊖]。考虑

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \tag{8.16}$$

其中，f、g 是域 $D\subset R^n$ 上充分光滑的向量场。从前一小节知道，如果存在一个(充分光滑的)函数 h 使得系统

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u,\quad y = h(x) \tag{8.17}$$

在 $x_0\in D$ 的一个邻域上有相对阶 n，则系统在 x_0 的一个邻域是可以反馈线性化的。定理 8.1 保证限制在 x_0 的一个邻域 N 内，映射

$$T(x) = \mathrm{col}(h(x), L_f h(x), \cdots, L_f^{n-1}h(x))$$

是 N 上的一个微分同胚，变量替换 $z=T(x)$ 将系统转化为标准型

$$\dot{z} = A_c z + B_c[\tilde{\psi}(z) + \tilde{\gamma}(z)u],\quad y = C_c z$$

其中，$(A_c,\ B_c,\ C_c)$ 是 n 个积分器串联的标准型。另一方面，如果在 $x_0\in D$ 的一个邻域 N 里系统(式(8.16))是可以反馈线性化的，则存在变量替换 $\zeta=S(x)$，它将系统变换成

⊖ 对多输入系统，参见文献[66，第 5 章]。

180

$$\dot{\zeta} = A\zeta + B[\bar{\psi}(\zeta) + \bar{\gamma}(\zeta)u]$$

其中，(A, B)可控，且在$S(N)$内$\bar{\gamma}(\zeta)\neq 0$。对任何可控对$(A, B)$，我们总能找到一个非奇异矩阵$M$，该矩阵将$(A, B)$转化成可控标准型㊀，即$MAM^{-1}=A_c+B_c\lambda^{T}$；$MB=B_c$。那么变量替换

$$z = M\zeta = MS(x) \stackrel{\text{def}}{=} T(x)$$

将式(8.16)转化成

$$\dot{z} = A_c z + B_c[\tilde{\psi}(z) + \tilde{\gamma}(z)u]$$

其中，$\tilde{\gamma}(z)=\bar{\gamma}(M^{-1}z)$和$\tilde{\psi}(z)=\bar{\psi}(M^{-1}z)+\lambda^{T}z$。

总之，系统(式(8.16))在$x_0\in D$的一个邻域里是可以反馈线性化的，当且仅当存在一个(充分光滑的)函数$h(x)$，使得系统式(8.17)在$D_x\subset D$有相对阶n，其中$x_0\in D_x$；或者，存在h对所有的$x\in D_x$满足偏微分方程

$$L_g L_f^{i-1} h(x) = 0, \quad i = 1,2,\cdots,n-1 \tag{8.18}$$

且

$$L_g L_f^{n-1} h(x) \neq 0 \tag{8.19}$$

我们可以得到h存在的充要条件，这些条件是用向量场f、g的Lie括号及分布对合性给出的。为此需要介绍一些相关的定义。

对在$D\subset R^n$上的两个向量场f、g，它们的Lie括号$[f, g]$是第三个向量场，定义为

$$[f,g](x) = \frac{\partial g}{\partial x}f(x) - \frac{\partial f}{\partial x}g(x)$$

其中，$\left[\frac{\partial g}{\partial x}\right]$和$\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]$是Jacobi矩阵。Lie括号$[f, g](x)$在变量替换$z=T(x)$意义下是不变的。即，如果

$$\tilde{f}(z) = \frac{\partial T}{\partial x}f(x)\bigg|_{x=T^{-1}(z)} \quad 和\ \tilde{g}(z) = \frac{\partial T}{\partial x}g(x)\bigg|_{x=T^{-1}(z)}$$

则㊁，

$$[\tilde{f},\tilde{g}](z) = \frac{\partial T}{\partial x}[f,g](x)\bigg|_{x=T^{-1}(z)}$$

我们可以重复做f和g之间的Lie括号运算。使用下面的记号可以简化这个过程

$$ad_f^0 g(x) = g(x)$$
$$ad_f g(x) = [f,g](x)$$
$$ad_f^k g(x) = [f,ad_f^{k-1}g](x), k \geqslant 1$$

181

显然，$[f, g]=-[g, f]$，且对两个常数向量场f、g，$[f, g]=0$。

例 8.8 令

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\sin x_1 - x_2 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

则，

$$[f,g] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 \\ -\sin x_1 - x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x_1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

㊀ 参见文献[114]。

㊁ 这个性质的证明可参见文献[98，属性 2.30]。

$$= \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} ad_f g,$$

$$[f, ad_f g] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ -\sin x_1 - x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x_1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -x_1 - 2x_2 \\ x_1 + x_2 - \sin x_1 - x_1 \cos x_1 \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} ad_f^2 g$$ ◀

例 8.9 如果 $f(x)=Ax$ 且 g 是一个常数向量场，则

$ad_f g = [f, g] = -Ag, ad_f^2 g = [f, ad_f g] = -A(-Ag) = A^2 g$ 和 $ad_f^k g = (-1)^k A^k g$ ◀

设 f_1，f_2，…，f_k 是定义在 $D \subset R^n$ 上的 k 个向量场，对于 $x \in D$，记

$$\Delta(x) = \text{span}\{f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x)\}$$

则对每个 x，$\Delta(x)$为向量 $f_1(x)$，$f_2(x)$，…，$f_k(x)$张成的 R^n 的子空间。当 x 在 D 上变化时，所有向量空间 $\Delta(x)$组成的簇称为 R^n 的一个分布，记成

$$\Delta = \text{span}\{f_1, f_2, \cdots, f_k\}$$

$\Delta(x)$的维数是

$$\dim(\Delta(x)) = \text{rank}[f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x)]$$

这个维数依赖于 x，但是如果在 $\Delta = \text{span}\{f_1, f_2, \cdots, f_k\}$中，$\{f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x)\}$对所有的 $x \in D$ 都是线性独立的，则对所有的 $x \in D$，$\dim(\Delta(x)) = k$。这时，称 Δ 是由 f_1，f_2，…，f_k 产生的 D 上的一个非奇异分布。如果

$$g_1 \in \Delta \text{ 和 } g_2 \in \Delta \Rightarrow [g_1, g_2] \in \Delta$$

则称分布 Δ 是对合的。

如果 Δ 是由 f_1，f_2，…，f_k 产生的 D 上的一个非奇异分布，则当且仅当

$$[f_i, f_j] \in \Delta, \quad \forall 1 \leqslant i, j \leqslant k$$

则 Δ 是对合的。

对于一维分布，$\Delta = \text{span}\{f\}$，它和常数向量场产生的分布总是对合的。 182

例 8.10 令 $D = R^3$ 和 $\Delta = \text{span}\{f_1, f_2\}$，其中

$$f_1 = \begin{bmatrix} 2x_2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

可以验证的是对所有 x，$\dim(\Delta(x)) = 2$。对所有的 $x \in D$，Lie 括号$[f_1, f_2] \in \Delta$ 的充分必要条件是 $\text{rank}[f_1(x), f_2(x), [f_1, f_2](x)] = 2$，然而，

$$\text{rank}[f_1(x), f_2(x), [f_1, f_2](x)] = \text{rank}\begin{bmatrix} 2x_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 1 \end{bmatrix} = 3, \quad \forall x \in D$$

因此，Δ 不是对合的。 ◀

例 8.11 令 $D = \{x \in R^3 \mid x_1^2 + x_3^2 \neq 0\}$和 $\Delta = \text{span}\{f_1, f_2\}$，其中

$$f_1 = \begin{bmatrix} 2x_3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f_2 = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -2x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

可以验证对所有 $x \in D$，$\dim(\Delta(x)) = 2$。且

$$\text{rank}[f_1(x), f_2(x), [f_1, f_2](x)] = \text{rank}\begin{bmatrix} 2x_3 & -x_1 & -4x_3 \\ -1 & -2x_2 & 2 \\ 0 & x_3 & 0 \end{bmatrix} = 2, \forall x \in D$$

因此，$[f_1, f_2] \in \Delta$。因为$[f_2, f_1] = -[f_1, f_2]$，所以 Δ 是对合的。◀

我们现在研究可以反馈线性化的系统的特性[⊖]。

定理 8.2 系统式(8.16)在 $x_0 \in D$ 的一个邻域里是可以反馈线性化的，当且仅当存在一个域 $D_x \subset D$，$x_0 \in D_x$。使得

1）对所有的 $x \in D_x$，矩阵$\mathcal{G}(x) = [g(x), ad_f g(x), \cdots, ad_f^{n-1} g(x)]$的秩为 n；

2）分布$\mathcal{D} = \text{span}\{g, ad_f g, \cdots, ad_f^{n-2} g\}$在 D_x 中是对合的。

定理的条件确保对每个 $x_0 \in D$，在 x_0 的某个邻域 N 内存在一个满足式(8.18)和式(8.19)的函数 $h(x)$，从而使得系统在 N 内是可以反馈线性化的。但是这不保证在一个预先给定的区域内能够反馈线性化。然而，如果在这个区域内偏微分方程(8.18)有解 $h(x)$，则在这个区域内可以确定是能够反馈线性化的。这点可通过下面 3 个例子来说明。在所有的例子里，我们假设系统(式(8.16))当 $u=0$ 时有一个平衡点 x^*，且选择的 $h(x)$能保证 $h(x^*)=0$。并且，变换 $z=T(x)$将 $x=x^*$ 映射到 $z=0$。

183

例 8.12 考虑系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} a\sin x_2 \\ -x_1^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \stackrel{\text{def}}{=} f(x) + gu$$

我们有

$$ad_f g = [f, g] = -\frac{\partial f}{\partial x} g = \begin{bmatrix} -a\cos x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

而矩阵

$$[g, ad_f g] = \begin{bmatrix} 0 & -a\cos x_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

的秩为 2 对于所有的 x，$\cos x_2 \neq 0$ 成立。此时，分布 $\text{span}\{g\}$是对合的。因此，定理 8.2 的条件在域 $D_x = \left\{ |x_2| < \frac{\pi}{2} \right\}$得到满足。为了寻找将系统转化为式(8.15)的变量替换，我们需要找到 $h(x)$，使它满足

$$\frac{\partial h}{\partial x} g = 0, \quad \frac{\partial (L_f h)}{\partial x} g \neq 0 \text{ 和 } h(0) = 0$$

当$\left[\frac{\partial h}{\partial x}\right] g = 0$ 时，$\left[\frac{\partial h}{\partial x}\right] g = \left[\frac{\partial h}{\partial x_2}\right] = 0$。因此 h 必须独立于 x_2。进一步，$L_f h(x) = \left[\frac{\partial h}{\partial x_1}\right] a\sin x_2$。如果$\left(\frac{\partial h}{\partial x_1}\right) \neq 0$，则条件

$$\frac{\partial (L_f h)}{\partial x} g = \frac{\partial (L_f h)}{\partial x_2} = \frac{\partial h}{\partial x_1} a\cos x_2 \neq 0$$

在 D_x 中满足。选择 $h = x_1$，得到

$$z = T(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ a\sin x_2 \end{bmatrix}$$

⊖ 定理 8.2 的证明参见[74，定理 13.2]或者[66，定理 4.2.3]。对定理的多输入版本，也可参见[66，定理 5.2.3]。

经坐标变换，系统变换成

$$\dot{z}_1 = z_2, \dot{z}_2 = \sqrt{a^2 - z_2^2}(-z_1^2 + u)$$

当 $-a < z_2 < a$ 时，它是有意义的。◀

例 8.13 考虑一个具有灵活关节的机械臂，设其阻尼可以忽略不计，则它可由 4 维模型表示为[135]

$$\dot{x} = f(x) + gu$$

其中，

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -a\sin x_1 - b(x_1 - x_3) \\ x_4 \\ c(x_1 - x_3) \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ d \end{bmatrix}$$

184

a、b、c、d 都是正常数。当 $u=0$ 时，系统在 $x=0$ 有一个平衡点。且

$$ad_f g = [f, g] = -\frac{\partial f}{\partial x} g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -d \\ 0 \end{bmatrix}, \quad ad_f^2 g = [f, ad_f g] = -\frac{\partial f}{\partial x} ad_f g = \begin{bmatrix} 0 \\ bd \\ 0 \\ -cd \end{bmatrix}$$

$$ad_f^3 g = [f, ad_f^2 g] = -\frac{\partial f}{\partial x} ad_f^2 g = \begin{bmatrix} -bd \\ 0 \\ cd \\ 0 \end{bmatrix}$$

而矩阵

$$[g, ad_f g, ad_f^2 g, ad_f^3 g] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -bd \\ 0 & 0 & bd & 0 \\ 0 & -d & 0 & cd \\ d & 0 & -cd & 0 \end{bmatrix}$$

对所有的 $x \in R^4$ 是满秩的。因为 g、$ad_f g$、$ad_f^2 g$ 都是常向量场，所以分布（g，$ad_f g$，$ad_f^2 g$）是对合的。因此，对所有的 $x \in R^4$，定理 8.2 的条件都满足。为了将系统转化成控制器型，我们寻找 $h(x)$，使它满足：

$$\frac{\partial(L_f^{i-1} h)}{\partial x} g = 0, i = 1, 2, 3, \quad \frac{\partial(L_f^3 h)}{\partial x} g \neq 0 \text{ 且 } h(0) = 0$$

根据要求 $\left[\frac{\partial h}{\partial x}\right] g = 0$，得到 $\left(\frac{\partial h}{\partial x_4}\right) = 0$。因此 h 必须独立于 x_4。从而

$$L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial h}{\partial x_2}[-a\sin x_1 - b(x_1 - x_3)] + \frac{\partial h}{\partial x_3} x_4$$

由要求 $\left[\frac{\partial(L_f h)}{\partial x}\right] g = 0$，得到

$$\frac{\partial(L_f h)}{\partial x_4} = 0 \Rightarrow \frac{\partial h}{\partial x_3} = 0$$

因此，选择的 h 必须独立于 x_3。这样，$L_f h$ 可简化为

$$L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial h}{\partial x_2}[-a\sin x_1 - b(x_1 - x_3)]$$

和

185

$$L_f^2h(x)=\frac{\partial(L_fh)}{\partial x_1}x_2+\frac{\partial(L_fh)}{\partial x_2}[-a\sin x_1-b(x_1-x_3)]+\frac{\partial(L_fh)}{\partial x_3}x_4$$

最后

$$\frac{\partial(L_f^2h)}{\partial x_4}=0\Rightarrow\frac{\partial(L_fh)}{\partial x_3}=0\Rightarrow\frac{\partial h}{\partial x_2}=0$$

同时，选择的 h 必须独立于 x_2，因此

$$L_f^3h(x)=\frac{\partial(L_f^2h)}{\partial x_1}x_2+\frac{\partial(L_f^2h)}{\partial x_2}[-a\sin x_1-b(x_1-x_3)]+\frac{\partial(L_f^2h)}{\partial x_3}x_4$$

当 $\left(\frac{\partial h}{\partial x_1}\right)\neq 0$ 时，条件 $\left[\frac{\partial(L_f^3h)}{\partial x}\right]g\neq 0$ 自然满足。因此，我们取 $h(x)=x_1$，进行变换

$$\begin{aligned}z_1&=h(x)=x_1\\z_2&=L_fh(x)=x_2\\z_3&=L_f^2h(x)=-a\sin x_1-b(x_1-x_3)\\z_4&=L_f^3h(x)=-ax_2\cos x_1-b(x_2-x_4)\end{aligned}$$

至此，将系统转化成控制器型

$$\dot z_1=z_2,\quad \dot z_2=z_3,\quad \dot z_3=z_4,\quad \dot z_4=-(a\cos z_1+b+c)z_3+a(z_2^2-c)\sin z_1+bdu$$

与前面的例子不同，这里 $z=T(x)$ 是一个全局的微分同胚，因此这个模型在 z 坐标系中是全局有效的。◀

例 8.14 场控直流电动机的模型(式(A.25))中，取 $\delta=0$，$f_{\mathcal{L}}(x_3)=bx_3$，则它可由 $\dot x=f(x)+gu$ 描述，其中

$$f=\begin{bmatrix}d_1(-x_1-x_2x_3+V_a)\\-d_2f_{\mathcal{L}}(x_2)\\d_3(x_1x_2-bx_3)\end{bmatrix},\quad g=\begin{bmatrix}0\\d_2\\0\end{bmatrix}$$

d_1、d_2、d_3 和 V_a 是正的，且 $b\geqslant 0$。假设 $f_e(x_2)$ 在一个开区间 $J\subset R$ 上是 2 阶连续可微的。则我们有

$$ad_fg=\begin{bmatrix}d_1d_2x_3\\d_2^2f'_e(x_2)\\-d_2d_3x_1\end{bmatrix},\quad ad_f^2g=\begin{bmatrix}d_1d_2x_3(d_1+d_2f'_e(x_2)-bd_3)\\d_2^3(f'_e(x_2))^2-d_2^3f_2(x_2)f''_e(x_2)\\d_1d_2d_3(x_1-V_a)-d_2^2d_3x_1f'_e(x_2)-bd_2d_3^2x_1\end{bmatrix}$$

$$\det\mathcal{G}=\det[g,ad_fg,ad_f^2g]=-2d_1^2d_2^3d_3x_3(x_1-a)\left(\frac{1-bd_3}{d_1}\right)$$

其中，$a=\dfrac{V_a}{2\left(\dfrac{1-bd_3}{d_1}\right)}$。假设 $\dfrac{bd_3}{d_1}=\dfrac{bT_a}{T_m}<1$，那么 $a>0$。这个假设是合理的，因为 T_a 通常比 T_m 要小得多。因此当 $x_1\neq a$，$x_3\neq 0$ 时，$\mathcal{G}$的秩是 3。进一步，如果 $[g,ad_fg]\in\mathcal{D}$，则分布 $\mathcal{D}=\mathrm{span}\{g,ad_fg\}$ 是对合的。因为

186

$$[g,ad_fg]=\frac{\partial(ad_fg)}{\partial x}g=\begin{bmatrix}0&0&d_1d_2\\0&d_2^2f''_e(x_2)&0\\-d_2d_3&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\d_2\\0\end{bmatrix}=d_2^2f''_e(x_2)g$$

所以$\mathcal{D}$是对合的。定理 8.2 的条件在区域 $D_x=\{x_1>a,\ x_2\in J,\ x_3>0\}$ 上都满足。剩下就要寻

找一个满足式(8.18)和式(8.19)的函数 h。设系统的平衡点是 $x^*=\mathrm{col}(x_1^*, x_2^*, x_3^*)$，并在平衡点，系统具有理想的运行速度 $\omega_0>0$。可以算出 $x_1^*=\dfrac{(V_a+\sqrt{V_a^2-4b\omega_0^2})}{2}$，$x_2^*=\dfrac{b\omega_0}{x_1^*}$和 $x_3^*=\omega_0$。设 $V_a^2>4b\omega_0^2$，$x_1^*>a$ 和 $x_2^*\in J$，$h(x)$应该满足

$$\frac{\partial h}{\partial x}g=0;\quad \frac{\partial(L_fh)}{\partial x}g=0;\quad \frac{\partial(L_f^2h)}{\partial x}g\neq 0$$

以及 $h(x^*)=0$。根据条件$\left[\dfrac{\partial h}{\partial x}\right]g=0\Leftrightarrow\dfrac{\partial h}{\partial x_2}=0$ 可知，h 必须独立于 x_2。由此

$$L_fh(x)=\frac{\partial h}{\partial x_1}d_1(-x_1-x_2x_3+V_a)+\frac{\partial h}{\partial x_3}d_3(x_1x_2-bx_3)$$

根据条件$\left[\dfrac{\partial(L_fh)}{\partial x}\right]g=0\Leftrightarrow\dfrac{\partial(L_fh)}{\partial x_2}=0$ 可得到

$$-d_1x_3\frac{\partial h}{\partial x_1}+d_3x_1\frac{\partial h}{\partial x_3}=0$$

若取 $h=d_3x_1^2+d_1x_3^2+c$，上式可以满足。进一步选择 $c=-d_3(x_1^*)^2-d_1(x_3^*)^2$，则 $h(x^*)=0$。h 选定后，可以分别算出 L_fh 和 L_f^2h：

$$L_fh(x)=2d_1d_3x_1(V_a-x_1)-2bd_1d_3x_3^2$$

$$L_f^2h(x)=2d_1^2d_3(V_a-2x_1)(-x_1-x_2x_3+V_a)-4bd_1d_3^2x_3(x_1x_2-bx_3)$$

因此

$$\frac{\partial(L_f^2h)}{\partial x}g=d_2\frac{\partial(L_f^2h)}{\partial x_2}=4d_1^2d_2d_3\left(\frac{1-bd_3}{d_1}\right)x_3(x_1-a)$$

在 D_x 上，条件$\dfrac{\partial(L_f^2h)}{\partial x}g\neq 0$ 满足。◀

8.3　观测器型

如果一个非线性系统的状态模型为

$$\dot{x}=Ax+\psi(u,y),\quad y=Cx \tag{8.20}$$

其中，(A, C)可观，则称该系统具有观测器型。通常认为输入 u 和输出 y 是可以获取的；而状态 x 是内部变量，一般不能直接测量。如果矩阵 A、C 和非线性函数 $\psi(u, y)$都是已知的，则可以构造非线性观测器

$$\dot{\hat{x}}=A\hat{x}+\psi(u,y)+H(y-C\hat{x})$$

187

可以用$\hat{x}$来估计 x。差$\tilde{x}=x-\hat{x}$称为观测误差，它满足线性方程

$$\dot{\tilde{x}}=(A-HC)\tilde{x}$$

因为(A, C)可观，我们总能找到 H，使得 $A\text{-}HC$ 的特征根都在左半复平面，从而确保 $\lim_{t\to\infty}\tilde{x}(t)=0$。下面两个都是实际系统的例子，它们都具有观测器型描述。

例 8.15 考虑一个具有灵活关节的机械臂，其阻尼可以忽略不计，则它可用 4 维模型来描述[135]：

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}x_2\\-a\sin x_1-b(x_1-x_3)\\x_4\\c(x_1-x_3)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\0\\d\end{bmatrix}u$$

其中，a、b、c、d 是正常数。取 $y=x_1$ 作为输出，则系统具有式(8.20)给出的形式，其中，

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\-b&0&b&0\\0&0&0&1\\c&0&-c&0\end{bmatrix},\quad \psi=\begin{bmatrix}0\\-a\sin y\\0\\du\end{bmatrix},\quad C^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

(A,C)是可观的。 ◀

例 8.16 式(A.47)给出的倒立摆模型为

$$\dot{x}_1=x_2,\quad \dot{x}_2=a(\sin x_1+u\cos x_1)$$

令 $y=x_1$，为输出，可见系统具有式(8.20)给出的观测器型，其中，

$$A=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\quad \psi=\begin{bmatrix}0\\a(\sin y+u\cos y)\end{bmatrix},\quad C^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$ ◀

通常，只要可能，我们都会用变量替换将一个系统转化为观测器型。下面考虑 n 维单输出非线性系统

$$\dot{x}=f(x)+\sum_{i=1}^{m}g_i(x)u_i,\quad y=h(x) \tag{8.21}$$

其中，f、h 和 g_1，…，g_m 在区域 $D\subset R^n$ 上都是光滑函数。下面研究何时存在一个微分同胚$T(x)$使得经变量替换 $z=T(x)$后，系统(式(8.21))可转化成观测器型

188

$$\dot{z}=A_cz+\phi(y)+\sum_{i=1}^{m}\gamma_i(y)u_i,\quad y=C_cz \tag{8.22}$$

其中，

$$A_c=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&&\ddots&&\vdots\\\vdots&&&0&1\\0&\cdots&\cdots&0&0\end{bmatrix},\quad C_c=\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0&0\end{bmatrix}$$

在上面的观测器型中将(A,C)选成(A_c,C_c)并不失一般性，因为任何可观对(A,C)总能通过一个相似变换转化为上述的观测器标准型。我们先假设 $u=0$，由此开始研究变量替换的存在性，即该替换将系统

$$\dot{x}=f(x),\quad y=h(x) \tag{8.23}$$

转化成观测器型

$$\dot{z}=A_cz+\phi(y),\quad y=C_cz \tag{8.24}$$

定义映射 $\Phi(x)$为

$$\Phi(x)=\mathrm{col}(h(x),L_fh(x),\cdots,L_f^{n-1}h(x))$$

注意，将系统(8.23)转化成式(8.24)的微分同胚存在的必要条件是 Jacobi 矩阵$\left[\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right]$在研究的区域内是非奇异的。这是因为在 z 坐标系里，

$$\widetilde{\Phi}(z)=\left.\Phi(x)\right|_{x=T^{-1}(z)}=\mathrm{col}(\widetilde{h}(z),L_{\widetilde{f}}\widetilde{h}(z),\cdots,L_{\widetilde{f}}^{n-1}\widetilde{h}(z))$$

其中，$\widetilde{f}(z)=A_cz+\phi(C_cz)$，$\widetilde{h}(z)=C_cz$。很容易算出下列的 Jacobi 矩阵是非奇异的

$$\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial z}=\begin{bmatrix}1&0&\cdots&&0\\ *&1&0&&0\\\vdots&&&&\vdots\\ *&\cdots&*&1&0\\ *&&\cdots&*&1\end{bmatrix}$$

通过链法则可得，$\left[\frac{\partial \widetilde{\Phi}}{\partial z}\right]=\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right]\left[\frac{\partial T^{-1}}{\partial z}\right]$，因为 T 是一个微分同胚，所以$\left[\frac{\partial T^{-1}}{\partial z}\right]$是非奇异的。进一步，$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right]$是非奇异的。这就是说 $\Phi(x)$是一个微分同胚。注意到

$$\Phi(x) = \mathrm{col}(y,\dot{y},\cdots,y^{(n-1)})$$

这说明系统式((8.23))是可观的，因为它的状态 x 可以通过 Φ 的逆从输出 y 和它的导数求出。 189

用$\tau(x)$表示

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}\tau = b, \quad 其中, b = \mathrm{col}(0,\cdots,0,1) \tag{8.25}$$

的唯一解。式(8.25)等价于

$$L_\tau L_f^k h(x) = 0, \quad 0 \leqslant k \leqslant n-2 \text{ 和 } L_\tau L_f^{n-1} h(x) = 1 \tag{8.26}$$

从式(8.26)可以得到[⊖]

$$L_{ad_f^k \tau} h(x) = 0, \quad 0 \leqslant k \leqslant n-2 \text{ 和 } L_{ad_f^{n-1}\tau} h(x) = (-1)^{n-1} \tag{8.27}$$

定义

$$\tau_k = (-1)^{n-k} ad_f^{n-k}\tau, \quad 1 \leqslant k \leqslant n$$

且假设$\tau_1(x)$，$\cdots$，$\tau_n(x)$在研究的区域内是线性独立的。令 $T(x)$是偏微分方程

$$\frac{\partial T}{\partial x}[\tau_1 \ \tau_2 \cdots \tau_n] = I \tag{8.28}$$

的解。显然，$T(x)$在这个区域内是一个局部的微分同胚。下面给出如何通过变量替换 $z=T(x)$将式(8.23)转化成式(8.24)。从式(8.28)可知

$$\frac{\partial T}{\partial x}\tau_k = \frac{\partial T}{\partial x}(-1)^{n-k} ad_f^{n-k}\tau = e_k \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow 第\ k\ 行$$

当 $1 \leqslant k \leqslant n-1$ 时，从上面的式子可导出

$$\begin{aligned} e_k &= (-1)^{n-k}\frac{\partial T}{\partial x} ad_f^{n-k}\tau(x) = (-1)^{n-k}\frac{\partial T}{\partial x}[f, ad_f^{n-k-1}\tau](x) \\ &= (-1)^{n-k}[\widetilde{f}(z), (-1)^{n-k-1}e_{k+1}] = \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial z}e_{k+1} \end{aligned}$$

其中，使用了 Lie 括号在变量替换 $z=T(x)$下的不变性。因此，Jacobi 矩阵$\left[\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial z}\right]$具有如下形式

$$\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial z} = \begin{bmatrix} * & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & 1 \\ * & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

190

⊖ 应用文献[74]的引理 C. 8。

对$\left[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial z}\right]$积分可知，存在函数$\phi$，使得$\tilde{f}(z)=A_c z+\phi(z_1)$。现在考虑$h(z)=h(T^{-1}(z))$，用链法则

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial z}=\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial T^{-1}}{\partial z}$$

又从式(8.28)可知：

$$\frac{\partial T^{-1}}{\partial z}=[\tau_1\ \tau_2 \cdots \tau_n]_{x=T^{-1}(z)}$$

因此，

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{h}}{\partial z}&=\frac{\partial h}{\partial x}[(-1)^{n-1}ad_f^{n-1}\tau,(-1)^{n-2}ad_f^{n-2}\tau,\cdots\tau]|_{x=T^{-1}(z)}\\&=[(-1)^{n-1}L_{ad_f^{n-1}\tau}h,(-1)^{n-2}L_{ad_f^{n-2}\tau}h,\cdots L_\tau h]|_{x=T^{-1}(z)}\end{aligned}$$

再应用式(8.27)可得：

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial z}=[1,0,\cdots 0]$$

因此$\tilde{h}(z)=C_c z$。综上所述，我们用下面的定理给出存在变量替换将系统(式(8.23))变换成观测器型(式(8.24))的充分必要条件[⊖]

定理 8.3 存在一个区域$D_x\subset R^n$和在D_x上的微分同胚$T(x)$，使得变量替换$z=T(x)$将式(8.28)转化成观测器型(式(8.24))的充分必要条件是存在一个区域$D_0\subset R^n$，使得

$$rank\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x)\right]=n,\quad \forall x\in D_0$$

其中，$\Phi(x)=\mathrm{col}(h, L_f h, \cdots, L_f^{n-1}h)$，且式(8.25)的解$\tau$满足

$$[ad_f^i\tau,ad_f^j\tau]=0,\quad 0\leqslant i,\quad j\leqslant n-1$$

而微分同胚$T(x)$是式(8.28)的解。

我们现在转向输入项$\sum_{i=1}^{m}g_i(x)u_i$，研究在什么条件下，下式不依赖于z_2，…，z_n。

$$\tilde{g}_i(z)=\frac{\partial T}{\partial x}g_i(x)\bigg|_{x=T^{-1}(z)}$$

注意到

191

$$\frac{\partial T}{\partial x}[g_i(x),ad_f^{n-k-1}\tau(x)]=[\tilde{g}_i(z),(-1)^{n-k-1}e_{k+1}]=(-1)^{n-k}\frac{\partial \tilde{g}_i}{\partial z_{k+1}}$$

因此，当且仅当 Lie 括号$[g_i, ad_f^{n-k-1}\tau]$是零，$\left[\frac{\partial \tilde{g}_i}{\partial z_{k+1}}\right]$才是零。因而，当且仅当对于$0\leqslant k\leqslant n-2$，Lie 括号$[g_i, ad_f^k\tau]$是零，向量场$\tilde{g}_i(z)$才独立于$z_2\sim z_n$。进一步，如果还有$[g_i, ad_f^{n-1}\tau]=0$，则$\tilde{g}_i(z)$独立于$z_1$。这时，$\tilde{g}_i(z)$是一个常数向量，也就是式(8.22)中的向量$\gamma_i$独立于$y$。我们将上述讨论归纳在下面的推论中。

推论 8.1 设定理 8.3 的假设全部满足，且令$T(x)$是式(8.28)的解，则存在变量替换$z=T(x)$将系统式(8.21)转化成观测器型(式(8.22))的充分必要条件是：

$$[g_i,ad_f^k\tau]=0,\quad 0\leqslant k\leqslant n-2 \text{ 和 } 1\leqslant i\leqslant m$$

此外，如果对于某个i，上述条件加强为

$$[g_i,ad_f^k\tau]=0,\quad 0\leqslant k\leqslant n-1$$

⊖ 对定理 8.3、推论 8.1 的整个证明过程可参看文献[66，定理 5.2.1]。

则式(8.22)中的向量场 γ_i 是常数向量。

例 8.17 考虑系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \beta_1(x_1) + x_2 \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u, \quad y = x_1$$

其中，β_1、f_2 是光滑函数，b_1、b_2 是常数。那么

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \beta_1(x_1) + x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{bmatrix}$$

因此，对所有的 x，$\operatorname{rank}\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right] = 2$，$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right]\tau = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$的解是$\tau = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$。如果$[\tau, ad_f \tau] = 0$，则定理 8.3 的条件满足。

由于

$$ad_f \tau = [f, \tau] = -\frac{\partial f}{\partial x}\tau = -\begin{bmatrix} * & 1 \\ * & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

$$[\tau, ad_f \tau] = \frac{\partial ad_f \tau}{\partial x}\tau = -\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

所以

$$[\tau, ad_f \tau] = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2} = 0 \Leftrightarrow f_2(x_1, x_2) = \beta_2(x_1) + x_2\beta_3(x_1)$$

因为本题中 g、τ 都是常数向量场，所以$[g, \tau] = 0$，满足推论 8.1 的条件。为了在 z 坐标系下得到常数向量场 γ，需要满足额外的条件：

$$0 = [g, ad_f \tau] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{\partial \beta_3}{\partial x_1} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

192

如果 β_3 是常数或者 $b_1 = 0$，则该条件满足。为了得到变量替换，需要解偏微分方程

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x_1} & \frac{\partial T_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial T_2}{\partial x_1} & \frac{\partial T_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \beta_3(x_1) & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

取 $T(0) = 0$，则有

$$\frac{\partial T_1}{\partial x_2} = 0 \text{ 和} \frac{\partial T_1}{\partial x_1} = 1 \Rightarrow T_1 = x_1$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial x_2} = 1 \text{ 和} \frac{\partial T_2}{\partial x_1} + \beta_3(x_1) = 0 \Rightarrow T_2(x) = x_2 - \int_0^{x_1} \beta_3(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma$$

映射 $T(x)$是一个全局微分同胚，因为它是正则的，且$\left[\frac{\partial T}{\partial x}\right]$对所有的 x 是非奇异的。对于任何 $z \in R^2$，对 x 进行下列替换：

$$x_1 = z_1, \quad x_2 = z_2 + \int_0^{z_1} \beta_3(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma$$

那么，可得到 z 坐标系中的状态模型为

$$\dot{z}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}z+\begin{bmatrix}\beta_1(y)+\int_0^y\beta_3(\sigma)\mathrm{d}\sigma\\ \beta_2(y)-\beta_1(y)\beta_3(y)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_1\\ b_2-b_1\beta_3(y)\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}z$$

◀

最后考虑单输入系统观测器，以作为本节的结束。考虑 n 维系统

$$\dot{x}=f(x)+g(x)u,\quad y=h(x) \tag{8.29}$$

其中，$f(0)=0$，$h(0)=0$。假设系统满足推论 8.1 的假设，即

$$[g,ad_f^k\tau]=0,\quad 0\leqslant k\leqslant n-1$$

则利用变量替换 $z=T(x)$ 可将系统转化为

$$\dot{z}=A_cz+\phi(y)+\gamma u,\quad y=C_cz \tag{8.30}$$

其中，$\phi(0)=0$ 和 γ 是常数。进一步假设系统式(8.29)有相对阶 $\rho\leqslant n$，则通过对 y 求微分，可知 γ 具有下列形式

$$\gamma=[0,\cdots,0,\gamma_\rho,\cdots,\gamma_n]^{\mathrm{T}},\quad 且\ \gamma_\rho\neq 0 \tag{8.31}$$

具有式(8.30)形式的系统称为输出反馈型。如果 $\rho<n$，零动态是线性的，且如果下列多项式是 Hurwitz 的，

$$\gamma_\rho s^{n-\rho}+\cdots+\gamma_{n-1}s+\gamma_n \tag{8.32}$$

193 则系统是最小相位的。我们将这个事实留给读者去验证。

8.4 练习

8.1 对下列每个系统

(1) 求出相对阶并证明系统是最小相位的。

(2) 将系统转化成标准型，其中的变量替换是全局有效的吗？

(3) 在什么额外条件下，系统是反馈线性化的？

(4) 在(3)的条件下，求能将系统转化为控制器型的变量替换。在什么额外条件下，这个变量替换是一个全局微分同胚？

1) $\dot{x}_1=x_2$，$\dot{x}_2=-\phi(x_1)-x_2+u$，$y=x_1+2x_2$，其中，$\phi(0)=0$，$x_1\phi(x_1)\geqslant\beta_1x_1^2\ \forall x_1$ 和 $\beta_1>0$。

2) $\dot{x}_1=-x_1-x_2+u$，$\dot{x}_2=\phi_1(x_1)-\phi_2(x_2)$，$y=x_1+x_2$，其中 ϕ_1、ϕ_2 分别属于扇形域$[\alpha_i,\beta_i]$，$\beta_i>\alpha_i>0$，$i=1$，2。

3) $\dot{x}_1=-\phi_1(x_1)+\phi_2(x_2)$，$\dot{x}_2=-x_1-x_2+x_3$，$\dot{x}_3=-x_3+u$，$y=x_2$，其中 ϕ_1、ϕ_2 都是光滑的，且分别属于扇形域$[\alpha_i,\beta_i]$，$\beta_i>\alpha_i>0$，$i=1$，2。

8.2 对下列每个系统，求出相对阶并判断系统是否是最小相位的。

(1) 升压变换器，式(A.16)，其输出是 x_1。

(2) 升压变换器，式(A.16)，其输出是 x_2。

(3) 生化反应器，式(A.19)和式(A.20)，其输出是 $y=x_1-1$。

(4) 生化反应器，式(A.19)和式(A.20)，其输出是 $y=x_2-1$。

(5) 磁悬浮系统，式(A.30)～(A.32)，其输出是 x_1。

(6) 微静电执行器，式(A.33)，其输出是 x_1。

(7) 微静电执行器，式(A.33)，其输出是 x_3。

(8) 车载倒立摆，式(A.41)～(A.44)，其输出是 x_1。

(9) 车载倒立摆，式(A.41)～(A.44)，其输出是 x_3。

(10) TORA 系统，式(A.49)～(A.52)，其输出是 x_1。

(11) TORA 系统，式(A.49)～(A.52)，其输出是 x_3。 194

8.3 对下列每个系统，考察系统是否可以反馈线性化。如果可以，则进一步求出将系统转化为控制器型的变量替换并判断变量替换的有效域。

(1) 升压变换器，式(A.16)。

(2) 生化反应器，式(A.19)，其中，ν 由式(A.20)定义。

(3) 磁悬浮系统，式(A.30)～(A.32)。

(4) 微静电执行器，式(A.33)。

(5) 倒立摆，式(A.47)。

8.4 考虑场控直流电动机，式(A.25)，其中 $\delta=0$。

(1) 设定 $T_a=0$，证明在忽略电枢电路动态后得到的二维模型是

$$\dot{x}_1 = a_1[-f_e(x_1)+u], \quad \dot{x}_2 = a_2[x_1(V_a - x_1x_2) - f_{\mathcal{L}}(x_2)]$$

其中，式(A.25)的 x_2、x_3 在这里分别用 x_1、x_2 表示。

(2) 取 $y=x_2$，求系统的相对阶。

(3) 研究系统是否可以反馈线性化。

8.5 考虑系统

$$\dot{x}_1 = x_1 + \frac{x_2}{1+x_1^2}, \quad \dot{x}_2 = -x_2 + x_3, \quad \dot{x}_3 = x_1x_2 + u$$

(1) 如果输出是 x_2，求出系统的相对阶并判断其是否为最小相位的。

(2) 如果输出是 x_1，重做第(1)问。

(3) 证明系统是可以反馈线性化的。

(4) 寻找将系统转化为控制器型的变量替换并判定它的有效域。

8.6 一类半挂车的模型可由如下状态方程描述

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \tan(x_3) \\
\dot{x}_2 &= -\frac{\tan(x_2)}{a\cos(x_3)} + \frac{1}{b\cos(x_2)\cos(x_3)}\tan(u) \\
\dot{x}_3 &= \frac{\tan(x_2)}{a\cos(x_3)}
\end{aligned}$$

其中，a、b 是正常数。u 的取值范围是 $D_u=\left\{|u|<\frac{\pi}{2}\right\}$，$x$ 的取值范围是 $D_x=\left\{|x_2|<\frac{\pi}{2},\ |x_3|<\frac{\pi}{2}\right\}$，则 $\cos(x_2)\neq 0$，$\cos(x_3)\neq 0$，且 $\tan(u)$是可逆的。 195

(1) 证明可用变量替换 $w=\frac{\tan(u)}{b\cos(x_2)\cos(x_3)}$将系统转化为

$$\dot{x} = f(x) + gw, \quad 其中, f = \begin{bmatrix} \tan(x_3) \\ -\frac{\tan(x_2)}{a\cos(x_3)} \\ \frac{\tan(x_2)}{a\cos(x_3)} \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(2) 证明系统是可以反馈线性化的。

(3) 寻找将系统转化为控制器型的变量替换并判定它的有效域。

8.7 证明当输出是 $y=\text{col}(x_1, x_3)$时，微静电执行器式(A.33)具有观测器型。

8.8 对如下每个系统，判断系统是否可以转化成观测器型。如果可以，寻找变量替换并判断它的有效域。

(1) $\dot{x}_1=x_2$，$\dot{x}_2=-3x_1^2x_2-x_1-x_1^3-x_2+u$，$y=x_1$。

(2) $\dot{x}_1=x_2$，$\dot{x}_2=-x_2^2+x_3$，$\dot{x}_3=x_1^2-2x_2^3+2x_2x_3+u$，$y=x_1$。

(3) van der Pol 方程：$\dot{x}_1=x_2$，$\dot{x}_2=-x_1+x_2-\dfrac{1}{3}x_2^3+u$，$y=x_1$。

(4)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \beta_1(x_1)+x_2+b_1u\\ \dot{x}_2 &= \beta_2(x_1)+\beta_3(x_1)x_2+x_3+b_2u\\ \dot{x}_3 &= \beta_4(x_1)+\beta_5(x_1)x_2+ax_3+b_3u\\ y &= x_1\end{aligned}$$

其中，函数 β_1，…，β_5 是光滑的。

8.9 考虑形如式(8.30)的一个 n 维系统，其相对阶是 $\rho<n$。证明向量 γ 具有式(8.31)给出的形式，且如果多项式(8.32)是 Hurwitz 的，则系统是最小相位的。

196

第 9 章 状态反馈镇定

平衡点的镇定是非线性系统反馈控制的中心任务。这个问题不但本身重要而且是其他控制问题的核心，例如跟踪和调节。我们将分 3 章探讨关于镇定的问题，本章介绍状态反馈镇定，第 10 章介绍鲁棒镇定，第 12 章介绍输出反馈镇定[⊖]。

9.1 基本概念

考虑系统

$$\dot{x} = f(x,u)$$

所谓状态反馈镇定就是设计一个反馈控制律(或称控制器)$u=\phi(x)$，使得原点 $x=0$ 是闭环系统

$$\dot{x} = f(x,\phi(x))$$

的一个渐近稳定平衡点。控制律 $u=\phi(x)$ 被称为“状态反馈”，因为它是 x 的无记忆函数。我们也可以用一个动态状态反馈控制律 $u=\phi(x, z)$来完成镇定，其中，z 是动态系统

$$\dot{z} = g(x,z)$$

的状态。这种情形下被镇定的原点变为($x=0$, $z=0$)。在使用积分器控制或者自适应控制时，必须考虑动态反馈控制。

我们考虑镇定时总认为平衡点在原点，这并不妨碍用类似的方法去讨论一个任意平衡点 x_{ss}镇定的问题。如果稳态控制 u_{ss}使得系统的平衡点为 x_{ss}，即

$$0 = f(x_{ss},u_{ss})$$

进行下面的变量替换

$$x_\delta = x - x_{ss}, \quad u_\delta = u - u_{ss}$$

可得到

$$\dot{x}_\delta = f(x_{ss}+x_\delta,u_{ss}+u_\delta) \overset{\text{def}}{=} f_\delta(x_\delta,u_\delta)$$

使得 $f_\delta(0, 0)=0$。这时问题就变成标准的系统

$$\dot{x}_\delta = f_\delta(x_\delta,u_\delta)$$

在原点的镇定问题，其中，u_δ 是镇定 x_δ 的反馈控制律。总的控制就是 $u=u_\delta+u_{ss}$，它可以看成一个反馈控制 u_δ 和一个前馈控制 u_{ss}的叠加。

对一个线性系统用线性反馈镇定时，闭环系统的原点是全局渐近稳定的平衡点。然而对于非线性系统，情况并非如此，它需要考虑不同的镇定定义。如果反馈控制保证了原点的渐近稳定，但没有给出吸引域，那么我们说反馈控制获得了*局部镇定*。如果一个反馈控制使一个给定的集合包含于吸引域内或者给出了吸引域的一个估计，则称该反馈控制取得

⊖ 关于对镇定更深一步的理解，参见文献[8，19，31，32，33，36，40，43，66，67，71，75，80，81，86，91，107，115，121，141]。

了区域镇定。如果闭环系统的原点是全局渐近稳定的，则称取得了全局镇定。如果一个反馈控制没有实现全局镇定，但可以使任何给定的紧集(不论多大)包含在吸引域中，则说反馈控制获得半全局镇定。半全局镇定是一类很典型的情形，因为在很多情形下反馈控制依赖于参数，调整参数可以改变吸引域范围。这四种镇定定义可以通过下面的例子得以说明。

例 9.1 假设我们想通过状态反馈镇定标量系统

$$\dot{x} = x^2 + u$$

在原点做系统线性化，得到线性系统 $\dot{x}=u$，通过 $u=-kx$ 可镇定该系统，其中 $k>0$。应用这个反馈控制，原系统成为

$$\dot{x} = -kx + x^2$$

该方程在原点的线性化系统是 $\dot{x}=-kx$。因此根据定理 3.2 可知，原点是渐近稳定的，因而可以说 $u=-kx$ 取得了局部镇定。在这个例子中，不难看出吸引域是集合 $\{x<k\}$，利用这个事实可以说，$u=-kx$ 取得了区域稳定。通过增加 k，我们可以扩大吸引域。事实上，任何形式是 $\{-a\leqslant x\leqslant b\}$ 的紧集，其中 a、b 是正数，只要选择 $k>b$ 就能使该紧集包含在吸引域内。因此，$u=-kx$ 取得半全局镇定。注意到 $u=-kx$ 没有取得全局镇定。实际上，对任何有限的 k，总存在状态空间的一部分(即 $x\geqslant k$ 部分)，该部分不在吸引域内。根据定义，半全局镇定的吸引域可包含任何紧集，控制器设计是依赖于给定的集合的，而不必顾及其他更大的集合。对给定的 b，我们就能选择 $k>b$。一旦取定了 k，执行了反馈控制，而初始状态却在区域 $\{x>k\}$ 中，则解 $x(t)$ 将发散到无穷。全局镇定可通过非线性控制器 $u=-x^2-kx$ 取得，它抵消了非线性项使得闭环系统为 $\dot{x}=-kx$，它是线性的，于是全局渐近稳定。◀

198

9.2 线性化

对于线性系统

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

镇定问题很好解决，经状态反馈 $u=-Kx$，闭环系统

$$\dot{x} = (A - BK)x$$

和开环系统一样是线性的。它的原点是渐近稳定的充分必要条件是矩阵 $A-BK$ 是 Hurwitz 的。因此，状态反馈镇定问题转化为设计一个矩阵 K，使得 $A-BK$ 的特征根在开左半复平面。线性控制系统理论说明㊀：倘若(A, B)是可控的，则 $A-BK$ 的特征根能被任意配置(要求复特征根共轭出现)。即使 A 的某些特征根是不可控的，只要这些不可控的特征根都具有负实部，镇定仍然是可能的。在这种情况下，称(A, B)为可镇定的，且 A(开环)的不可控特征根将依然是 $A-BK$(闭环)的特征根。

不难想象对非线性系统的镇定就困难得多了。求解非线性系统镇定的一个简单途径是利用线性化。考虑系统

$$\dot{x} = f(x,u) \tag{9.1}$$

其中，$f(0, 0)=0$，$f(x, u)$在包含原点$(x=0, u=0)$的区域 $D_x\times D_u\subset R^n\times R^m$ 内是连续可微的。我们希望设计一个状态反馈 $u=\phi(x)$来镇定系统。在原点$(x=0, u=0)$做线性化，

㊀ 可参见文献[2]、[22]、[59]、[82]或[114]。

由系统式(9.1)导出线性系统

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{9.2}$$

199

其中，

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x,u)\bigg|_{x=0,u=0};\quad B = \frac{\partial f}{\partial u}(x,u)\bigg|_{x=0,u=0}$$

假设(A, B)可控，或者至少是可镇定的，则存在矩阵K，使得$A-BK$的(能控)特征根全部在开左半复平面的预定位置。将线性状态反馈$u=-Kx$应用到非线性系统式(9.1)，得到闭环系统

$$\dot{x} = f(x, -Kx) \tag{9.3}$$

显然，原点$x=0$是闭环系统的一个平衡点。式(9.3)关于原点的线性化系统是

$$\dot{x} = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,-Kx) + \frac{\partial f}{\partial u}(x,-Kx)(-K)\right]_{x=0} x = (A-BK)x$$

因为$A-BK$是Hurwitz矩阵，从定理3.2可知，原点是闭环系统式(9.3)的一个指数稳定平衡点。此外，我们还能找到关于闭环系统的一个二次Lyapunov函数。令Q是任何正定对称矩阵，解关于P的Lyapunov方程

$$P(A-BK) + (A-BK)^{\mathrm{T}}P = -Q$$

因为$(A-BK)$是Hurwitz的，所以Lyapunov方程有唯一正定解P(定理3.7)。二次函数$V(x)=x^{\mathrm{T}}Px$在原点的某个邻域内是闭环系统式(9.3)的Lyapunov函数，能用来估计吸引域。

例9.2 考虑倒立摆方程式(A.1)

$$\ddot{\theta} + \sin\theta + b\dot{\theta} = cu$$

我们想设计u去镇定具有倾角$\theta=\delta_1$的倒立摆。对于维持平衡点在$\theta=\delta_1$的倒立摆，稳态控制u_{ss}必须满足：

$$\sin\delta_1 = cu_{ss}$$

选择状态变量$x_1=\theta-\delta_1$，$x_2=\dot{\theta}$且设$u_\delta=u-u_{ss}$，可得状态方程

$$\dot{x}_1 = x_2,\quad \dot{x}_2 = -[\sin(x_1+\delta_1) - \sin\delta_1] - bx_2 + cu_\delta$$

它具有式(9.1)给出的标准形式，其中$f(0, 0)=0$。在平衡点原点做线性化可得

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\cos(x_1+\delta_1) & -b \end{bmatrix}_{x_1=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\cos\delta_1 & -b \end{bmatrix};\quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix}$$

200

容易验证(A, B)是可控的。取$K=[k_1, k_2]$，可以得到，当

$$k > -\frac{\cos\delta_1}{c},\quad k_2 > -\frac{b}{c}$$

时，$A-BK$是Hurwitz的。因此控制u是

$$u = \frac{\sin\delta_1}{c} - Kx = \frac{\sin\delta_1}{c} - k_1(\theta-\delta_1) - k_2\dot{\theta}$$

◀

9.3 反馈线性化

考虑非线性系统

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u$$

其中，$f(0)=0$，$x\in R^n$ 且 $u\in R^m$。令 D 是 R^n 包含原点的一个区域且假设存在一个关于 D 的微分同胚 $T(x)$，$T(0)=0$，使得变量替换 $z=T(x)$ 将系统转化为控制器型

$$\dot{z} = Az + B[\psi(x) + \gamma(x)u]$$

其中，(A, B) 可控，对于所有的 $x\in D$，$\gamma(x)$ 是非奇异矩阵。$\gamma^{-1}(x)$ 表示 $\gamma(x)$ 的逆。反馈控制

$$u = \gamma^{-1}(x)[-\psi(x) + v]$$

用来抵消非线性且将系统转化为

$$\dot{z} = Az + Bv$$

因此，原点 $z=0$ 能由 $v=-Kz$ 被镇定，其中 $A-BK$ 是 Hurwitz 的。闭环系统在 z 坐标系里是

$$\dot{z} = (A - BK)z$$

原点 $z=0$ 是指数稳定的。在 x 坐标系里，反馈控制是

$$u = \gamma^{-1}(x)[-\psi(x) - KT(x)]$$

闭环系统是

$$\dot{x} = f(x) + G(x)\gamma^{-1}(x)[-\psi(x) - KT(x)] \stackrel{\text{def}}{=} f_c(x)$$

x 坐标系中的原点继承了在 z 坐标系中原点的指数稳定性，因为 $T(x)$ 是 $x=0$ 邻域的一个微分同胚。特别地，因为

201

$$\dot{z} = \frac{\partial T}{\partial x}(x)\dot{x} = (A - BK)z$$

所以

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x) f_c(x) = (A - BK)T(x)$$

对上述方程两边在 $x=0$ 处求 Jacobi，利用 $f_c(0)=0$，可以得到

$$\frac{\partial f_c}{\partial x}(0) = J^{-1}(A - BK)J, \quad 其中\ J = \frac{\partial T}{\partial x}(0)$$

矩阵 J 是非奇异的，且 $J^{-1}(A-BK)J$ 和 $A-BK$ 有相同的特征根。因此，$J^{-1}(A-BK)J$ 是 Hurwitz 的，且由定理 3.2 可知 $x=0$ 是指数稳定的。如果 $D=R^n$ 且 $T(x)$ 是一个全局微分同胚，则 $x=0$ 是全局渐近稳定的。如果 $T(x)$ 仅是区域 $D\subset R^n$ 上的一个微分同胚，则方程 $\dot{z}=(A-BK)z$ 在域 $T(D)$ 内是有效的，吸引域在 z 坐标系中可以用 $\Omega_c=\{z^{\mathrm{T}}Pz\leqslant c\}$ 来估计，这里的 $P=P^{\mathrm{T}}>0$ 是 Lyapunov 方程

$$P(A - BK) + (A - BK)^{\mathrm{T}}P = -Q \tag{9.4}$$

的解，其中 $Q=Q^{\mathrm{T}}>0$，选取 $c>0$ 满足 $\Omega_c\subset T(D)$。在 x 坐标系中的估计是 $T^{-1}(\Omega_c)=\{T^{\mathrm{T}}(x)PT(x)\leqslant c\}$。

例 9.3 在例 8.12 中，我们看到系统

$$\dot{x}_1 = a\sin x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1^2 + u$$

通过变量替换

$$z = T(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ a\sin x_2 \end{bmatrix}$$

可将其转化为控制器型，其中 $T(x)$ 是从 $D=\left\{|x_2|<\frac{\pi}{2}\right\}$ 到 $T(D)=\{|z_2|<a\}$ 的一个微分同胚。取 $K=[\sigma^2, 2\sigma]$，其中，$\sigma>0$，那么 $A-BK$ 的特征根是 $-\sigma$、$-\sigma$。取

$$P=\begin{bmatrix}3\sigma^2 & \sigma\\ \sigma & 1\end{bmatrix},\quad Q=\begin{bmatrix}2\sigma^2 & 0\\ 0 & 2\sigma\end{bmatrix}$$

则 Lyapunov 方程式(9.4)成立。吸引域可用下式估计：

$$\{3\sigma^2x_1^2+2\sigma a x_1\sin x_2+a^2\sin^2 x_2\leqslant c\}$$

其中[⊖]，

$$c<\min_{|z_2|=a} z^{\mathrm{T}}Pz=\frac{a^2}{\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}P^{-1}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}}=\frac{2a^2}{3}$$ ◀

202

反馈线性化是基于非线性项 γ 和 ψ 的精确模型并通过数学运算抵消的，因此需要知道 γ、ψ 和 T 的准确表达式。然而由于模型简化、参数不确定性和计算误差等实际原因，在实际运行中进行抵消几乎是不可能的。最可能的情况是，控制设计采用的函数 $\hat{\gamma}$、$\hat{\psi}$ 和 $\hat{T}$ 是 γ、ψ 和 T 的近似值，即实际执行的反馈控制是

$$u=\hat{\gamma}^{-1}(x)[-\hat{\psi}(x)-K\hat{T}(x)]$$

应用这个反馈控制得到的闭环系统是

$$\dot{z}=Az+B\{\psi(x)+\gamma(x)\hat{\gamma}^{-1}(x)[-\hat{\psi}(x)-K\hat{T}(x)]\}$$

对方程的右边加减 BKz，并将闭环系统重新写成

$$\dot{z}=(A-BK)z+B\Delta(z)\tag{9.5}$$

其中，

$$\Delta(z)=\{\psi(x)+\gamma(x)\hat{\gamma}^{-1}(x)[-\hat{\psi}(x)-K\hat{T}(x)]+KT(x)\}_{x=T^{-1}(z)}$$

系统式(9.5)可以看成是标称系统 $\dot{z}=(A-BK)z$ 的一个扰动。当 $\Delta(0)=0$ 时，扰动项 $B\Delta(z)$ 的影响可用 4.2 节给出的方法研究，当 $\Delta(0)\neq 0$ 时，则采用 4.3 节的方法。下面的引理概括了上面的分析。

引理 9.1 假设闭环系统式(9.5)在包含原点的区域 $D_z\subset R^n$ 内是有合理定义的，且关于所有的 $z\in D_z$，$\|\Delta(z)\|\leqslant k\|z\|$ 成立。令 P 是 Lyapunov 方程式(9.4)在 $Q=I$ 时的解，如果

$$k<\frac{1}{2\|PB\|}\tag{9.6}$$

且 $D_z=R^n$，则原点 $z=0$ 是全局指数稳定的。进一步，假设关于所有的 $z\in D_z$，$\|\Delta(z)\|\leqslant k\|z\|+\delta$，其中，$k$ 满足式(9.6)和 $\delta>0$。取 $r>0$，使得 $B_r\subset D_z$，则存在正数 c_1、c_2，当 $\delta<c_1r$ 且 $z(0)\in\{z^{\mathrm{T}}Pz\leqslant\lambda_{\min}(P)r^2\}$ 时，$\|z(t)\|$ 是终极有界的且其界可以是 δc_2。如果 $D_z=R^n$，$\|z(t)\|$ 将关于任何 $\delta>0$ 是全局终极有界的，其界还可以是 δc_2。

证明：用 $V(z)=z^{\mathrm{T}}Pz$，我们有

$$\begin{aligned}\dot{V}&=z^{\mathrm{T}}[P(A-BK)+(A-BK)^{\mathrm{T}}P]z+2z^{\mathrm{T}}PB\Delta(z)\\&\leqslant-\|z\|^2+2\|PB\|\|z\|\|\Delta(z)\|\end{aligned}$$

如果 $\|\Delta(z)\|\leqslant k\|z\|+\delta$，则

$$\begin{aligned}\dot{V}&\leqslant-\|z\|^2+2k\|PB\|\|z\|^2+2\delta\|PB\|\|z\|\\&=-(1-\theta_1)\|z\|^2-\theta_1\|z\|^2+2k\|PB\|\|z\|^2+2\delta\|PB\|\|z\|\end{aligned}$$

203

⊖ 参见 3.6 节和方程式(B.3)。

其中，$\theta_1 \in (0, 1)$且足够接近于1，使得$k < \frac{\theta_1}{(2\|PB\|)}$。这时，

$$\dot{V} \leqslant -(1-\theta_1)\|z\|^2 + 2\delta\|PB\|\|z\|$$

如果$\|\Delta(z)\| \leqslant k\|z\|$，我们在上述不等式里设定$\delta=0$且推断出原点$z=0$是指数稳定的，或者，如果$D_z = R^n$，则原点是全局指数稳定的。如果$\delta>0$，那么

$$\dot{V} \leqslant -(1-\theta_1)(1-\theta_2)\|z\|^2, \quad \forall \|z\| \geqslant \frac{2\delta\|PB\|}{(1-\theta_1)\theta_2} \stackrel{\text{def}}{=} \delta c_0$$

其中，$\theta_2 \in (0, 1)$。定理4.5说明，如果$\delta c_0 < r\sqrt{\frac{\lambda_{\min}(P)}{\lambda_{\max}(P)}}$和$z(0) \in \{z^{\mathrm{T}}Pz \leqslant \lambda_{\min}(P)r^2\}$，则$\|z(t)\|$终极有界，且上界可以是$\delta c_0\sqrt{\frac{\lambda_{\min}(P)}{\lambda_{\max}(P)}}$。如果$D_z = R^n$，常数$r$可以选得任意大，因此关于任何初始状态$z(0)$终极有界，而且$\delta c_0$可以取得任意大。 □

例9.4 考虑例9.2讨论的倒立摆方程

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\sin(x_1+\delta_1) - bx_2 + cu$$

线性化后的一个镇定反馈控制为

$$u = \left(\frac{1}{c}\right)[\sin(x_1+\delta_1) - (k_1x_1 + k_2x_2)]$$

选择k_1、k_2，使得

$$A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & -(k_2+b) \end{bmatrix}$$

是Hurwitz的。假设由于参数c的不确定性，实际控制是

$$u = \left(\frac{1}{\hat{c}}\right)[\sin(x_1+\delta_1) - (k_1x_1 + k_2x_2)]$$

其中，$\hat{c}$是c的一个估计。那么闭环系统为

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -k_1x_1 - (k_2+b)x_2 + \Delta(x)$$

其中，

$$\Delta(x) = \left(\frac{c-\hat{c}}{\hat{c}}\right)[\sin(x_1+\delta_1) - (k_1x_1 + k_2x_2)]$$

误差项$\Delta(x)$全局满足$|\Delta(x)| \leqslant k\|x\| + \delta$，其中，

204

$$k = \left|\frac{c-\hat{c}}{\hat{c}}\right|(1+\sqrt{k_1^2+k_2^2}), \quad \delta = \left|\frac{c-\hat{c}}{\hat{c}}\right||\sin\delta_1|$$

常数k、δ是用来衡量估计c时误差的大小程度。令P是Lyapunov方程$P(A-BK)+(A-BK)^{\mathrm{T}}P=-I$的解。如果记$P=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$，则当

$$k < \frac{1}{2\sqrt{p_{12}^2+p_{22}^2}}$$

时，解是全局终极有界的，且最终的界与δ成正比。如果$\sin\delta_1=0$，则上述关于k的界将保证原点的全局指数稳定。当不确定性的界是充分小的时候，满足上述不等式不是问题，但对于大的不确定性，就需要仔细选取$K(=[k_1\ k_2])$，甚至有可能选不到K使得k满足不等式的要求。为了说明这点，我们设$b=0$，即忽略摩擦，且考虑系统的不确定性为对质量m的估计，记$\hat{c}=\frac{m}{\hat{m}}$[⊖]，其中$\hat{m}$是$m$的一个估计。常数$k$，$\delta$取为

⊖ m原书为m_0，有误。——译者注

$$k=\Delta_m\left[1+\sqrt{k_1^2+k_2^2}\right],\quad \delta=\Delta_m|\sin\delta_1|,\quad 其中\ \Delta_m=\left|\frac{\hat{m}-m}{m}\right|$$

令 $K=\begin{bmatrix}\sigma^2 & 2\sigma\end{bmatrix}$，它配置 $A-BK$ 的特征根为 $-\sigma$、$-\sigma$，其中 σ 为正数。通过解 $Q=I$ 时的 Lyapunov方程，可以验证不等式 $k<\dfrac{1}{(2\sqrt{p_{12}^2+p_{22}^2})}$ 等价于

$$\Delta_m<\frac{2\sigma^3}{\left[1+\sigma\sqrt{\sigma^2+4}\right]\sqrt{4\sigma^2+(\sigma^2+1)^2}}$$

将不等式右边看作 σ 的一个函数，通过绘制图形，可以看出它先随着 σ 单调增加至一个最大值 0.3951，之后单调减少，趋向零。因此，如果 $\Delta_m>0.3951$，则不等式不能被满足，而对每个小于 0.3951 的 Δ_m 值，总可以从不等式解出 σ。例如，对 $\Delta_m=0.3$，σ 取值范围是 $1.37<\sigma<5.57$。◀

上述 Lyapunov 分析方法说明用反馈控制 $u=\gamma^{-1}(x)[-\psi(x)-KT(x)]$ 的镇定对不确定的模型具有某种程度的鲁棒性。在第 10 章，我们将说明基于式(9.5)的扰动项 $B\Delta(z)$ 属于输入矩阵 B 的象空间这一事实，通过设计镇定反馈可以获得更好的鲁棒性，这样的扰动项被称为满足匹配条件的扰动。如果 $\|\Delta(z)\|$ 的上界已知，第 10 章给出的技术能保证对任意大的 $\Delta(z)$ 具有鲁棒性。

反馈线性化的基础理论是抵消系统的非线性项。上面的讨论集中于是否能抵消非线性项和不确定性影响，除了这种讨论之外，其实我们还应该考察理论本身：抵消非线性项是好主意吗？上面提出的抵消非线性项做法完全是受数学处理上的便利所驱动。将系统线性化，使得它更容易应用发展得相对完善的线性控制理论。从性能角度，一个非线性项是“好”还是“坏”，以及决定是否该用反馈来抵消这个非线性项是应该有关系的。下面用两个例子来说明这个观点。 205

例 9.5 考虑标称系统⊖

$$\dot{x}=ax-bx^3+u$$

其中，a、b 是正数。反馈控制

$$u=-(k+a)x+bx^3,\quad k>0$$

用来抵消非线性项 $-bx^3$，且导出闭环系统 $\dot{x}=-kx$。但是 $-bx^3$ 提供了“非线性阻尼”，甚至没有反馈控制，它都能保证解的有界性，尽管原点是不稳定的。因此，我们为什么要抵消它呢？如果我们简单地使用反馈控制

$$u=-(k+a)x,\quad k>0$$

将获得闭环系统 $\dot{x}=-kx-bx^3$，该系统是全局指数稳定的且它的轨线收敛到原点比线性系统 $\dot{x}=-kx$ 来得快。◀

例 9.6 考虑二维系统

$$\dot{x}_1=x_2,\quad \dot{x}_2=-h(x_1)+u$$

其中，$h(0)=0$ 和关于所有的 $x_1\neq 0$，$x_1h(x_1)>0$。系统是可以反馈线性化的，一个线性化且镇定系统的反馈控制可取

$$u=h(x_1)-(k_1x_1+k_2x_2)$$

其中，选择 k_1、k_2 使得闭环系统特征根配置到左半复平面的预定位置。另一方面，用 $y=x_2$ 作为输出，系统是无源的，其正定存储函数可以取成 $V=\int_0^{x_1}h(z)\mathrm{d}z+\frac{1}{2}x_2^2$。特别地，$\dot{V}=$

⊖ 例子取自文献[42]。

yu。如果将反馈控制取成

$$u = -\sigma(x_2)$$

可得到

206

$$\dot{V} = -x_2\sigma(x_2) \leqslant 0$$

其中，σ 是任何局部 Lipschitz 函数，并满足 $\sigma(0)=0$ 和 $y\sigma(y)>0$，$y\neq0$。

因为

$$x_2(t) \equiv 0 \Rightarrow \dot{x}_2(t) \equiv 0 \Rightarrow h(x_1(t)) \equiv 0 \Rightarrow x_1(t) \equiv 0$$

从不变性原理可得原点是渐近稳定的。对比线性化反馈控制，控制 $u=-\sigma(x_2)$ 有两个优点。其一，它没有用到非线性函数 h，因此对 h 的模型不确定性是鲁棒的。其二，函数 σ 的选择灵活性能用来满足对控制的要求。例如，选择 $u=-k\text{sat}(x_2)$，就能满足形如 $|u|\leqslant k$ 的有界性约束。然而，控制 $u=-\sigma(x_2)$ 不能任意配置 $x(t)$ 的衰减率。闭环系统在原点的线性化特征方程是

$$s^2 + \sigma'(0)s + h'(0) = 0$$

上述方程的两个根中有一个不能被移动到 $\text{Re}[s] = -\sqrt{h'(0)}$ 的左边。本例也可以利用无源性理论来设计反馈控制器，对此将在 9.6 节中进行讨论。◀

这两个例子都说明，有时候系统存在非线性是有益的，抵消它们未必是一个可取的选择。我们应该尽力去理解非线性项影响，然后决定抵消是否合适。当然，这不是一个容易完成的任务。

9.4 局部反馈线性化

考虑非线性系统

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u$$

其中，$f(0)=0$，$x\in R^n$ 和 $u\in R^m$。令 D 是 R^n 中包含原点的一个区域，假设存在一个关于 D 的微分同胚 $T(x)$，$T(0)=0$，使用下列变量替换

$$z = \begin{bmatrix}\eta\\ \xi\end{bmatrix} = T(x) = \begin{bmatrix}T_1(x)\\ T_2(x)\end{bmatrix}$$

将系统转化为如下形式

$$\dot{\eta} = f_0(\eta,\xi), \quad \dot{\xi} = A\xi + B[\psi(x) + \gamma(x)u] \tag{9.7}$$

其中，$\xi\in R^\rho$，$\eta\in R^{n-\rho}$，(A, B)可控，且对于 $x\in D$，$\gamma(x)$总是的一个非奇异矩阵。由上述假设可得 $f_0(0, 0)=0$ 和 $\psi(0)=0$。进一步假设 f_0、ψ 和 γ 都是局部 Lipschitz 的。我们的目标是设计状态反馈去镇定原点。这里的式(9.7)受 8.1 节的标准型启发，但是输出方程没有了，因为它在状态反馈镇定中不起作用。在这小节，我们不局限于讨论单输入系统，也不要求(A, B)具有可控标准型的形式。

207

采用状态反馈

$$u = \gamma^{-1}(x)[-\psi(x) + v]$$

式(9.7)就成为

$$\dot{\eta} = f_0(\eta,\xi), \quad \dot{\xi} = A\xi + Bv \tag{9.8}$$

其中，方程 $\dot{\xi}=A\xi+Bv$ 可以用 $v=-K\xi$ 来镇定，即$(A-BK)$是 Hurwitz 矩阵，得到的闭

环系统为

$$\dot{\eta}=f_0(\eta,\xi),\quad \dot{\xi}=(A-BK)\xi \tag{9.9}$$

它是系统 $\dot{\eta}=f_0(\eta,\ \xi)$和 $\dot{\xi}=(A-BK)\xi$ 组成的一个串联。$\dot{\eta}=f_0(\eta,\ 0)$原点的渐近稳定是串联系统原点渐近稳定的一个必要条件。因为关于初始条件 $\xi(0)=0$，我们有 $\xi(t)\equiv 0$，串联系统的轨线与和 $\dot{\eta}=f_0(\eta,\ 0)$相一致。下面的引理说明这个条件也是充分的。

引理 9.2 如果 $\dot{\eta}=f_0(\eta,\ 0)$的原点是渐近(或指数)稳定的，则串联系统(式(9.9))的原点是渐近(或指数)稳定的。

这个引理可由 C.1 构建的复合 Lyapunov 函数证明。在渐近稳定情况下，Lyapunov 函数是 $bV_1(\eta)+\sqrt{\xi^{\mathrm{T}}P\xi}$，其中 $b>0$ 可以充分小，$V_1(\eta)$来自定理 3.9(逆 Lyapunov 定理)，$P=P^{\mathrm{T}}>0$ 是 Lyapunov 方程 $P(A-BK)+(A-BK)^{\mathrm{T}}P=-I$ 的解。在指数稳定情况下，Lyapunov 函数是 $bV_1(\eta)+\xi^{\mathrm{T}}P\xi$，其中 $b>0$ 充分小，$V_1(\eta)$来自定理 3.8(逆 Lyapunov 定理)。

引理 9.2 说明一个最小相位、输入-输出可以线性化的、单输入-单输出系统可由状态反馈控制

$$u=\gamma^{-1}(x)[-\psi(x)-KT_2(x)] \tag{9.10}$$

镇定，该反馈控制不依赖于于 $T_1(x)$，因此它与偏微分方程式(7.8)解中的函数 ϕ 的选取无关。

引理 9.2 是一个局部结果。下面两个例子说明串联系统原点的渐近稳定性对于 $\dot{\eta}=f_0(\eta,\ \xi)$原点的全局渐近稳定性是不充分的。

208

例 9.7 考虑二维系统[⊖]

$$\dot{\eta}=-\eta+\eta^2\xi,\quad \dot{\xi}=v$$

$\dot{\eta}=-\eta$ 的原点是全局指数稳定的。利用 $v=-k\xi$，$k>0$，通过线性化，我们能看到整个系统的原点$(\eta,\ \xi)=(0,\ 0)$是指数稳定。但它不是全局渐近稳定的。我们来说明这个事实。取 $\upsilon=\eta\xi$，注意到

$$\dot{\upsilon}=\eta\dot{\xi}+\dot{\eta}\xi=-k\eta\xi-\eta\xi+\eta^2\xi^2=-(1+k)\upsilon+\upsilon^2$$

因而集合$\{\eta\xi<1+k\}$是正不变的。边界 $\eta\xi=1+k$ 是系统的一条轨线，其中 $\eta(t)=(1+k)\mathrm{e}^{kt}$，$\xi(t)=\mathrm{e}^{-kt}$。在集合$\{\eta\xi<1+k\}$中，$\upsilon(t)$严格递减，且存在一个有限时间 T，对所有的 $t\geqslant T$，$\upsilon(t)\leqslant\frac{1}{2}$。代入系统模型中的第一个方程，可得对所有的 $t\geqslant T$，$\eta\dot{\eta}\leqslant-\frac{1}{2}\eta^2$，这就说明当 t 趋于无穷时，轨线将趋于原点。因此$\{\eta\xi<1+k\}$是吸引域。尽管通过选择 k 足够大来扩大吸引域，使得它包含任何紧集，但原点不是全局渐近稳定的。因此，$v=-k\xi$ 只能取得半全局镇定。◀

如果 $\dot{\eta}=f_0(\eta,\ 0)$的原点是全局渐近稳定的，通过线性反馈 $v=-k\xi$ 配置$(A-BK)$的特征根到左半复平面的预定位置，使得 $\dot{\xi}=(A-BK)\xi$ 的解可以用任意快的速度衰减，这时人们可能会认为系统式(9.8)可被全局镇定，或者至少被半全局镇定；也可能认为，由于 $\xi(t)$很快收敛到 0，所以 $\dot{\eta}=f_0(\eta,\ \xi)$[⊜]的解将很快接近 $\dot{\eta}=f_0(\eta,\ 0)$解，而后者的原点是全局渐近稳定。因此关于上述例子中半全局镇定的方案就可以采用。但下面例子将说明这个方案未必成功。

⊖ 例子取自文献[19]。

⊜ 原文误为 $\dot{\xi}=f_0(\eta,\ \xi)$。——译者注

例 9.8 考虑三维系统[⊖]。

$$\dot{\eta}=-\frac{1}{2}(1+\xi_2)\eta^3,\quad \dot{\xi}_1=\xi_2,\quad \dot{\xi}_2=v$$

采用线性反馈

$$v=-k^2\xi_1-2k\xi_2 \stackrel{\text{def}}{=} -K\xi$$

使得

$$A-BK=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k^2 & -2k \end{bmatrix}$$

的特征根是$-k$、$-k$。可得矩阵指数

$$e^{(A-BK)t}=\begin{bmatrix} (1+kt)e^{-kt} & te^{-kt} \\ -k^2te^{-kt} & (1-kt)e^{-kt} \end{bmatrix}$$

209

当$k\to\infty$时，解$\xi(t)$将任意快地衰减到零。注意：指数矩阵中位于左下角的元素指数项的系数是k的一个二次函数，可以证明这个元素的绝对值在$t=\frac{1}{k}$时达到最大值$\frac{k}{e}$。这说明尽管选择足够大的k，这一项能任意快地衰减到零，但它的暂态性能会出现与k同阶的峰值。这个现象被称为峰值现象[⊜]。非线性函数的峰值现象可能导致系统不能镇定。在本例中，取初始状态$\eta(0)=\eta_0$，$\xi_1(0)=1$，$\xi_2(0)=0$，这时$\xi_2(t)=-k^2te^{-kt}$和

$$\dot{\eta}=-\frac{1}{2}(1-k^2te^{-kt})\eta^3$$

在k的峰值期间，η^3的系数是正的，从而使$|\eta(t)|$增长。尽管理论上η^3的系数将变成负的，但是可能来不及在有限的逃逸时间之前完成改变。在本例中，解满足

$$\eta^2(t)=\frac{\eta_0^2}{1+\eta_0^2[t+(1+kt)e^{-kt}-1]}$$

如果$\eta_0^2>1$，k选择得足够大，则系统将有一个有限逃逸时间。◀

下面的引理给出了全局渐近稳定的一个充分条件，它可以由引理4.6得到。

引理 9.3 *如果系统$\dot{\eta}=f_0(\eta,\xi)$是输入-状态稳定的，则串联系统式(9.9)的原点是全局渐近稳定。*

前一个小节研究了不确定性对反馈线性化的影响。可以用相似的方法研究局部反馈线性化的系统。假设采用的控制是

$$u=\hat{\gamma}^{-1}(x)[-\hat{\psi}(x)-K\hat{T}_2(x)]$$

其中，$\hat{\gamma}$、$\hat{\psi}$、$\hat{T}_2$分别是γ、ψ、T_2的近似值，则闭环系统表示为

$$\dot{\eta}=f_0(\eta,\xi),\quad \dot{\xi}=(A-BK)\xi+B\Delta(z) \tag{9.11}$$

其中，

$$\Delta(z)=\{\psi(x)+\gamma(x)\hat{\gamma}^{-1}(x)[-\hat{\psi}(x)-K\hat{T}_2(x)]+KT_2(x)\}_{x=T^{-1}(z)}$$

系统式(9.11)是一个由Δ作为输入的系统$\dot{\xi}=(A-BK)\xi+B\Delta$和$\xi$作为输入的系统$\dot{\eta}=f_0(\eta,\xi)$的串联。根据引理4.6，如果$\dot{\eta}=f_0(\eta,\xi)$是输入-状态稳定的，则关于$\Delta$作为输入的系统式(9.11)也是。这个结果证明了如下引理。

210

⊖ 例子取自文献[137]。

⊜ 想了解更多的峰值现象，参见文献[137]。关于在高增益观测器中的峰值现象说明，参见11.4节。

引理 9.4 考虑系统(9.11)，其中 $\dot{\eta}=f_0(\eta, \xi)$是输入-状态稳定的，且关于所有的 z 存在 $\delta>0$，使得$\|\Delta(z)\|\leqslant\delta$，则存在一个自变量为 δ 的$\mathcal{K}$类函数，使得$\|z(t)\|$全局终极有界的。

如果 $\Delta(z)$或者它的一部分在 $z=0$ 为零，则要求$\|\Delta(z)\|\leqslant\delta$ 显得保守。如果将式(9.11)看成标称系统式(9.9)扰动的结果，利用 4.2 节和 4.3 节的分析，可以得出如下的引理，引理的证明见附录 D。

引理 9.5 假设 $\dot{\eta}=f_0(\eta, 0)$的原点是指数稳定的，闭环系统在包含原点的域 $D\subset R^n$ 里有确切定义，且对所有的 $z\in D_z$，存在正数 k、δ，使得$\|\Delta(z)\|\leqslant k\|z\|+\delta$；还存在一个 $z=0$ 的邻域 N_z 和正数 k^*、δ^*、c，使得对于 $k<k^*$，$\delta<\delta^*$ 和 $z(0)\in N_z$，则$\|z(t)\|$是终极有界的，其界可以是 $c\delta$。如果 $\delta=0$，式(9.11)的原点是指数稳定的。

9.5 反步法

考虑系统

$$\dot{\eta}=f_a(\eta)+g_a(\eta)\xi \tag{9.12}$$

$$\dot{\xi}=f_b(\eta,\xi)+g_b(\eta,\xi)u \tag{9.13}$$

其中，$\eta\in R^n$，$\xi\in R$ 是状态变量，$u\in R$ 是控制输入。函数 f_a、f_b、g_a、g_b 在包含原点($\eta=0$，$\xi=0$)的一个区域里是光滑的⊖。而且，$f_a(0)=0$。讨论的问题是要设计状态反馈来镇定原点。这个系统可以看作两个系统的串联：第一个是式(9.12)，它以 ξ 作为输入，第二个是式(9.13)，以 u 作为输入的。我们把 ξ 作为控制输入，从系统式(9.12)开始设计，假设对系统式(9.12)可找到一个光滑状态反馈 $\xi=\phi(\eta)$实现镇定，其中 $\phi(0)=0$，即系统

$$\dot{\eta}=f_a(\eta)+g_a(\eta)\phi(\eta)$$

的原点是渐近稳定的。进一步可以认为有一个(光滑、正定)Lyapunov 函数 $V_a(\eta)$，使得不等式

$$\frac{\partial V_a}{\partial\eta}[f_a(\eta)+g_a(\eta)\phi(\eta)]\leqslant-W(\eta) \tag{9.14}$$

成立，其中 $W(\eta)$是正定的。通过在式(9.12)的右边加减 $g_a(\eta)\phi(\eta)$，得到与式(9.12)的相等的状态方程

$$\dot{\eta}=f_a(\eta)+g_a(\eta)\phi(\eta)+g_a(\eta)(\xi-\phi(\eta))$$

211

做变量替换

$$z=\xi-\phi(\eta)$$

得到系统

$$\dot{\eta}=f_a(\eta)+g_a(\eta)\phi(\eta)+g_a(\eta)z$$

$$\dot{z}=F(\eta,\xi)+g_b(\eta,\xi)u$$

其中，

$$F(\eta,\xi)=f_b(\eta,\xi)-\frac{\partial\phi}{\partial\eta}[f_a(\eta)+g_a(\eta)\phi(\eta)+g_a(\eta)z]$$

这个模型与开始考虑的系统式(9.12)和式(9.13)一样，但当输入 z 为零时，第一个子系统原点是渐近稳定的。在设计 u 来镇定整个系统过程中，我们要充分利用这个特点。构造

⊖ 为了方便，我们要求所有的函数是光滑的。然而在一些具体问题里，我们仅需要某阶导数存在即可。

$$V(\eta,\xi) = V_a(\eta) + \frac{1}{2}z^2 = V_a(\eta) + \frac{1}{2}[\xi - \phi(\eta)]^2 \tag{9.15}$$

作为一个备选 Lyapunov 函数，对 $V(\eta,\ \xi)$ 求导，得到

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \frac{\partial V_a}{\partial \eta}[f_a(\eta) + g_a(\eta)\phi(\eta)] + \frac{\partial V_a}{\partial \eta}g_a(\eta)z + zF(\eta,\xi) + zg_b(\eta,\xi)u \\ &\leqslant -W(\eta) + z[\frac{\partial V_a}{\partial \eta}g_a(\eta) + F(\eta,\xi) + g_b(\eta,\xi)u]\end{aligned}$$

第一项关于 η 是负定的。如果我们选择 u，使第二项关于 z 是负定的，则 $\dot{V}$ 关于 $(\eta,\ z)$ 是负定的。当 $g_b \neq 0$ 时，这是可能的，这时取 $k>0$，并且选取

$$u = -\frac{1}{g_b(\eta,\xi)}\left[\frac{\partial V_a}{\partial \eta}g_a(\eta) + F(\eta,\xi) + kz\right] \tag{9.16}$$

得到

$$\dot{V} \leqslant -W(\eta) - kz^2$$

这就说明原点 $(\eta=0,\ z=0)$ 是渐近稳定。由于 $\phi(0)=0$，我们得出原点 $(\eta=0,\ \xi=0)$ 是渐近稳定的。如果所有的假设都全局成立且 $V_a(\eta)$ 是径向无界，原点将是全局渐近稳定的。

例 9.9 考虑系统

$$\dot{x}_1 = x_1^2 - x_1^3 + x_2, \quad \dot{x}_2 = u$$

它具有式(9.12)和式(9.13)给出的形式，其中 $\eta=x_1$，$\xi=x_2$。将 x_2 作为标量系统

212

$$\dot{x}_1 = x_1^2 - x_1^3 + x_2$$

的控制输入，设计反馈控制 $x_2=\phi(x_1)$ 来镇定这个系统的原点 $x_1=0$。取

$$x_2 = -x_1^2 - x_1 \overset{\text{def}}{=} \phi(x_1) \text{ 和 } V_a(x_1) = \frac{1}{2}x_1^2$$

得到

$$\dot{x}_1 = -x_1 - x_1^3 \text{ 和 } \dot{V}_a = -x_1^2 - x_1^4, \quad \forall x_1 \in R$$

因此，$\dot{x}_1=-x_1-x_1^3$ 的原点 $x_1=0$ 是全局渐近稳定的。为了后退一步，做变量替换

$$z_2 = x_2 - \phi(x_1) = x_2 + x_1 + x_1^2$$

系统被转化为

$$\dot{x}_1 = -x_1 - x_1^3 + z_2, \quad \dot{z}_2 = u + (1+2x_1)(-x_1 - x_1^3 + z_2)$$

取 $V(x)=\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{2}z_2^2$ 为整个系统的备选 Lyapunov 函数，对它求导可得

$$\begin{aligned}\dot{V} &= x_1(-x_1 - x_1^3 + z_2) + z_2[u + (1+2x_1)(-x_1 - x_1^3 + z_2)] \\ &= -x_1^2 - x_1^4 + z_2[x_1 + (1+2x_1)(-x_1 - x_1^3 + z_2) + u]\end{aligned}$$

取反馈控制为

$$u = -x_1 - (1+2x_1)(-x_1 - x_1^3 + z_2) - z_2$$

得出

$$\dot{V} = -x_1^2 - x_1^4 - z_2^2$$

原点是全局渐近稳定。 ◀

在上述例子中，由于两个子系统都是标量系统，设计相对简单，应用反步法也很简单。对于高阶系统，可以通过重复应用反步法，保持设计相对简单，下面例子将进一步说明反步法的应用。

例 9.10 考虑三维系统

$$\dot{x}_1 = x_1^2 - x_1^3 + x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = u$$

它是在上一个例子的输入端增加一个积分器构成的。我们继续运用反步法。根据例 9.9，在一次应用反步法后，我们得知以 x_3 为输入的系统

$$\dot{x}_1 = x_1^2 - x_1^3 + x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3$$

[213]

能通过控制

$$x_3 = -x_1 - (1 + 2x_1)(x_1^2 + x_1^3 + x_2) - (x_2 + x_1 + x_1^2) \stackrel{\text{def}}{=} \phi(x_1, x_2)$$

实现全局镇定，且有相应的 Lyapunov 函数

$$V_a(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}(x_2 + x_1 + x_1^2)^2$$

为了应用反步法，做变量替换 $z_3 = x_3 - \phi(x_1, x_2)$，得到

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1^2 - x_1^3 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= \phi(x_1, x_2) + z_3 \\ \dot{z}_3 &= u - \frac{\partial \phi}{\partial x_1}(x_1^2 - x_1^3 + x_2) - \frac{\partial \phi}{\partial x_2}(\phi + z_3) \end{aligned}$$

用 $V = V_a + \frac{1}{2}z_3^2$ 作为三维系统的一个备选 Lyapunov 函数，可得

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{\partial V_a}{\partial x_1}(x_1^2 - x_1^3 + x_2) + \frac{\partial V_a}{\partial x_2}(\phi + z_3) + z_3\left[u - \frac{\partial \phi}{\partial x_1}(x_1^2 - x_1^3 + x_2) - \frac{\partial \phi}{\partial x_2}(z_3 + \phi)\right] \\ &= -x_1^2 - x_1^4 - (x_2 + x_1 + x_1^2)^2 + z_3\left[\frac{\partial V_a}{\partial x_2} - \frac{\partial \phi}{\partial x_1}(x_1^2 - x_1^3 + x_2) - \frac{\partial \phi}{\partial x_2}(z_3 + \phi) + u\right] \end{aligned}$$

将反馈设计为

$$u = -\frac{\partial V_a}{\partial x_2} + \frac{\partial \phi}{\partial x_1}(x_1^2 - x_1^3 + x_2) + \frac{\partial \phi}{\partial x_2}(\phi + z_3) - z_3$$

得到

$$\dot{V} = -x_1^2 - x_1^4 - (x_2 + x_1 + x_1^2)^2 - z_3^2$$

原点是全局渐近稳定的。 ◀

通过反复地应用反步法[1]，我们能够对具有下列结构的严格反馈系统式(9.17)进行镇定设计[2]，

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_0(x) + g_0(x)z_1 \\ \dot{z}_1 &= f_1(x, z_1) + g_1(x, z_1)z_2 \\ \dot{z}_2 &= f_2(x, z_1, z_2) + g_2(x, z_1, z_2)z_3 \\ &\cdots \\ \dot{z}_{k-1} &= f_{k-1}(x, z_1, \cdots, z_{k-1}) + g_{k-1}(x, z_1, \cdots, z_{k-1})z_k \\ \dot{z}_k &= f_k(x, z_1, \cdots, z_k) + g_k(x, z_1, \cdots, z_k)u \end{aligned} \tag{9.17}$$

[214]

其中，$x \in R^n$，z_1，…，z_k 都是标量函数，f_0，…，f_k 在各自的原点都为零，且在我们研究的区域内

---

[1] 关于反步法和其他递推设计技术的更多结果，包括在不确定系统中应用，都可参见文献[43，75，81，107，121]。

[2] 如果画图将 x、z_1、z_2 等从右到左，用积分器连接起来，那么在 $\dot{z}_i$ 方程($i=1,\ldots,k$)中非线性 f_i、g_i 仅依赖于 x，$z_1,\ldots,z_i$，即依赖于其右面的反馈输入的状态变量。

$$g_i(x, z_1, \cdots, z_i) \neq 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant k$$

递推程序从系统

$$\dot{x} = f_0(x) + g_0(x) z_1$$

开始，其中 z_1 被当作是输入。假设我们找到了镇定反馈控制 $z_1 = \phi_0(x)$、$\phi_0(0)=0$ 和一个 Lyapunov 函数 $V_0(x)$，使得关于某个正定函数 $W(x)$，在研究的区域上下式成立

$$\frac{\partial V_0}{\partial x}[f_0(x) + g_0(x)\phi_0(x)] \leqslant -W(x)$$

在许多应用反步法的问题中，变量 x 是标量，这就使得镇定设计变得简单了。由于已经得到了 $\phi_0(x)$，$V_0(x)$，我们可以递推地应用反步法。首先，考虑系统

$$\dot{x} = f_0(x) + g_0(x) z_1$$
$$\dot{z}_1 = f_1(x, z_1) + g_1(x, z_1) z_2$$

对照式(9.12)～(9.13)，有

$$\eta = x, \quad \xi = z_1, \quad u = z_2, \quad f_a = f_0, \quad g_a = g_0, \quad f_b = f_1, \quad g_b = g_1$$

由式(9.15)和式(9.16)构造镇定状态反馈，得到 Lyapunov 函数

$$\phi_1(x, z_1) = \frac{1}{g_1}\left[\frac{\partial \phi_0}{\partial x}(f_0 + g_0 z_1) - \frac{\partial V_0}{\partial x} g_0 - k_1(z_1 - \phi_0) - f_1\right]$$

其中，$k_1 > 0$ 且

$$V_1(x, z_1) = V_0(x) + \frac{1}{2}[z_1 - \phi_0(x)]^2$$

接下来，考虑系统

$$\dot{x} = f_0(x) + g_0(x) z_1$$
$$\dot{z}_1 = f_1(x, z_1) + g_1(x, z_1) z_2$$
$$\dot{z}_2 = f_2(x, z_1, z_2) + g_2(x, z_1, z_2) z_3$$

依旧将它看成式(9.12)～(9.13)的特殊情形，其中

215

$$\eta = \begin{bmatrix} x \\ z_1 \end{bmatrix}, \quad \xi = z_2, \quad u = z_3, \quad f_a = \begin{bmatrix} f_0 + g_0 z_1 \\ f_1 \end{bmatrix}, \quad g_a = \begin{bmatrix} 0 \\ g_1 \end{bmatrix}, \quad f_b = f_2, \quad g_b = g_2$$

应用式(9.15)和式(9.16)，得到镇定反馈控制和 Lyapunov 函数

$$\phi_2(x, z_1, z_2) = \frac{1}{g_2}\left[\frac{\partial \phi_1}{\partial x}(f_0 + g_0 z_1) + \frac{\partial \phi_1}{\partial z_1}(f_1 + g_1 z_2) - \frac{\partial V_1}{\partial z_1} g_1 - k_2(z_2 - \phi_1) - f_2\right]$$

其中，$k_2 > 0$，且

$$V_2(x, z_1, z_2) = V_1(x, z_1) + \frac{1}{2}[z_2 - \phi_2(x, z_1)]^2$$

这个过程被重复 k 次就获得整个镇定状态反馈控制 $u = \phi_k(x,\ z_1,\ \cdots,\ z_k)$ 和 Lyapunov 函数 $V_k(x,\ z_1,\ \cdots,\ z_k)$。

例 9.11 考虑一个具有标准型的单输入-单输出系统⊖

$$\dot{x} = f_0(x) + g_0(x) z_1$$
$$\dot{z}_i = z_{i+1}, \quad 1 \leqslant i \leqslant \rho - 1$$
$$\dot{z}_\rho = \psi(x, z) + \gamma(x, z) u$$
$$y = z_1$$

⊖ 这个系统是 8.1 节中标准型的一个特殊情形，$\dot{x}$-方程为 $f_0(x) + g_0(x) z_1$，它代替了更一般的形式 $f_0(x,\ z)$。

其中，$x\in R^{n-\rho}$，z_1 到 z_ρ 是标量，且对所有(x, z)，$\gamma(x, z)\neq 0$。系统具有严格反馈形式。如果我们找到一个光滑函数 $\phi_0(x)$和一个光滑 Lyapunov 函数 $V_0(x)$，使得关于某个正定函数 $W(x)$有

$$\frac{\partial V_0}{\partial x}[f_0(x)+g_0(x)\phi_0(x)]\leqslant -W(x)$$

那么原点就能递推地用反步法镇定。如果系统是最小相位的，则 $\dot{x}=f_0(x)$的原点是渐近稳定的。在这种情况下，如果找到了一个 Lyapunov 函数 $V_0(x)$和一个正定函数 $W(x)$，使得

$$\frac{\partial V_0}{\partial x}f_0(x)\leqslant -W(x)$$

那么就能简单地采用 $\phi_0(x)=0$。 ◀

例 9.12 考虑系统

$$\dot{x}=-x+x^2z,\quad \dot{z}=u$$

这个系统在例 9.7 中讨论过，那里取反馈为 $u=-kz$，只要 $k>0$ 充分大，就能取得半全局镇定。在这里，我们通过反步法来取得全局镇定[㊀]。从系统 $\dot{x}=-x+x^2z$ 开始，取$z=0$ 和 $V_0(x)=\frac{1}{2}x^2$，那么

$$\frac{\partial V_0}{\partial x}(-x)=-x^2,\quad \forall x\in R$$

216

取 $V=V_0+\frac{1}{2}z^2=\frac{1}{2}(x^2+z^2)$，则可以得到

$$\dot{V}=x(-x+x^2z)+zu=-x^2+z(x^3+u)$$

因此，只要取 $u=-x^3-kz$，$k>0$，系统就是全局镇定的。 ◀

例 9.13 作为以前例子的一个变化，考虑下列系统[㊁]

$$\dot{x}=x^2-xz,\quad \dot{z}=u$$

这次，$\dot{x}=x^2-xz$ 不能用$z=0$ 来镇定。然而，只要设 $z=x+x^2$ 和 $V_0(x)=\frac{1}{2}x^2$，可以得到

$$\frac{\partial V_0}{\partial x}[x^2-x(x+x^2)]=-x^4,\quad \forall x\in R$$

再设 $V=V_0+\frac{1}{2}(z-x-x^2)^2$，又得到

$$\begin{aligned}\dot{V}&=x(x^2-xz)+(z-x-x^2)[u-(1+2x)(x^2-xz)]\\&=-x^4+(z-x-x^2)[-x^2+u-(1+2x)(x^2-xz)]\end{aligned}$$

反馈控制取成

$$u=(1+2x)(x^2-xz)+x^2-k(z-x-x^2),\quad k>0$$

就得到

$$\dot{V}=-x^4-k(z-x-x^2)^2$$

㊀ 读者可以验证系统在原点附近是不能反馈线性化的。

㊁ 如输出为 $y=z$，则系统不是最小相位的，因为零动态 $\dot{x}=x^2$ 的原点是不稳定的。

因此，原点是全局渐近稳定的。 ◀

9.6 基于无源性的控制

在第 5 章和第 7 章，我们介绍了无源性以及它对反馈连接系统稳定性的作用。本小节介绍的基于无源性的控制是前面两章内容的直接应用，但我们不需要回忆很多复杂细节[⊖]，只要记得无源性和零状态可观性的定义就足够了。

考虑 m 维输入和 m 维输出系统

$$\dot{x} = f(x,u), \quad y = h(x) \tag{9.18}$$

其中，f 在 (x, u) 是局部 Lipschitz 的，h 关于 x 对所有的 $x \in R^n$ 和 $u \in R^m$ 是连续的。假设 $f(0, 0)=0$ 且 $h(0)=0$，因此原点 $x=0$ 是一个开环的平衡点。回忆第 5 章的定义，如果存在一个连续可微半正定的存储函数 $V(x)$，使得

217

$$u^{\mathrm{T}} y \geqslant \dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x,u), \quad \forall (x,u) \in R^n \times R^m \tag{9.19}$$

则称系统式(9.18)是无源的。如果在集合 $\{h(x)=0\}$ 中，$\dot{x}=f(x, 0)$ 除了零解 $x(t) \equiv 0$ 外没有其他解，则称系统是零状态可观的。在本小节中，我们总要求存储函数是正定的。下面的定理给出了基于无源性控制设计的基本思想。

定理 9.1 如果系统式(9.18)满足：

1) 系统是无源的，且其存储函数是径向无界的正定函数；

2) 系统是零状态可观的。

则存在输出反馈 $u=-\phi(y)$，使得原点 $x=0$ 全局镇定，其中 ϕ 是任何局部 Lipschitz 函数，并满足 $\phi(0)=0$，对所有的 $y \neq 0$，有 $y^{\mathrm{T}} \phi(y) > 0$。

证明： 已知存储函数 $V(x)$ 正定且径向无界，将 $V(x)$ 作为闭环系统

$$\dot{x} = f(x, -\phi(y))$$

的一个备选 Lyapunov 函数。V 的导数为

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x, -\phi(y)) \leqslant - y^{\mathrm{T}} \phi(y) \leqslant 0$$

因此，$\dot{V}$ 是半负定，且 $\dot{V}=0$ 当且仅当 $y=0$。通过零状态可观性

$$y(t) \equiv 0 \Rightarrow u(t) \equiv 0 \Rightarrow x(t) \equiv 0$$

因此，利用不变性原理，原点是全局渐近稳定的。 □

当我们把存储函数看作系统的能量函数时，藏在定理背后的直观性就变得一览无遗了。一个无源系统有一个稳定原点。镇定原点所需要的是注入阻尼，因此只要 $x(t)$ 不等于零，就要消耗能量。反馈表示注入，而函数 ϕ 就表示注入的阻尼。ϕ 有很大的选择自由度，它总能满足关于输入大小的任何约束。例如，如果要求 u 满足 $|u_i| \leqslant k_i$，$1 \leqslant i \leqslant m$，则可以选 $\phi_i(y)=k_i \mathrm{sat}(y_i)$ 或者 $\phi_i(y)=\left(\frac{2k_i}{\pi}\right)\tan^{-1}(y_i)$。

如果能够将非无源系统转化为无源系统，那么应用定理 9.1 的机会就会大大增加。作为例子，考虑式(9.18)的一个特殊情况，其中，

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u \tag{9.20}$$

⊖ 关于无源控制的更多结果可参见文献[121, 143]；实际系统的广泛应用可参见文献[87, 101]。

假设存在一个径向无界、正定的连续可微函数 $V(x)$，使得

$$\frac{\partial V}{\partial x}f(x) \leqslant 0, \quad \forall x$$

218

取

$$y = h(x) \stackrel{\text{def}}{=} \left[\frac{\partial V}{\partial x}G(x)\right]^{\mathrm{T}}$$

对于输入 u 和这个输出 y，系统是无源的。如果它也是零状态可观的，那么我们就可以应用定理 9.1 了。

例 9.14 考虑系统

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1^3 + u$$

设 $V(x)=\frac{1}{4}x_1^4+\frac{1}{2}x_2^2$，则

$$\dot{V} = x_1^3x_2 - x_2x_1^3 + x_2u = x_2u$$

设 $y=x_2$，并注意，如果 $u=0$，$y(t)\equiv 0$ 蕴含了 $x(t)\equiv 0$。因此，定理 9.1 的所有条件满足。因而，当 $u=-kx_2$ 或者 $u=-\left(\frac{2k}{\pi}\right)\arctan(x_2)$时，其中 $k>0$，存在一个全局镇定的状态反馈。◀

上文表明自由选择输出函数对反馈镇定设计是极有意义的，但是它要求开环状态方程的原点是稳定的。如果能用反馈取得无源性，则可以覆盖更广泛的一类系统。重新考虑系统式(9.20)。如果能找到反馈控制

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v \tag{9.21}$$

和一个输出方程 $h(x)$，使得关于输入 v 和输出是 $y=h(x)$的系统

$$\dot{x} = f(x) + G(x)\alpha(x) + G(x)\beta(x)v, \quad y = h(x) \tag{9.22}$$

满足定理 9.1 的条件，则再用 $v=-\phi(y)$就能全局镇定原点。将一个非无源系统转化为无源系统的反馈称为反馈无源化⊖。

例 9.15 附录 A 给出一个具有 m 个关节机器臂的非线性动态方程，具体如下

$$M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + D\dot{q} + g(q) = u$$

其中，m 维向量 q、u 分别表示广义坐标和控制。惯性矩阵 $M(q)$对于所有的 q 是对称正定的，$\dot{M}-2C$ 关于所有的 q 和 $\dot{q}$ 是反对称的，其中 $\dot{M}$ 是 $M(q)$关于 t 的全导数，D 是对称半正定矩阵，重力项 $g(q)=\left[\frac{\partial P(q)}{\partial q}\right]^{\mathrm{T}}$，其中 $P(q)$表示总势能。要考虑状态反馈控制器的设计，使得能够以渐近的方式将 q 调节到一个常数参考值 q_r。可以算出调节误差 $e=q-q_r$ 满足下列微分方程

219

$$M(q)\ddot{e} + C(q,\dot{q})\dot{e} + D\dot{e} + g(q) = u$$

只要在$(e=0,\ \dot{e}=0)$系统渐近稳定，就可以完成调节任务。但是这一点不是开环平衡点。取

$$u = g(q) - K_pe + v$$

⊖ 如果系统式(9.20)配以输出 $y=h(x)$，文献[20]证明了：如果 $\operatorname{rank}\left\{\left[\frac{\partial h}{\partial x}\right](0)G(0)\right\}=m$，零动态在原点有一个稳定平衡点，且有一个正定的 Lyapunov 函数，则局部反馈的系统等价于一个具有正定存储函数的无源系统。

其中，K_p 是一个正定对称矩阵，v 是一个可以选择的附加控制，得到

$$M(q)\ddot{e} + C(q,\dot{q})\dot{e} + D\dot{e} + K_p e = v$$

当 $v=0$ 时，该系统在($e=0$，$\dot{e}=0$)有一个平衡点，且它的势能$\frac{1}{2}e^{\mathrm{T}}K_p e$ 在 $e=0$ 处有一个唯一的最小值。下面的 V 是动能和新设置的势能之和，它是一个正定函数，

$$V = \frac{1}{2}\dot{e}^{\mathrm{T}}M(q)\dot{e} + \frac{1}{2}e^{\mathrm{T}}K_p e$$

把 V 当作备选存储函数，那么

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \dot{e}^{\mathrm{T}}M\ddot{e} + \frac{1}{2}\dot{e}^{\mathrm{T}}\dot{M}\dot{e} + e^{\mathrm{T}}K_p\dot{e} \\ &= \frac{1}{2}\dot{e}^{\mathrm{T}}(\dot{M} - 2C)\dot{e} - \dot{e}^{\mathrm{T}}D\dot{e} - \dot{e}^{\mathrm{T}}K_p e + \dot{e}^{\mathrm{T}}v + e^{\mathrm{T}}K_p\dot{e} \leqslant \dot{e}^{\mathrm{T}}v\end{aligned}$$

定义输出为 $y=\dot{e}$，则当输入是 v、输出是 y 时，系统是无源的，V 确实是一个存储函数。当 $v=0$ 时，

$$y(t) \equiv 0 \Leftrightarrow \dot{e}(t) \equiv 0 \Rightarrow \ddot{e}(t) \equiv 0 \Rightarrow K_p e(t) \equiv 0 \Rightarrow e(t) \equiv 0$$

这说明系统是零状态可观的。因此，这个系统能用控制 $v=-\phi(\dot{e})$全局镇定，其中函数 ϕ 满足 $\phi(0)=0$ 和关于所有的 $y\neq 0$，$y^{\mathrm{T}}\phi(y)>0$。选择 $v=-K_d\dot{e}$，K_d 是一个正定对称矩阵，那么

$$u = g(q) - K_p(q - q_r) - K_d\dot{q}$$

这一个具有重力补偿的 PD(比例加微分)控制器。 ◀

有一类串联系统是能反馈无源化的，其中串联的两个系统中有一个是无源系统，而另一个系统当输入为 0 时，原点是一个稳定的平衡点。例如考虑下列系统

$$\dot{x} = f_a(x) + F(x,y)y \tag{9.23}$$

$$\dot{z} = f(z) + G(z)u \tag{9.24}$$

220

$$y = h(z) \tag{9.25}$$

其中，$f_a(0)=0$，$f(0)=0$ 和 $h(0)=0$。函数 f_a、F、f 和 G 是局部 Lipschitz 的，h 是连续的。我们将这个系统看成是驱动系统式(9.24)～(9.25)和被驱动系统式(9.23)的串联[⊖]。假设整个系统式(9.23)～(9.25)是全局有定义的，驱动系统是无源的，并有一个径向无界正定的存储函数 $V(z)$，$\dot{x}=f_a(x)$的原点是稳定的，且已知 $\dot{x}=f_a(x)$的一个径向无界 Lyapunov 函数 $W(x)$，它满足

$$\frac{\partial W}{\partial x}f_a(x) \leqslant 0, \quad \forall x$$

利用 $U(x, z)=W(x)+V(z)$作为整个系统式(9.23)～(9.25)的一个备选存储函数，那么

$$\begin{aligned}\dot{U} &= \frac{\partial W}{\partial x}f_a(x) + \frac{\partial W}{\partial x}F(x,y)y + \frac{\partial V}{\partial z}[f(z) + G(z)u] \\ &\leqslant \frac{\partial W}{\partial x}F(x,y)y + y^{\mathrm{T}}u = y^{\mathrm{T}}\left[u + \left(\frac{\partial W}{\partial x}F(x,y)\right)^{\mathrm{T}}\right]\end{aligned}$$

⊖ 一个形为 $\dot{x}=f_0(x, y)$的被驱动系统，其中 f_0 是充分光滑的，只要取 $f_a(x)=f_0(x, 0)$和 $F(x, y)=\int_0^1\left[\frac{\partial f_0}{\partial y}\right](x,sy)\mathrm{d}s$，这个系统总能表示为式(9.23)的形式。

采用反馈控制

$$u = -\left(\frac{\partial W}{\partial x}F(x,y)\right)^{\mathrm{T}} + v$$

得到

$$\dot{U} \leqslant y^{\mathrm{T}} v$$

因此，输入是 v 和输出是 y 的系统

$$\dot{x} = f_a(x) + F(x,y)y \tag{9.26}$$

$$\dot{z} = f(z) - G(z)\left(\frac{\partial W}{\partial x}F(x,y)\right)^{\mathrm{T}} + G(z)v \tag{9.27}$$

$$y = h(x) \tag{9.28}$$

关于存储函数 U 是无源的。如果系统式(9.26)～(9.28)是零状态可观的，则可以应用定理9.1全局镇定原点。如果我们将关于 $W(x)$的假设加强为

$$\frac{\partial W}{\partial x}f_a(x) < 0, \quad \forall x \neq 0 \tag{9.29}$$

则检查整个系统的零状态可观性能被降低到检查驱动系统式(9.24)～(9.25)的零状态可观性，式(9.29)还蕴含 $\dot{x} = f_a(x)$的原点是全局渐近稳定的。取

$$u = -\left(\frac{\partial W}{\partial x}F(x,y)\right)^{\mathrm{T}} - \phi(y) \tag{9.30}$$

221

其中，ϕ 是任何局部 Lipschitz 函数，并满足 $\phi(0)=0$ 和对所有的 $y \neq 0$ 有 $y^{\mathrm{T}}\phi(y)>0$。利用 U 作为闭环系统的备选 Lyapunov 函数，可得

$$\dot{U} \leqslant \frac{\partial W}{\partial x}f_a(x) - y^{\mathrm{T}}\phi(y) \leqslant 0$$

$$\dot{U} = 0 \Rightarrow x = 0 \quad 和 \quad y = 0 \Rightarrow u = 0$$

如果驱动系统式(9.24)～(9.25)是零状态可观的，条件 $u(t)\equiv 0$ 和 $y(t)\equiv 0$ 蕴涵 $z(t)\equiv 0$。因此，用不变性原理可知原点($x=0$，$z=0$)是全局渐近稳定的。下面的定理概括了上面的讨论。

定理 9.2 假设系统式(9.24)～(9.25)是零状态可观的，并是无源的且具有径向无界的正定存储函数。假设 $\dot{x} = f_a(x)$的原点是全局渐近稳定的，$W(x)$为满足式(9.29)的径向无界正定 Lyapunov 函数，那么反馈式(9.30)全局镇定原点($x=0$，$z=0$)。

例 9.16 考虑系统

$$\dot{x} = -x + x^2 z, \quad \dot{z} = u$$

该系统已经在例 9.7 和例 9.12 中研究过。取 $y=z$ 作为输出，系统具有式(9.23)～(9.25)给出的形式。系统 $\dot{z}=u$，$y=z$ 是无源的，其存储函数可以取成 $V(z)=\frac{1}{2}z^2$。因为 $y=z$，所以它是零状态可观的。$\dot{x} = -x$ 的原点是全局指数稳定的，其 Lyapunov 函数可以取成 $W(x)=\frac{1}{2}x^2$。因此，定理 9.2 所有条件全部满足，一个实现全局镇定的状态反馈控制为

$$u = -x^3 - kz, \quad k > 0$$

它与用反步法获得的控制律相同。 ◀

9.7 控制 Lyapunov 函数

考虑下列系统的镇定问题：

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \tag{9.31}$$

其中，$x \in R^n$，$u \in R$，$f(x)$和$g(x)$是局部 Lipschitz 函数，且 $f(0)=0$。假设存在一个局部 Lipschitz 的状态反馈控制 $u=\chi(x)$，使得

222

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\chi(x) \tag{9.32}$$

的原点是渐近稳定的。则根据定理 3.9（逆 Lyapunov 定理）可知，存在一个光滑 Lyapunov 函数$V(x)$，使得在原点的某个邻域有

$$\frac{\partial V}{\partial x}[f(x) + g(x)\chi(x)] < 0, \quad \forall x \neq 0 \tag{9.33}$$

如果式(9.32)的原点是全局渐近稳定的，则 $V(x)$是径向无界的，且不等式(9.33)全局成立。满足式(9.33)的 V 函数必定有如下性质：

$$\frac{\partial V}{\partial x}g(x) = 0 \quad 和 \quad x \neq 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial V}{\partial x}f(x) < 0 \tag{9.34}$$

因此，满足式(9.34)的函数 $V(x)$的存在是存在状态反馈镇定系统式(9.31)的必要条件。在原点的某个邻域里满足(9.34)的C^2 类正定函数 V 被称为*局部控制 Lyapunov 函数*。如果它是径向无界且式(9.34)全局成立，则称 V 为*全局控制 Lyapunov 函数*[⊖]。已知的结论是存在一个控制 Lyapunov 函数也是存在一个镇定状态反馈的充分条件。尤其在给定控制 Lyapunov 函数 V 之后，镇定状态反馈控制 $u=\phi(x)$可以设计为[⊜]

$$\phi(x) = \begin{cases} -\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}f\right) + \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}f\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}g\right)^4}\right] \Big/ \left(\frac{\partial V}{\partial x}g\right), & \frac{\partial V}{\partial x}g \neq 0 \\ 0, \quad \frac{\partial V}{\partial x}g = 0 \end{cases} \tag{9.35}$$

因为经状态反馈，闭环系统为

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\phi(x)$$

V 作为该闭环系统的一个备选 Lyapunov 函数，可看到对 $x \neq 0$，如果$\left[\frac{\partial V}{\partial x}\right]g=0$，则

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x}f < 0$$

如果$\left[\frac{\partial V}{\partial x}\right]g \neq 0$，则

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x}f - \left[\frac{\partial V}{\partial x}f + \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}f\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}g\right)^4}\right] = -\sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}f\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}g\right)^4} < 0$$

因此，在原点的一个邻域里，对所有的 $x \neq 0$，$\dot{V}(x)<0$ 成立，这说明原点是渐近稳定的。

223

如果 V 是一个全局控制 Lyapunov 函数，上述过程说明原点是全局渐近稳定的。

式(9.35)中的函数 $\phi(x)$必须充分光滑，才能使式(9.35)是一个有效的状态反馈控制

⊖ 关于鲁棒控制 Lyapunov 函数的定义，参见文献[43]。

⊜ 式(9.35)被称为 Sontag 公式。

律。下面的引理给出了 $\phi(x)$ 连续性的两点说明[⊖]。

引理 9.6 如果 $f(x)$、$g(x)$ 和 $V(x)$ 是光滑的，则式(9.35)中的 $\phi(x)$ 关于 $x\neq 0$ 是光滑的。如果它们属于 $\mathcal{C}^{l+1}$ 类，其中 $l\geqslant 1$，则 $\phi(x)$ 将是 $\mathcal{C}^{l}$ 类的。在 $x=0$ 处的连续性由如下两个条件保证。

- $\phi(x)$ 在 $x=0$ 连续，如果 $V(x)$ 有小控制属性，即，给定任何 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $x\neq 0$ 和 $\|x\|<\delta$ 时，存在 u 满足 $\|u\|<\varepsilon$，并使得
$$\frac{\partial V}{\partial x}[f(x)+g(x)u]<0$$
- $\phi(x)$ 在 $x=0$ 是局部 Lipschitz 的，如果存在一个局部 Lipschitz 函数 $\chi(x)$，$\chi(0)=0$，使得
$$\frac{\partial V}{\partial x}[f(x)+g(x)\chi(x)]<0,\quad x\neq 0$$

为了使用反馈律式(9.35)，控制 Lyapunov 函数应该满足引理 9.6 的两点要求中的一点，优先考虑满足第二点，因为我们通常需要反馈控制是局部 Lipschitz 的。

控制 Lyapunov 函数给出了非线性控制系统式(9.31)能镇定的充分必要条件。但是关于镇定设计可能没有多大作用，因为要使用反馈式(9.35)，必须先找到一个控制 Lyapunov 函数，这并非易事。有一种情形，系统式(9.31)的控制 Lyapunov 函数是现成的，那就是已知一个镇定反馈 $u=\chi(x)$，同时已知相应满足式(9.33)的 Lyapunov 函数 V。可以用这个 V 代入式(9.35)产生另外一个镇定状态反馈 $u=\phi(x)$，与原控制 $u=\chi(x)$ 比较发现，$u=\phi(x)$ 可能有不同的暂态特性或者鲁棒性。在这种情况下，我们注意到函数 V 满足引理 9.6 的第二点，因此 $\phi(x)$ 是局部 Lipschitz 的。如果采用 9.3 节的反馈线性化方法和 9.5 节的反步法进行镇定设计，一个镇定设计可以产生一个满足式(9.33)的 Lyapunov 函数。在反步法中，递推程序最终可以产生一个满足式(9.33)的 Lyapunov 函数。在反馈线性化中，通过对闭环线性系统解 Lyapunov 方程可获得一个二次 Lyapunov 函数。特别地，如果存在一个变量替换 $z=T(x)$，该变换将系统式(9.31)转化为控制器型
$$\dot{z}=Az+B[\psi(x)+\gamma(x)u]$$
224

那么系统能通过控制
$$u=\gamma^{-1}(x)[-\psi(x)-Kz]$$
被镇定，其中 $(A-BK)$ 是 Hurwitz 的。一个在 x 坐标系里的 Lyapunov 函数为 $V(x)=T^{\mathrm{T}}(x)PT(x)$，其中，$P$ 是 Lyapunov 方程
$$P(A-BK)+(A-BK)^{\mathrm{T}}P=-I$$
的正定解。

例 9.17 对于标量系统
$$\dot{x}=x-x^3+u$$
能用反馈控制 $u=\chi(x)=-x+x^3-\alpha x$ 来全局镇定，其中 $\alpha>0$，该控制是经反馈线性化方法设计的。闭环系统 $\dot{x}=-\alpha x$ 有 Lyapunov 函数 $V(x)=\frac{1}{2}x^2$。用 V 作为全局控制 Lyapunov 函数，代入式(9.35)得到反馈控制

⊖ 除了第二点，引理的证明见文献[132，5.9 节]。第二点的证明在文献[121，属性 3.43]。

$$u=\phi(x)=-x+x^3-x\sqrt{(1-x^2)^2+1}$$

相应地，闭环系统为

$$\dot{x}=-x\sqrt{(1-x^2)^2+1}$$

为了将这两个反馈控制律进行比较，图 9.1 给出了这两种控制下 u 与 x 以及闭环的 $\dot{x}$ 与 x 之间的图像，其中反馈线性化控制中 $\alpha=\sqrt{2}$。当控制在远离原点运行时，图 9.1 揭示了 ϕ 的很多优势。与 χ 比较，对于大的 $|x|$ 而言，ϕ 的数值要小得多；在 ϕ 作用下的闭环系统趋于零的衰减速率更快些。在某种程度上，控制 ϕ 部分保存了非线性项 $-x^3$ 的有益影响，而反馈线性化则完全忽略了这点。

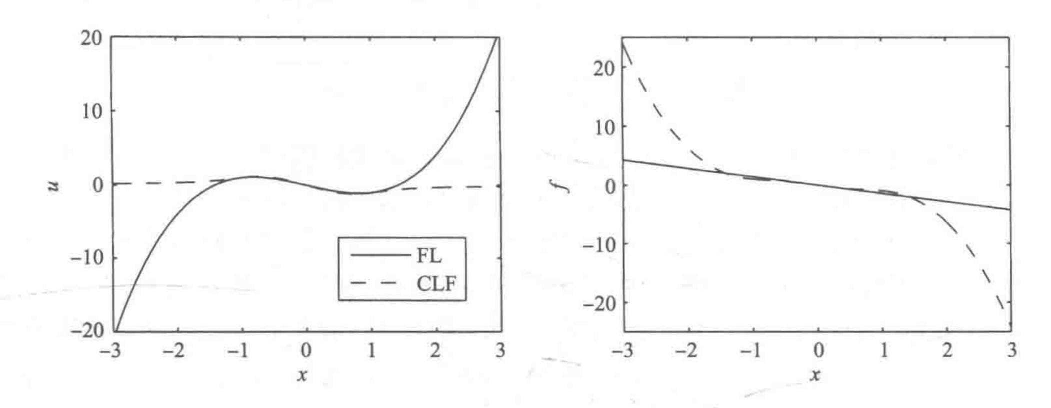


图 9.1 例 9.17 中反馈线性化(FL)和控制 Lyapunov 函数(CLF)里控制 u 与闭环 $\dot{x}=f$ 特性的对比 ◀

从上面的例子我们已经看到，采用控制 Lyapunov 函数设计镇定反馈比采用反馈线性化设计镇定反馈好，然而这个结论却无法证明。而且，一般地讲也未必正确。一个正确的结论是采用式(9.35)的镇定反馈具有一种鲁棒性，这是许多其他镇定设计没有的。假设系统式(9.31)出现扰动，它的控制 u 在施加到系统之前被乘以一个正数，也就是说，被干扰系统具有形式 $\dot{x}=f(x)+g(x)ku$。如果控制 u 对所有的 $k\in[\alpha,\ \beta]$ 原点 $x=0$ 都得到镇定，则称闭环系统有增益裕量$[\alpha,\ \beta]$。如果 $k\in[1,\ g_m]$，那么这里定义的增益裕量与经典的增益裕量 g_m 一致。下面引理证明了用式(9.35)给出的控制 Lyapunov 函数设计的镇定方案具有增益裕量$\left[\frac{1}{2},\ \infty\right)$[⊖]。

225

引理 9.7 假设 f、g 和 V 满足引理 9.6 的条件，V 是一个控制 Lyapunov 函数，且 ϕ 由式(9.35)给出。则关于所有的 $k\geqslant\frac{1}{2}$，$\dot{x}=f(x)+g(x)k\phi(x)$ 的原点是渐近稳定的。如果 V 是一个全局控制 Lyapunov 函数，则原点是全局渐近稳定的。

证明： 令

$$q(x)=\frac{1}{2}\left[-\frac{\partial V}{\partial x}f+\sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}f\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}g\right)^4}\right]$$

⊖ 引理 9.7 给出的增益裕量是最优镇定控制的一个特性，该控制是使形如 $\int_0^\infty[q(x)+r(x)u^2]dt$ 的目标泛函达到最小，其中 $r(x)>0$，$q(x)$ 是半正定的。可以讨论式(9.35)给出的镇定方案的逆最优属性，即求 $q(x)$ 和 $r(x)$，使得控制式(9.35)是 $\int_0^\infty[q(x)+r(x)u^2]dt$ 达到最小的最优控制。关于最优和逆最优控制的进一步讨论参见文献[121]。

由于 $V(x)$ 是正定的，它在 $x=0$ 有最小值，这就导致了 $\left[\frac{\partial V}{\partial x}\right](0)=0$，因此 $q(0)=0$。对 $x\neq 0$，如果 $\left[\frac{\partial V}{\partial x}\right]g\neq 0$，则 $q(x)>0$；如果 $\left[\frac{\partial V}{\partial x}\right]g=0$，则 $q=-\left[\frac{\partial V}{\partial x}\right]f>0$。因此 $q(x)$ 是正定的。利用 V 作为系统 $\dot{x}=f(x)+g(x)k\phi(x)$ 的一个备选 Lyapunov 函数，则有

$$\dot{V}=\frac{\partial V}{\partial x}f+\frac{\partial V}{\partial x}gk\phi$$

对 $x\neq 0$，如果 $\left[\frac{\partial V}{\partial x}\right]g=0$，则 $\dot{V}=\left[\frac{\partial V}{\partial x}\right]f<0$。如果 $\left[\frac{\partial V}{\partial x}\right]g\neq 0$，则有

$$\dot{V}=-q+q+\frac{\partial V}{\partial x}f+\frac{\partial V}{\partial x}gk\phi$$

注意：

$$q+\frac{\partial V}{\partial x}f+\frac{\partial V}{\partial x}gk\phi=-\left(k-\frac{1}{2}\right)\left[\frac{\partial V}{\partial x}f+\sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}f\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}g\right)^4}\right]\leqslant 0$$

因此，对所有的 $x\neq 0$，$\dot{V}(x)<0$，证明完成。 □ 226

例 9.18 在例 9.17 中，对于系统 $\dot{x}=x-x^3+u$，我们用反馈线性化控制 $u=\chi(x)=-x+x^3-\alpha x$ 与控制 Lyapunov 函数及由公式(9.35)得到的反馈控制 $u=\phi(x)=-x+x^3-x\sqrt{(1-x^2)^2+1}$ 进行比较。根据引理 9.7，当 $k\geqslant\frac{1}{2}$ 时，闭环系统 $\dot{x}=x-x^3+k\phi(x)$ 的原点总是全局渐近稳定的。现在研究系统 $\dot{x}=x-x^3+k\chi(x)$ 的增益裕量。只要考虑的是局部镇定，系统就有增益裕量 $\left(\frac{1}{1+\alpha},\ \infty\right)$，因为在原点的线性化产生的系统是 $\dot{x}=-[k(1+\alpha)-1]x$。但是，原点关于任何 $k>1$ 不是全局渐近稳定的，因为系统当 $k>1$ 时，具有三个平衡点：0 和 $\pm\sqrt{1+\frac{k\alpha}{k-1}}$。当 $k\to\infty$ 时，吸引域 $\left\{-\sqrt{1+\frac{k\alpha}{k-1}}<x<\sqrt{1+\frac{k\alpha}{k-1}}\right\}$ 缩小至 $\{-\sqrt{1+\alpha}<x<\sqrt{1+\alpha}\}$。 ◀

9.8 练习

9.1 对下列系统，分别设计一个全局镇定状态反馈。

(1) $\dot{x}_1=x_1^2+x_2$，$\dot{x}_2=u$

(2) $\dot{x}_1=x_2$，$\dot{x}_2=-x_1^3+\text{sat}(u)$

(3) $\dot{x}_1=x_1x_2$，$\dot{x}_2=u$

(4) $\dot{x}_1=-x_1+\tanh(x_2)$，$\dot{x}_2=x_2+x_3$，$\dot{x}_3=u$

(5) $\dot{x}_1=-x_1+x_1x_3$，$\dot{x}_2=x_3$，$\dot{x}_3=x_1^2+u$

(6) $\dot{x}_1=x_1^3+x_2$，$\dot{x}_2=x_1x_3+u$，$\dot{x}_3=x_1x_2-x_3$

9.2 对下列系统，分别设计一个线性的全局镇定状态反馈。

(1) $\dot{x}_1=x_2$，$\dot{x}_2=x_1+x_2-x_1^3+u$

(2) $\dot{x}_1=\sin x_1+x_2$，$\dot{x}_2=u$

(3) $\dot{x}_1=-x_1^3+x_2^2$，$\dot{x}_2=u$

(4) $\dot{x}_1=x_2$，$\dot{x}_2=-x_2|x_2|+u$

(5) $\dot{x}_1=x_2$，$\dot{x}_2=\sin x_1+u$

9.3 根据要求，分别对下列系统设计状态反馈来全局镇定原点。

(1) 用反馈线性化方法设计控制器。

227

(2) 用反步法设计控制器。

(3) 用仿真比较这两个控制器的性能。

1) $\dot{x}_1=x_1+\dfrac{x_2}{1+x_1^2}$，$\dot{x}_2=-x_2+u$

2) $\dot{x}_1=\sin x_1+x_2$，$\dot{x}_2=u$

3) $\dot{x}_1=x_2+1+(1-x_1)^3$，$\dot{x}_2=-x_1+u$

9.4 考虑车载倒立摆，式(A.41)～(A.44)，需要在 $\theta=0$ 镇定倒立摆和在 $y=0$ 镇定小车。

(1) 证明通过开环控制不能实现要求的控制目标。

(2) 用线性化方法设计一个镇定状态反馈控制器。

(3) 利用式(A.45)给出的数据进行仿真，给出：

1) 倒立摆被镇定的 $x_1(0)$ 范围，其中 $x(0)=\mathrm{col}(x_1(0), 0, 0, 0)$。

2) 当 m 和 J 存在±30%干扰时产生的影响。

9.5 考虑倒立摆(A.47)，要求在 $\theta=0$ 时利用状态反馈镇定该倒立摆。

(1) 用线性化方法设计一个镇定控制器。

(2) 用反馈线性化设计一个镇定控制器且确定它的有效域。

(3) 对这两个控制器，取 $a=1$ 和 $x_2(0)=0$，用仿真方法寻找当倒立摆被镇定且对所有的 t，有 $|x_1(t)|\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ 的初始值 $x_1(0)$ 的范围。

(4) 比较这两个控制器的性能。

9.6 考虑具有控制的 van der Pol 方程式(A.13)。用下列方法设计它的全局镇定状态反馈。

(1) 反馈线性化。

(2) 反步法。

(3) 反馈无源性和基于无源化的控制。

(4) 将(2)得到的 Lyapunov 函数作为控制 Lyapunov 函数，设计一个全局镇定状态反馈控制器。

9.7 考虑生化反应器，式(A.19)，其中，$v(x_2)$ 由式(A.20)给出。

(1) 用局部反馈线性化设计一个状态反馈控制器，使得 $\dot{x}_2=-\lambda(x_2-1)$，$\lambda>0$。确定控制器的有效域。

228

(2) 证明(1)给出的控制能镇定平衡点($x_1=1$，$x_2=1$)并估计其吸引域。

9.8 考虑磁悬浮系统，式(A.30)～(A.32)，其中 $b=0$，$c=1$，$\alpha=1.5$，$\beta=2$，要求在 $x_1=1$ 处镇定小球。

(1) 寻找保持平衡在 $x_1=1$ 处的稳态输入 u_{ss}，且证明在开环控制 $u=u_{ss}$ 下平衡点是不稳定的。

在这个练习的其余部分，要求设计三个不同的状态反馈控制器。给平衡点分量 $x_1(0)$ 一个小干扰，其他分量还取它们的平衡值，求小球被镇定在 $x_1=1$ 处的 $x_1(0)$ 取值范围。并在每种情况下用仿真选择控制器参数，使得系统调整时间小于 20 时间单位。

(2) 用线性化方法设计一个控制器。

(3) 将状态方程转化为控制器型并确定变换的有效域。

(4) 用反馈线性化设计一个控制器。

(5) 用反步法对控制器型设计一个控制器。

(6) 取 $x(0)=\mathrm{col}(2, 0, 1.5)$，对比这三个控制器性能。

9.9 考虑微静电执行器式(A.33)，要求在 $x_1=r<1$ 处镇定平板。

(1) 研究常数输入 $u=\bar{u}<1$ 时的系统平衡点，如果系统没有反馈控制，确定关于 r 的范围及其吸引域。

在这个练习的其余部分，令 $r=0.5$，$\zeta=0.1$，$T=0.2$，要求设计四种不同的状态反馈控制器。设 $x(0)=\mathrm{col}(0.1, 0, \sqrt{0.3})$，在每个情况下用仿真选择控制器参数，使得 $|u(t)|\leqslant 2$。采用所选择的参数，令 $x(0)=\mathrm{col}(\alpha, 0, \sqrt{3\alpha})$，允许控制不受限制，寻找 α 的变化范围，使得 $x(0)$ 仍然属于吸引域。

(2) 用线性化设计一个控制器。

(3) 将状态方程转化为控制器型并确定变换的有效域。

(4) 用反馈线性化方法设计一个控制器。

(5) 从控制器型出发，用反步法设计一个控制器。 229

(6) 用局部反馈线性化将 $\dot{x}_3$-方程转化为 $\dot{x}_3=v$，然后将期望平衡点移动到原点，证明系统可以具有式(9.23)～(9.25)给出的形式，且满足定理9.2的条件。

(7) 用基于无源性控制设计一个控制器。

(8) 比较四个控制器性能。

9.10 考虑升压变换器式(A.16)。

(1) 证明，如果 $u=0$，开环系统是线性的且原点是渐近稳定的。

(2) 基于无源性设计一个状态反馈控制器，使得原点是全局渐近稳定的，其中 $0<\mu=u+1-\dfrac{1}{k}<1$，且闭环系统的阻尼比开环系统大。

(3) 取 $\alpha=0.1$，$k=2$，$x_1(0)=-\dfrac{0.7}{4}$ 和 $x_2(0)=-\dfrac{1}{2}$，对开环和闭环系统进行仿真。

9.11 考虑直流电动机，式(A.25)，其中 $\delta=0$，$f_l(x_3)=bx_3$，$b>0$。设计一个状态反馈控制将直流电动机的速度镇定在 ω^*。

(1) 将方程(A.25)转化为如例8.6描述的标准型。

(2) 用部分反馈线性化将标准型的外在部分变为 $\dot{\xi}_1=\xi_2$，$\dot{\xi}_2=v$ 并确定它的有效域。

(3) 寻找 $\omega=\omega^*$ 时的平衡点。

(4) 设计一个关于 v 的状态反馈来镇定平衡点，并给出在什么条件下控制器有效。

9.12 考虑由式(A.36)和式(A.37)定义的两个关节的机械臂，其数据由(A.38)给出。要求在控制约束 $|u_1|\leqslant 6\,000$ 和 $|u_2|\leqslant 5\,000$ 下，将机械臂调节到 $q_r=\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$。

(1) 应用例9.15给出的基于无源性控制器，用仿真方法选择控制器参数，从而满足控制约束。

(2) 设计一个基于例8.7的反馈线性化控制器。用仿真方法选择控制器参数，从而满足控制约束。

(3) 在(A.38)的额定参数和(A.39)的扰动参数下，比较这两个控制器性能。

9.13 考虑TORA系统式(A.49)～(A.52)。证明原点可以用 $u=-\phi_1(x_1)-\phi_2(x_2)$ 全局镇定，其中，ϕ_1 和 ϕ_2 是局部Lipschitz函数，且满足 $\phi_i(0)=0$，并对所有的 $y\neq 0$，$y\phi_i(y)>0$。提示：参考练习5.10。 230

第10章 状态反馈鲁棒镇定

第9章给出了几种镇定设计，可能除了基于无源性控制的设计之外，都需要系统具有的精确模型。闭环系统的扰动分析是用来确定为了保持渐近稳定性可容许的模型不确定性程度的。然而，模型不确定性的程度难以预估。若不确定项的上界已知，本章的鲁棒镇定方法可以使满足匹配条件的、具有“大”而不确定项的系统继续保持镇定。这里所谓的匹配条件是指不确定项和控制在同一个输入接口进入状态方程，这个假定使得控制输入能够支配不确定造成的影响。

本章将给出三种鲁棒镇定的方案。10.1节介绍滑模控制，先设计一个不依赖于系统模型不确定项的滑模流形，并使得处于流形上的轨线能收敛到平衡点；然后，设计控制器使得系统所有的轨线能在有限的时间内到达滑模流形，并在之后一直保持在该流形上。这种控制器的设计仅用到不确定项的上界。10.2节讨论利用Lyapunov稳定性理论的再设计方法。首先为一个不含有不确定性的标称系统设计一个镇定控制。然后，利用标称系统闭环后得到的Lyapunov函数再设计一个补偿器去鲁棒控制匹配不确定项。无论是滑模控制还是Lyapunov再设计都产生了不连续的反馈控制器，这给理论和实际应用带来挑战。在理论方面，闭环系统的方程右边将不再是局部Lipschitz的，而局部Lipschitz条件是本书的一个基本假设。在应用方面，这种不连续的控制呈现一种“抖振”特征。因此，在10.1节和10.2节中，我们对不连续控制器都做了的连续化的近似。10.3节阐述了如何通过高增益反馈实现鲁棒镇定。

如果在平衡点处也存在不确定项的影响，局部Lipschitz的反馈控制就不能镇定该平衡

231

点，但可以驱使轨线任意接近平衡点。这就是实用稳定性，考虑下述系统：

$$\dot{x} = f(x,u) + \delta(t,x,u)$$

其中，$f(0,\ 0)=0$，而$\delta(t,\ 0,\ 0)\neq 0$。对于一个局部Lipschitz反馈控制$u=\phi(x)$，其中$\phi(0)=0$，原点$x=0$不是闭环系统$\dot{x}=f(x,\ \phi(x))+\delta(t,\ x,\ \phi(x))$的平衡点。

定义10.1 若对任意$b>0$，存在反馈控制$u=\phi(x)$，使得系统的解终极有界，即存在$T>0$，使下式成立

$$\|x(t)\| \leqslant b, \quad \forall\, t \geqslant T$$

则称系统$\dot{x}=f(x,\ u)+\delta(t,\ x,\ u)$为实用可镇定的。

特别地，控制器$u=\phi(x)$可能依赖于某个参数，终极边界b就会与这个参数有关。在9.1节，根据初始值的区域定义了四种镇定性的概念。对于实用镇定性，可定义类似的概念，如局部的、区域的、全局的或者半全局的实用镇定性。例如，如果系统可以通过反馈控制$u=\phi(x)$获得半全局实用稳定性，那么对于任意给定紧集G和任意$b>0$，$\phi(x)$可以保证对于所有位于G内的初始状态，轨线有终极上界b。

10.1 滑模控制

先讨论一个具有启发性的例子，然后再讨论一般的n维多输入系统。

例 10.1 考虑二阶的单输入系统

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = h(x) + g(x)u$$

其中，h 和 g 是未知的局部 Lipschitz 函数，且对于所有 x，$g(x) \geqslant g_0 > 0$。我们想要设计一个状态反馈控制律来镇定原点。假设可设计一个控制律，使系统的运动限制在流形(或曲面)$s = ax_1 + x_2 = 0$ 上，在此流形上，系统的运动受 $\dot{x}_1 = -ax_1$ 的控制。选择 $a > 0$，以保证当 t 趋向于无穷时 $x(t)$ 趋近于 0，且收敛速度可以通过选取 a 的值来控制。显然，在流形 $s = 0$ 上的轨线与 h 和 g 无关。问题是怎样才能使系统轨线到达流形并且保持在其上呢？

变量 s 满足方程

$$\dot{s} = a\dot{x}_1 + \dot{x}_2 = ax_2 + h(x) + g(x)u$$

假设 h 和 g 满足不等式

$$\left| \frac{ax_2 + h(x)}{g(x)} \right| \leqslant \varrho(x), \quad \forall x \in R^2$$

232

其中，$\varrho(x)$ 为一个已知函数。将 $V = \frac{1}{2}s^2$ 作为 $\dot{s} = ax_2 + h(x) + g(x)u$ 的备选 Lyapunov 函数，那么

$$\dot{V} = s\dot{s} = s[ax_2 + h(x)] + g(x)su \leqslant g(x)|s|\varrho(x) + g(x)su$$

选择 u，使得当 $|s| \neq 0$ 时，$g(x)su$ 为负并能控制住正项 $g(x)|s|\varrho(x)$。此外，还希望用负项驱使 $|s|$ 在有限的时间内到达零点。选取

$$u = -\beta(x)\text{sgn}(s)$$

其中，符号函数 sgn(•)定义为

$$\text{sgn}(s) = \begin{cases} 1, & s > 0 \\ -1, & s < 0 \end{cases}$$

且 $\beta(x) \geqslant \varrho(x) + \beta_0$，$\beta_0 > 0$。当 $|s| \neq 0$ 时，有

$$\dot{V} \leqslant g(x)|s|\varrho(x) - g(x)[\varrho(x) + \beta_0]s\text{sgn}(s) = -g(x)\beta_0|s| \leqslant -g_0\beta_0|s|$$

因此，$W = \sqrt{2V} = |s|$ 满足微分不等式 $\dot{W} \leqslant -g_0\beta_0$，两边积分，可得

$$|s(t)| \leqslant |s(0)| - g_0\beta_0 t$$

轨线在有限的时间内可到达流形 $s = 0$，且由不等式 $\dot{V} \leqslant -g_0\beta_0|s|$ 可以看出，轨线一旦到达流形就不再离开。总之，系统运动由两个阶段组成。第一段称为*到达阶段*，轨线由流形 $s = 0$ 外的初始值向这个流形移动并在有限的时间内到达流形；第二段称为*滑动阶段*，系统的轨线保持在流形 $s = 0$ 上，此时系统的动态可由降阶模型 $\dot{x}_1 = -ax_1$ 表示。图 10.1 所示为其相图。流形 $s = 0$ 称为滑模流形，控制律 $u = -\beta(x)\text{sgn}(s)$ 称为滑模控制。滑模控制的显著特点是其对 h 和 g 的鲁棒性。我们仅需知道上界 $\varrho(x)$，而且在滑动阶段，系统运动和 h 及 g 完全无关。

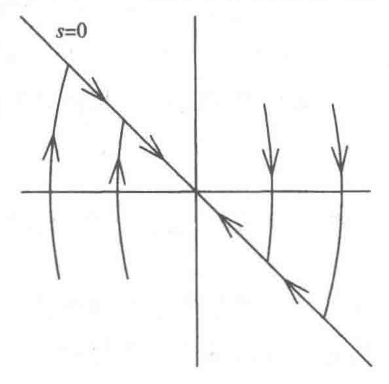


图 10.1 滑动控制模型的典型相位图

要想运动保持在流形 $s = 0$ 上，控制器需要具有无限大的切换频率。这种具有无限切换频率的振荡的平均产生了轨线维持在流形 $\dot{s} = 0$ 上的效果。为了阐述这一现象，我们考虑方程式(A.1)表述的单摆：

$$\ddot{\theta} + \sin\theta + b\dot{\theta} = cu$$

假设不确定参数 b、c 满足不等式 $0 \leqslant b \leqslant 0.2$，$0.5 \leqslant c \leqslant 2$。

我们想把单摆稳定在 $\theta=\frac{\pi}{2}$处。令 $x_1=\theta-\frac{\pi}{2}$，$x_2=\dot{\theta}$，可得状态模型

233

$$\dot{x}_1=x_2,\quad \dot{x}_2=-\cos x_1-bx_2+cu$$

取 $s=x_1+x_2$，有

$$\dot{s}=x_2-\cos x_1-bx_2+cu$$

由不等式

$$\left|\frac{x_2-\cos x_1-bx_2}{c}\right|=\left|\frac{(1-b)x_2-\cos x_1}{c}\right|\leqslant 2(|x_2|+1)$$

取控制律为

$$u=-(2.5+2|x_2|)\mathrm{sgn}(s)$$

其中，取 $b=0.01$，$c=0.5$，$\theta(0)=\dot{\theta}(0)=0$，图 10.2 为闭环系统的模拟图。大约在 $t=0.7$ 时，轨迹到达流形 $s=0$，由此，控制开始高频振荡[⊖]。将 u 通过$\frac{1}{0.1s+1}$低通滤波器，滤波后的 u 使得 $\dot{s}$ 等式的右边也满足 $s\equiv 0$。

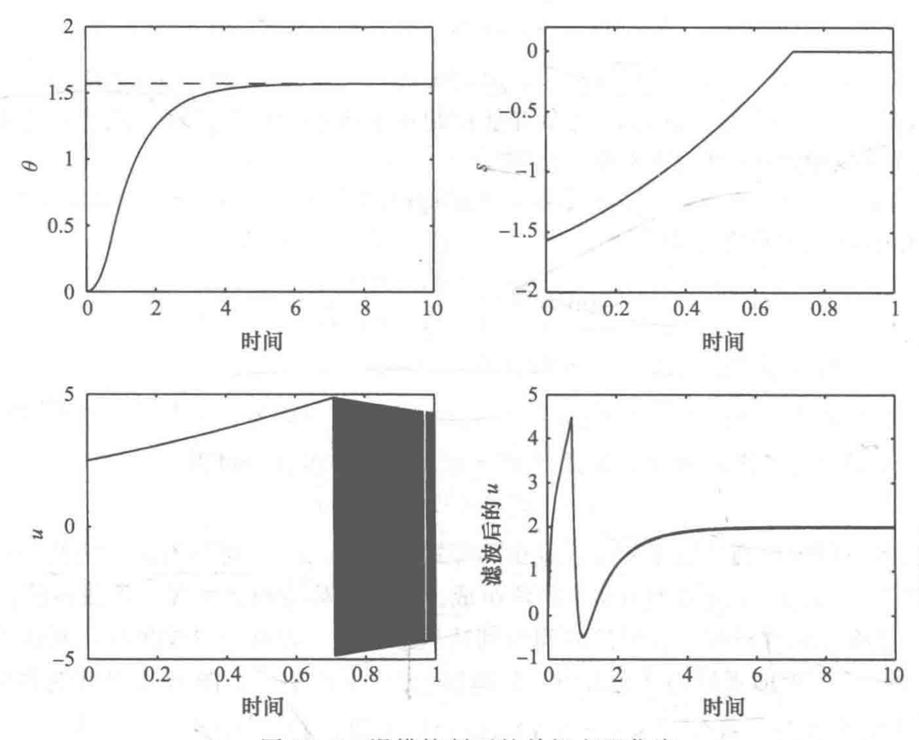


图 10.2 滑模控制下的单摆方程仿真

如果在研究的区域内，h 和 g 满足不等式

$$\left|\frac{ax_2+h(x)}{g(x)}\right|\leqslant k_1$$

其中，常数 k_1 已知，则滑模控制器可以取得更简单些，例如可以取成：

$$u=-k\mathrm{sgn}(s),\quad k>k_1$$

这是一种简单的继电器形式。然而，这种形式常会导致有限的吸引域，此吸引域可用下面的方法进行估计：在集合$\{|s|\leqslant c\}$中，条件 $s\dot{s}\leqslant 0$ 使集合为正不变集。由方程

234

⊖ 事实上，在数字仿真中不可能实现无限频率振荡。

$$\dot{x}_1 = x_2 = -ax_1 + s$$

和函数 $v_0 = \frac{1}{2}x_1^2$，可得到

$$\dot{V}_0 = x_1\dot{x}_1 = -ax_1^2 + x_1 s \leqslant -ax_1^2 + |x_1|c \leqslant 0, \quad \forall |x_1| \geqslant \frac{c}{a}$$

因此，若对于任意 $x\in\Omega$，$\frac{|ax_2+h(x)|}{g(x)}\leqslant k_1$，则集合 $\Omega=\left\{|x_1|\leqslant\frac{c}{a}, |s|\leqslant c\right\}$ 为正不变集，如图 10.3所示。且每条始于 Ω 的轨线都随 t 趋近于无穷而趋近原点。通过选择足够大的 c，可使平面上的任一紧集都成为 Ω 的子集。因此，如果 k 选成任意大，则上述控制律可达到半全局稳定。

在理想状态下，滑模控制要求控制输入是高频(理想状态下无限大频率)振荡控制。显然，许多的物理装置都不能达到这种要求。例如，如果输入是力或者转矩，通常需要由电动电动机来驱动，振荡器的最大频率就会受到执行机构带宽的限制。另一个与理想状况的偏差来自于切换装置不够完美，存在延迟和未建模高频模态。轨迹并不会理想地维持在滑动面上。相反，它会在切换面附近来回振荡，这种现象称为抖振。图 10.4 显示了延迟如何引起抖振，描述的是一条轨线从 $s>0$ 区域滑向流形 $s=0$ 的过程。它第一次与流形相交是在点 b。在理想滑模控制中，轨线将从 b 点开始沿着流形滑动。实际上，s 符号的变化时刻和控制的切换时刻存在一个延迟，在延迟期间，轨线穿过流形进入 $s<0$ 区域。延迟过后，控制切换，轨线反向朝流形滑动，再次穿过流形，如此反复，产生了如图 10.4 所示的锯齿形的运动(抖振)。抖振导致控制精度降低，使得电路产生高热和机械部件的磨损，还可能激励未建模的高频动态部分产生响应，从而降低系统性能。图 10.5 中虚线显示了前面设计的单摆滑模控制的效果，实线表示切换受未建模动态$\left(传递函数为\frac{1}{(0.01s+1)^2}\right)$的影响而导致延迟。

235

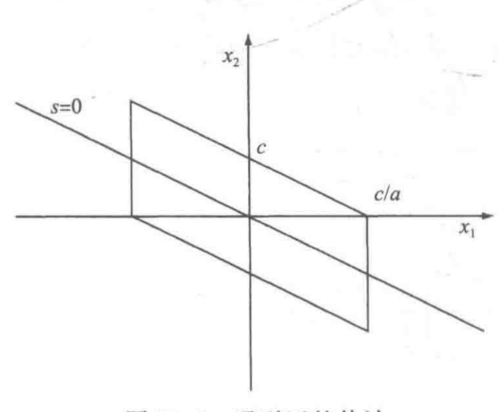


图 10.3　吸引区的估计

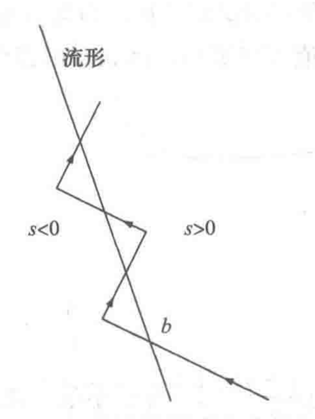


图 10.4　延迟控制开关的抖振

通过将控制分为连续控制和切换控制两部分，并减小切换部分的幅度，就可以减小抖振。设 $\hat{h}(x)$ 和 $\hat{g}(x)$ 分别为 $h(x)$ 和 $g(x)$ 的标称模型，取

$$u = -\frac{ax_2 + \hat{h}(x)}{\hat{g}(x)} + v$$

可得

$$\dot{s} = a\left[\frac{1-g(x)}{\hat{g}(x)}\right]x_2 + h(x) - \left[\frac{g(x)}{\hat{g}(x)}\right]\hat{h}(x) + g(x)v \overset{\text{def}}{=} \delta(x) + g(x)v$$

236

如果扰动项 $\delta(x)$ 满足不等式 $\left|\frac{\delta(x)}{g(x)}\right|\leqslant\varrho(x)$，则取

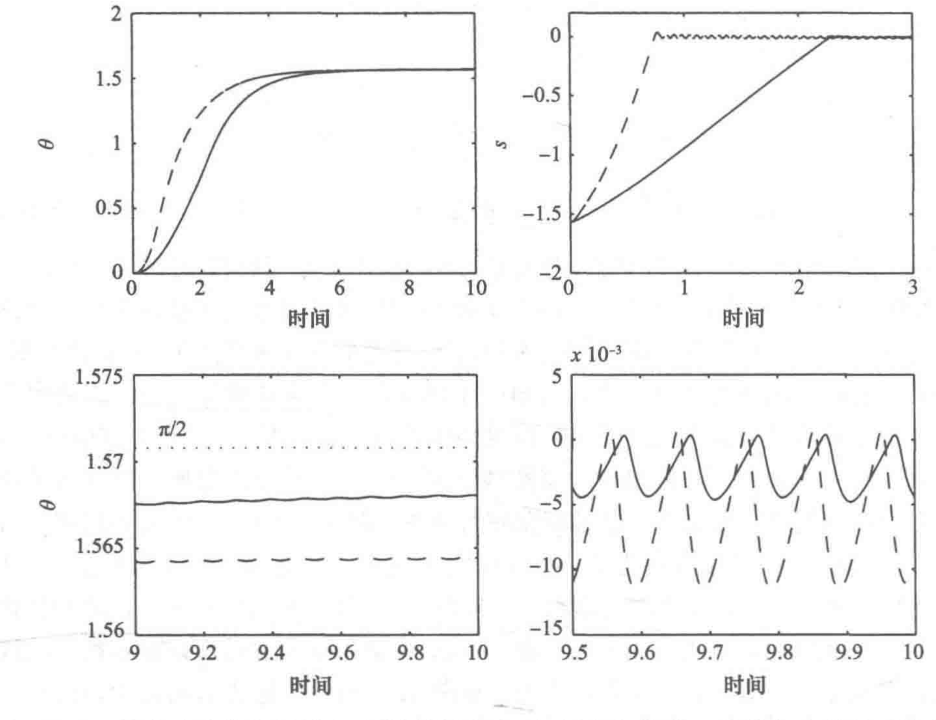


图 10.5 具有未建模执行器件的滑模控制下的单摆方程仿真，虚线是由符号函数幅值取$(2.5+2|x_2|)$时得到的，实线是取$(1+0.8|x_2|)$时得到的

$$v = -\beta(x)\operatorname{sgn}(s)$$

其中，$\beta(x) \geqslant \varrho(x)+\beta_0$。因为 ϱ 为扰动项的上界，它可能比整个函数的上界小。因此，切换部分的幅值可以更小。例如，回到单摆方程，$\hat{b}=0$、$\hat{c}$分别为 b 和 c 的标称值，取控制律为

$$u = \frac{-x_2 + \cos x_1}{\hat{c}} + v$$

可得

237

$$\dot{s} = \delta + cv$$

其中，

$$\frac{\delta}{c} = \left(\frac{1-b}{c} - \frac{1}{\hat{c}}\right)x_2 - \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{\hat{c}}\right)\cos x_1$$

为了使$\left|\frac{1-b}{c} - \frac{1}{\hat{c}}\right|$有最小值，取$\hat{c}=\frac{1}{1.2}$，则

$$\left|\frac{\delta}{c}\right| \leqslant 0.8|x_2| + 0.8$$

控制律可取为

$$u = 1.2\cos x_1 - 1.2x_2 - (1+0.8|x_2|)\operatorname{sgn}(s)$$

图 10.5 中实线部分显示了在未建模动态$\frac{1}{(0.01s+1)^2}$控制下的输出。比较实线部分和虚线部分得出，将切换项 s 的幅值减小一半，误差$\left|\theta-\frac{\pi}{2}\right|$也减小了一半。可是减小切换部分的幅值会增加到达滑模面的时间。

避免无限大频率振荡的另一个想法是用高斜率的饱和函数来替代符号函数，即将控制

律取为

$$u=-\beta(x)\operatorname{sat}\left(\frac{s}{\mu}\right)$$

其中，μ 是一个正常数，sat(•)是饱和函数，它的定义是：

$$\operatorname{sat}(y)=\begin{cases}y, & |y|\leqslant 1\\ \operatorname{sgn}(y), & |y|>1\end{cases}$$

图 10.6 给出了符号函数和饱和函数的图像。$\operatorname{sat}\left(\frac{s}{\mu}\right)$的线性部分斜率为$\frac{1}{\mu}$，要较好地逼近符号函数，需较小的 μ。在极限情况下，当 $\mu\to 0$ 时，$\operatorname{sat}\left(\frac{s}{\mu}\right)$收敛到 $\operatorname{sgn}(s)$。为了分析连续型滑模控制器的性能，采用函数 $V=\frac{1}{2}s^2$ 来检验到达阶段，当$|s|\geqslant\mu$ 时，即在$\{|s|\leqslant\mu\}$的范围外，V 的导数满足不等式 $\dot{V}\leqslant-g_0\beta_0|s|$。因此当$|s(0)|>\mu$ 时，$|s(t)|$严格递减，它在有限的时间内到达集合$\{|s|\leqslant\mu\}$并保持在其内。在边界层内有

$$\dot{x}_1=-ax_1+s$$

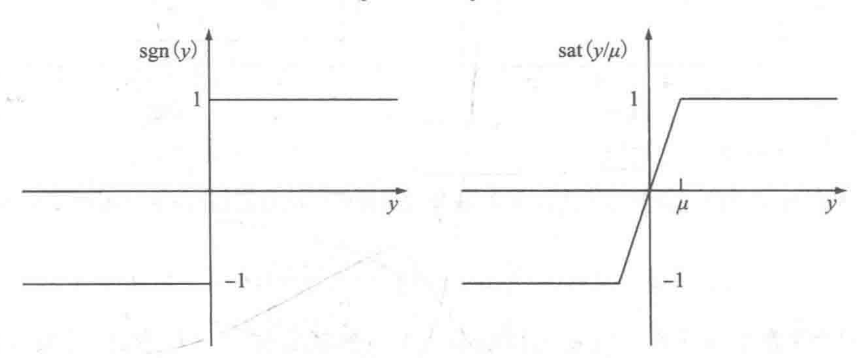


图 10.6　符号非线性函数及其饱和函数逼近

其中，$|s|\leqslant\mu$。$V_0=\frac{1}{2}x_1^2$ 的导数满足

$$\dot{V}_0=-ax_1^2+x_1s\leqslant-ax_1^2+|x_1|\mu\leqslant-(1-\theta_1)ax_1^2,\quad\forall\ |x_1|\geqslant\frac{\mu}{a\theta_1}$$

238

其中，$0<\theta_1<1$。因此在有限的时间内，轨线达到集合 $\Omega_\mu=\left\{|x_1|\leqslant\frac{\mu}{a\theta_1},\ |s|\leqslant\mu\right\}$。通常在实际系统中，并不需要将轨线稳定到原点，只要取得实用稳定就可以了，因为通过减小 μ，轨线的终极边界可以任意小。为了提高精度，μ 应该尽量小，但由于存在延迟或有高速的未建模动态，μ 值太小将会引起抖振。图 10.7 给出了下列连续型滑模控制器下的单摆方程的性能

$$u=-(2.5+2|x_2|)\operatorname{sat}\left(\frac{s}{\mu}\right)$$

其中，μ 取了两个不同的值。假设非执行机构是系统的未建模部分，执行机构的传递函数为$\frac{1}{(0.01s+1)^2}$。在不考虑执行机构的情况下，减小 μ 值，确实能使s接近于 0，并使得误差$\left|\theta-\frac{\pi}{2}\right|$减小。然而，在考虑了执行机构后，$\mu$ 值过小会引起 s 的抖振。

有一种特殊情况，当 $h(0)=0$ 时，我们不用取很小的 μ 值就可以使原点稳定。在这种情况下，边界层内的系统可用以下方程表示

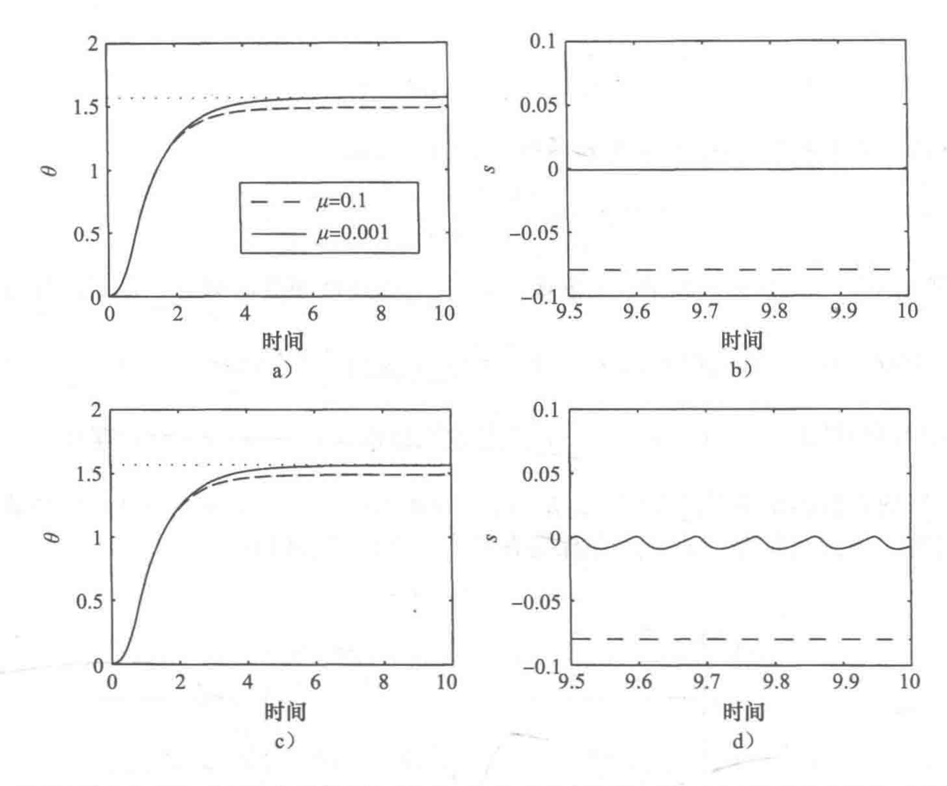


图 10.7 连续滑模控制驱动下的单摆仿真(a 和 b 未考虑未建模的执行机构)(c 和 d 考虑了未建模执行机构)

$$\dot{x}_1 = x_2,\quad \dot{x}_2 = h(x) - \left[\frac{g(x)\beta(x)}{\mu}\right](ax_1 + x_2)$$

其在原点有一个平衡点。我们只需要选择足够小的 μ 来稳定原点，并使 Ω_μ 是吸引域的一个子集。为了阐释这一点，考虑将单摆稳定到 $\theta=\pi$ 处。取 $x_1=\theta-\pi$，$x_2=\dot{\theta}$ 和 $s=x_1+x_2$，得到

$$\dot{s} = x_2 + \sin x_1 - bx_2 + cu$$

再次假设 $0\leqslant b\leqslant 0.2$，$0.5\leqslant c\leqslant 2$，可以得到

239

$$\left|\frac{(1-b)x_2 + \sin x_1}{c}\right| \leqslant 2(|x_1| + |x_2|)$$

因此，控制律取为

$$u = -2(|x_1| + |x_2| + 1)\,\mathrm{sat}\left(\frac{s}{\mu}\right)$$

在边界层内$\{|s|\leqslant\mu\}$，系统为

$$\dot{x}_1 = -x_1 + s,\quad \dot{s} = (1-b)x_2 + \sin x_1 - 2c(|x_1| + |x_2| + 1)\frac{s}{\mu}$$

其在原点处有一个平衡点。备选 Lyapunov 函数为 $V_1=\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{2}s^2$，其导数为

$$\dot{V}_1 = -x_1^2 + x_1 s + (1-b)(s-x_1)s + s\sin x_1 - 2c(|x_1| + |x_2| + 1)\frac{s^2}{\mu}$$

240

$$\leqslant -x_1^2 + 3|x_1||s| - \left(\frac{1}{\mu-1}\right)s^2 = -\begin{bmatrix}|x_1|\\|s|\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}1 & -\frac{3}{2}\\ -\frac{3}{2} & \left(\frac{1}{\mu-1}\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}|x_1|\\|s|\end{bmatrix}$$

选取 $\mu<\frac{4}{13}=0.308$，使得 $\dot{V}_1$ 负定，因此，原点渐近稳定。◀

现在考虑系统

$$\dot{x}=f(x)+B(x)[G(x)u+\delta(t,x,u)] \tag{10.1}$$

其中，$x\in R^n$ 为系统状态，$u\in R^m$ 为控制输入，f、B 和 G 是在包含原点的区域 $D\subset R^n$ 上的充分光滑函数，$G(x)$是正定对称矩阵，假设对任意 $x\in D$，$G(x)$的最小特征值满足 $\lambda_{\min}(G(x))\geqslant\lambda_0>0$。函数 δ 对于 t 是分段连续函数，在$(t,\ x,\ u)\in[0,\ \infty)\times D\times R^m$ 时，对$(x,\ u)$充分光滑。假设 f 和 B 已知，G 和 δ 是不确定的。设 $f(0)=0$，当 δ 不存在时，原点是开环系统的一个平衡点。我们的目标是在 G 和 δ 存在不确定因素时，设计一个状态反馈控制来镇定原点。

设 T：$D\rightarrow R^n$ 是一个微分同胚映射，使得

$$\frac{\partial T}{\partial x}B(x)=\begin{bmatrix}0\\I\end{bmatrix} \tag{10.2}$$

其中，I 是 $m\times m$ 的单位矩阵[⊖]。做变量代换

$$\begin{bmatrix}\eta\\\xi\end{bmatrix}=T(x),\quad 其中\ \eta\in R^{n-m},\quad \xi\in R^m \tag{10.3}$$

则系统变换成

$$\dot{\eta}=f_a(\eta,\xi),\quad \dot{\xi}=f_b(\eta,\xi)+G(x)u+\delta(t,x,u) \tag{10.4}$$

方程(10.4)通常称为**正规型**。为了设计滑模控制器，首先设计滑动流形 $s=\xi-\phi(\eta)=0$，当把系统运动限制在这个流形上时，要求降阶系统

$$\dot{\eta}=f_a(\eta,\phi(\eta)) \tag{10.5}$$

的原点是渐近稳定平衡点。上式中把 ξ 看成是控制输入，那么 $\phi(\eta)$的设计可以归结为求解系统 $\dot{\eta}=f_a(\eta,\ \xi)$的状态反馈镇定问题。假定可以找到一个能使系统稳定的充分光滑函数 $\phi(\eta)$，其中 $\phi(0)=0$。然后，设计 u，使其在有限时间内驱动 s 到 0，之后保持在滑模流形上。为此，写出 $\dot{s}$ 的方程

$$\dot{s}=f_b(\eta,\xi)-\frac{\partial\phi}{\partial\eta}f_a(\eta,\xi)+G(x)u+\delta(t,x,u) \tag{10.6}$$

241

如同在例 10.1 看到的，可以把 u 设计为纯切换控制，也可以设计成包含一个附加连续部分的切换控制。设 $\hat{G}(x)$ 是 $G(x)$ 的标称模型，u 的连续部分可以设计成 $-\hat{G}^{-1}\left[f_b-\left(\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right)f_a\right]$。若无不确定项，即 $\delta=0$ 且$\hat{G}$[⊜]已知，取 $u=-\hat{G}^{-1}$[⊜] $\left[f_b-\left(\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right)f_a\right]$可使得 $\dot{s}=0$，这意味着 $s=0$ 是不变流形。将控制 u 设计成

$$u=\psi(\eta,\xi)+v \tag{10.7}$$

其中，ψ 的典型选取值为 $\psi=0$ 和 $\psi=-\hat{G}^{-1}\left[f_b-\left(\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right)f_a\right]$。当然 ψ 也可以取其他形式，例如用它来消去方程式(10.6)右端已知的某些部分而不是全部。将式(10.7)代入式(10.6)得到

$$\dot{s}=G(x)v+\Delta(t,x,v) \tag{10.8}$$

其中

⊖ 如果 $B(x)$是满秩的且其列向量的空间是对合的，则 Frobenius 定理[66]保证了在 D 中每一点的邻域内局部存在 $T(x)$。如果 B 满秩且不依赖于 x，则 $T(x)$全局存在并具有形式 $T(x)=Lx$，其中，L 满足 $LB=\mathrm{col}(0,\ I)$。

⊜ 原文为 G。——译者注

⊜ 原文为 G^{-1}。——编者注

$$\Delta(t,x,v) = f_b(\eta,\xi) - \frac{\partial\phi}{\partial\eta}f_a(\eta,\xi) + G(x)\psi(\eta,\xi) + \delta(t,x,\psi(\eta,\xi)+v)$$

假设存在局部 Lipschitz 函数 $\varrho(x)\geqslant 0$ 和常数 κ_0，$0\leqslant\kappa_0<1$，使得

$$\left\|\frac{\Delta(t,x,v)}{\lambda_{\min}(G(x))}\right\|\leqslant \varrho(x)+\kappa_0\|v\|,\quad \forall(t,x,v)\in[0,\infty)\times D\times R^m \tag{10.9}$$

对于式(10.8)，取 $V=\frac{1}{2}s^{\mathrm{T}}s$ 为备选 Lyapunov 函数，则有

$$\dot{V}=s^{\mathrm{T}}\dot{s}=s^{\mathrm{T}}G(x)u+s^{\mathrm{T}}\Delta(t,x,v)$$

取

$$v=-\beta(x)\frac{s}{\|s\|} \tag{10.10}$$

其中，β 是局部 Lipschitz 函数，它满足

$$\beta(x)\geqslant\frac{\varrho(x)}{1-\kappa_0}+\beta_0,\quad \forall x\in D \tag{10.11}$$

这里的常数 $\beta_0>0$，于是有

$$\begin{aligned}\dot{V}&=-\beta(x)s^{\mathrm{T}}\frac{G(x)s}{\|s\|}+s^{\mathrm{T}}\Delta(t,x,v)\\&\leqslant\lambda_{\min}(G(x))[-\beta(x)+\varrho(x)+\kappa_0\beta(x)]\|s\|\\&=\lambda_{\min}(G(x))[-(1-\kappa_0)\beta(x)+\varrho(x)]\|s\|\leqslant-\lambda_{\min}(G(x))\beta_0(1-\kappa_0)\|s\|\\&\leqslant-\lambda_0\beta_0(1-\kappa_0)\|s\|\end{aligned}$$

不等式 $\dot{V}\leqslant-\lambda_0\beta_0(1-\kappa_0)\|s\|=-\lambda_0\beta_0(1-\kappa_0)\sqrt{2V}$ 保证了所有始于流形 $s=0$ 之外的轨线都能在有限时间内到达此流形，而已在流形上的轨线不会离开它。

242

滑模稳定控制器的设计步骤可归纳如下：

1) 设计滑模流形 $\xi=\phi(\eta)$，用以镇定降阶系统式(10.5)。

2) 选取控制律为 $u=\psi(\eta,\ \xi)+v$，ψ 的典型取值为 $\psi=0$ 和 $\psi=-\hat{G}^{-1}\left[f_b-\left(\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right)f_a\right]$。

3) 估计式(10.9)中的 $\varrho(x)$ 和 κ_0，其中 Δ 依赖前一步选定的 ψ。

4) 选取 $\beta(x)$ 满足式(10.11)，并按式(10.10)选取切换(不连续)控制 v。

因为主要设计任务是对降阶系统式(10.5)进行的，所以设计对象的阶数降低了。滑模控制的主要特性是对满足匹配条件的不确定性具有鲁棒性。在到达阶段，要求 $\beta(x)$ 满足不等式(10.11)，切换控制的主要任务是驱使轨线在有限时间内到达滑模流形并保持在此流形上。从式(10.9)可以看出，$\varrho(x)$ 仅表示不确定性幅值的大小。由于没有限定 $\varrho(x)$ 要取得很小，因此这种切换控制可以处理相当大的不确定项。在滑动阶段，系统运动由式(10.5)决定，不确定项 G 和 δ 只需要满足匹配条件，滑模流形上的运动与它们无关。

滑动模型控制部分包括不连续函数 $\frac{s}{\|s\|}$，当 s 是标量时，它就简化为符号函数 $\mathrm{sgn}(s)$。控制器的不连续性带来了理论和实际两方面的问题。在理论上，由于不连续导致了 Lipschitz 性的缺失，于是解的存在性、唯一性以及 Lyapunov 分析的有效性等问题都需要在一个新的理论框架中重新探讨，在这个框架中允许状态方程的右边是不连续函数[⊖]。在实践中，如例 10.1 所示，由于切换设备的不够完美或不能实现高频切换而产生时间延迟；以及

⊖ 关于右端具有不连续的微分方程，请参阅文献[38，102，122，151]。

未建模的高频动态造成的抖动及时滞现象，还有由于执行器的带宽有限而无法接受高频振荡等问题都会影响控制目标的实现。为了避免出现这些情形，采用连续函数来近似$\frac{s}{\|s\|}$[一]，我们定义向量饱和函数 Sat(y)如下：

$$\mathrm{Sat}(y)=\begin{cases}y, & \|y\|\leqslant 1\\ \dfrac{y}{\|y\|}, & \|y\|>1\end{cases}$$

243

可以证明 Sat(y)是局部 Lipschitz 的。我们用具有较小正常数 μ[二]的 $\mathrm{Sat}\left(\frac{s}{\mu}\right)$来近似$\frac{s}{\|s\|}$，将式(10.10)换成

$$v=-\beta(x)\mathrm{Sat}\left(\frac{s}{\mu}\right) \tag{10.12}$$

其中，$\beta(x)$依然要求满足式(10.11)，式(10.12)称为滑模控制式(10.10)的连续形式。在区域$\|s\|\geqslant\mu$上 $\mathrm{Sat}\left(\frac{s}{\mu}\right)=\frac{s}{\|s\|}$，因此有

$$s^{\mathrm{T}}\dot{s}\leqslant-\lambda_0\beta_0(1-k_0)\|s\|$$

这表明只要$\|s(0)\|>\mu$，$\|s(t)\|$就会下降，直到其在有限时间内达到集合$\{\|s\|\leqslant\mu\}$并一直保持在其内。我们将集合$\{\|s\|\leqslant\mu\}$称为*边界层*。为研究 η 的行为变化，假设有一个(连续可微)的 Lyapunov 函数 $V_0(\eta)$，对于所有的$(\eta,\xi)\in T(D)$，满足不等式

$$\alpha_1(\|\eta\|)\leqslant V_0(\eta)\leqslant\alpha_2(\|\eta\|) \tag{10.13}$$

$$\frac{\partial V_0}{\partial\eta}f_a(\eta,\phi(\eta)+s)\leqslant-\alpha_3(\|\eta\|),\quad\forall\|\eta\|\geqslant\alpha_4(\|s\|) \tag{10.14}$$

其中，$\alpha_1\sim\alpha_4$ 是$\mathcal{K}$类函数[三]。注意到

$$\|s\|\leqslant c\Rightarrow\dot{V}_0\leqslant-\alpha_3(\|\eta\|),\quad\|\eta\|\geqslant\alpha_4(c)$$

我们再定义一个$\mathcal{K}$类函数 $\alpha=\alpha_2\circ\alpha_4$，则

$$\begin{aligned}V_0(\eta)\geqslant\alpha(c)\Leftrightarrow V_0(\eta)&\geqslant\alpha_2(\alpha_4(c))\\ \Rightarrow\alpha_2(\|\eta\|)&\geqslant\alpha_2(\alpha_4(c))\\ \Rightarrow\|\eta\|&\geqslant\alpha_4(c)\\ \Rightarrow\dot{V}_0&\leqslant-\alpha_3(\|\eta\|)\leqslant-\alpha_3(\alpha_4(c))\end{aligned}$$

这表明由于在边界层的边界 $V(y)=c_0$ 上，$\dot{V}$ 是负的，因此集合$\{V(y)\leqslant c_0\}$是正定不变的，其中 $c_0\geqslant\gamma(c)$(见图 10.8)。可以看出，当 $c>\mu$，$\Omega\subset T(D)$时，下列集合是正向不变的：

$$\Omega=\{V_0(\eta)\leqslant c_0\}\times\{\|s\|\leqslant c\},\quad 其中\ c_0\geqslant\alpha(c) \tag{10.15}$$

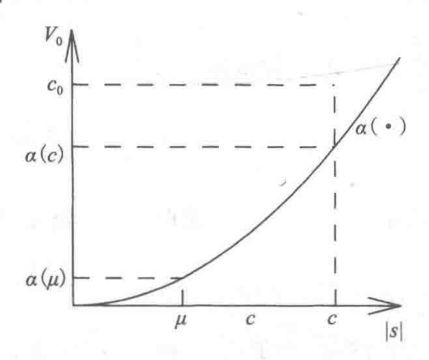


图 10.8 s 是标量时的集合 Ω 和 Ω_μ，在曲线 $\alpha(\cdot)$上方的 $\dot{V}_0<0$

选择 μ、c、c_0，使得 $c>\mu$，$c_0\geqslant\alpha(c)$，Ω 是紧的，且包含于 $T(D)$内。Ω 可以作为“吸引域”的一个估计。对所有位于 Ω 内的初始状态，对所有 $t\geqslant0$，轨线是有界的。经过有限时间后，

[一] 参阅文献[106，124，142，153]可更深入地了解滑模控制和不同的处理实际问题的方法。尽管我们没有对不连续的滑模控制器进行严格的分析，但我们鼓励读者通过仿真来比较连续与不连续控制器作用下的系统性能。

[二] 在文献[74]的习题 14.11 中对光滑近似有进一步讨论。

[三] 根据定理 4.7，不等式(10.14)蕴含当把 s 看作输入时，系统 $\dot{\eta}=f_a(\eta,\phi(\eta)+s)$是输入-状态稳定的。

$\|s(t)\|\leqslant\mu$。从前述分析可知，当 $V_0(\eta)\geqslant\alpha(\mu)$ 时，有 $\dot{V}_0\leqslant-\alpha_3(\alpha_4(\mu))$。因此，轨线将于有限时间内到达正向不变集

$$\Omega_\mu=\{V_0(\eta)\leqslant\alpha(\mu)\}\times\{\|s\|\leqslant\mu\} \tag{10.16}$$

244 若 μ 足够小，则集合 Ω_μ 可以任意小，连续形式滑模控制器能实现实用镇定。因为对任意的初始状态总可以将 Ω 选成足够大以包含该初始状态，所以，若所有的假设条件能全局成立，且 $V_0(\eta)$ 是径向无界的，则能实现全局实用镇定。下面的定理给出上述讨论的总结。

定理 10.1 *考虑系统式(10.4)，假设存在 $\phi(\eta)$、$V_0(\eta)$、$\varrho(x)$ 以及 κ_0 满足式(10.9)、式(10.13)和式(10.14)，u 和 v 分别由式(10.7)和(10.12)给定，再假设对于 μ 和 c，满足 $c>\mu$，且选取 $c_0>\alpha(c)$，使得式(10.15)中定义的 Ω 是紧的，并包含于 $T(D)$ 中。那么对所有的$(\eta(0),\ \xi(0))\in\Omega$，轨线$(\eta(t),\ \xi(t))$对所有 $t\geqslant0$ 有界，并在有限的时间内到达由式(10.16)所定义的正向不变集 Ω_μ。并且，若假设全局成立且 $V_0(\eta)$ 径向无界，则上述结论对所有的初始状态成立。*

定理 10.1 中的集合 Ω 和 Ω_μ 分别给出了吸引域和终极边界的估计。这些估计值都是比较保守的，对具体问题的进一步分析可以得到保守性较低的估计。这个事实将会在下面例子中进一步体现。引起 Ω 部分的保守性不仅仅是因为它给出了吸引域的估计，还因为它要求在这个区域中成立 $s^{\mathrm{T}}\dot{s}<0$。区域 Ω 外的轨线也可能到达原点，但是这些轨线在进入区域 $s^{\mathrm{T}}\dot{s}<0$ 之前其模 $\|s\|$ 可能会很大。

例 10.2 考虑磁悬浮系统式(A.29)，将它镇定在 $x_1=1$，标称的稳态-状态控制是 $u_{ss}=-1$。将平衡点转换到原点并忽略摩擦，得到下面的模型：

245

$$\dot{x}_1=x_2,\quad \dot{x}_2=\frac{m-m_o}{m}+\frac{m_o}{m}u$$

其中，$x_1\geqslant-1$，$|u|\leqslant1$。假设 $\left|\dfrac{m-m_o}{m_o}\right|\leqslant\dfrac{1}{3}$。取 $s=x_1+x_2$，得到 $\dot{x}_1=-x_1+s$。取 $V_0=\dfrac{1}{2}x_1^2$，其导数满足

$$\dot{V}_0=-x_1^2+x_1s\leqslant-(1-\theta)x_1^2,\quad \forall\ |x_1|\geqslant\frac{|s|}{\theta}$$

其中，$0<\theta<1$。因此，V_0 满足式(10.13)和式(10.14)，其中，$\alpha_1(r)=\alpha_2(r)=\dfrac{1}{2}r^2$，$\alpha_3(r)=(1-\theta)r^2$，$\alpha_4(\tau)=\dfrac{r}{\theta}$。因此，$\alpha(r)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{r}{\theta}\right)^2$。取 $c_0=\alpha(c)$，式(10.15)和式(10.16)中的集合 Ω 和 Ω_μ 分别为：

$$\Omega=\left\{|x_1|\leqslant\frac{c}{\theta}\right\}\times\{|s|\leqslant c\},\quad \Omega_\mu=\left\{\left|x_1\leqslant\frac{\mu}{\theta}\right|\right\}\times\{|s|\leqslant\mu\}$$

为了满足 $x_1\geqslant-1$，c 限制于 $c\leqslant\theta$。由

$$\dot{s}=x_2+\frac{m-m_o}{m}+\frac{m_o}{m}u$$

可看出式(10.9)具有下列形式

$$\left|\frac{x_2+\dfrac{m-m_o}{m}}{\dfrac{m_o}{m}}\right|=\left|\frac{m}{m_o}x_2+\frac{m-m_o}{m_o}\right|\leqslant\frac{1}{3}(4|x_2|+1)$$

如我们只考虑集合 Ω，Ω 中元素满足 $|x_2|\leqslant|x_1|+|s|\leqslant c\left(1+\dfrac{1}{\theta}\right)$。取 $\dfrac{1}{\theta}=1.1$，前面的不等式可化为

$$\left|\frac{x_2+\dfrac{m-m_o}{m}}{\dfrac{m_o}{m}}\right|\leqslant\frac{8.4c+1}{3}$$

为了满足条件 $|u|\leqslant 1$，取 $u=-\mathrm{sat}\left(\dfrac{s}{\mu}\right)$，则不等式(10.11)将 c 限制为：

$$\frac{8.4c+1}{3}<1 \quad\Leftrightarrow\quad c<0.238$$

取 $c=0.23$，定理 10.1 确保了所有起始于 Ω 的轨迹总在集合 Ω 中，并在有限的时间内到达集合 Ω_μ。在 Ω_μ 中，x_1 满足 $|x_1|\leqslant\dfrac{\mu}{\theta}=1.1\mu$。常量 μ 可以选的足够小以满足任何设定的误差要求。例如，要求 $|x_1|$ 的终极边界为 0.01，μ 可取为 $\dfrac{0.01}{1.1}\approx 0.009$。对集合 Ω_μ 的进一步分析，可得出 $|x_1|$ 的更小保守的终极边界估计。在集合 Ω_μ 中，闭环系统由下列线性方程表示：

$$\dot{x}_1=x_2,\quad \dot{x}_2=\frac{m-m_o}{m}-\frac{m_o(x_1+x_2)}{m\mu}$$

系统有唯一的平衡点 $\left(x_1=\mu\dfrac{m-m_o}{m_o},\ x_2=0\right)$，且矩阵是 Hurwitz 的。因此，集合 Ω_μ 中的所有轨线在时间趋近无穷时都收敛到该平衡点。因为 $\left|\dfrac{m-m_o}{m_o}\right|\leqslant\dfrac{1}{3}$，$|x_1|$ 的终极边界可取为 0.34μ。如果终极边界定为 0.01，则可取 μ 为 0.029，这相当于采用定理 10.1 方法所选 μ 的 3 倍。其实我们还可以得到吸引域的一个保守更小的估计。取 $V_1=\dfrac{1}{2}(x_1^2+s^2)$ 可得，当 $|s|\geqslant\mu$ 时，

246

$$\dot{V}_1\leqslant -x_1^2+s^2-\frac{m_o}{m}\left[1-\left|\frac{m-m_o}{m_o}\right|\right]|s|\leqslant -x_1^2+s^2-\frac{1}{2}|s|$$

当 $|s|\leqslant\mu$ 时，

$$\dot{V}_1\leqslant -x_1^2+s^2+\left|\frac{m-m_o}{m_o}\right||s|-\frac{m_o}{m}\frac{s^2}{\mu}\leqslant -x_1^2+s^2+\frac{1}{2}|s|-\frac{3s^2}{4\mu}$$

可以证明，当 $\mu=0.029$ 时，在集合 $\{0.0012\leqslant V_1\leqslant 0.12\}$ 中，$\dot{V}_1$ 小于某个负数。因此，所有始于 $\Omega_1=\{V_1\leqslant 0.12\}$ 的轨线在有限时间内进入集合 $\Omega_2=\{V_1\leqslant 0.0012\}$。由于 $\Omega_2\subset\Omega$，我们前面的分析正确，$|x_1|$ 的终极边界为 0.01。新的吸引域估计 Ω_1 比 Ω 大。 ◀

定理 10.1 表明，滑模控制器的连续形式可以取得实用稳定，这是我们能期望的最好结果，因为不确定项 δ 在 $x=0$ 处没有消失。假如 δ 在原点处消失了，那么我们就可以得到原点渐近稳定的结论，这将在下一个定理中给出。

定理 10.2 假设定理 10.1 中的所有条件均成立，并且 $\varrho(0)=0$。进一步假设 $\dot{\eta}=f_a(\eta,\phi(\eta))$ 的原点是指数稳定的，则存在 $\mu^*>0$，使得对所有的 $0<\mu<\mu^*$，闭环系统的原点是指数稳定的，且 Ω 是吸引域的一个子集。进一步，如果假设条件全局成立，$V_0(\eta)$ 径向无界，则原点是全局渐近稳定。

证明：定理10.1给出了所有始于Ω的轨迹将在有限时间内到达Ω_μ，在Ω_μ内，闭环系统为

$$\dot{\eta} = f_a(\eta,\phi(\eta)+s), \quad \mu\dot{s} = \beta(x)G(x)s + \mu\Delta(t,x,v) \tag{10.17}$$

根据定理3.8(逆Lyapunov定理)，存在Lyapunov函数$V_1(\eta)$，在$\eta=0$的某个邻域N_η中满足

$$c_1\|\eta\|^2 \leqslant V_1(\eta) \leqslant c_2\|\eta\|^2, \quad \frac{\partial V_1}{\partial \eta}f_a(\eta,\phi(\eta)) \leqslant -c_3\|\eta\|^2, \quad \left\|\frac{\partial V_1}{\partial \eta}\right\| \leqslant c_4\|\eta\|$$

由于f_a的光滑性，在$(\eta, \varepsilon)=(0, 0)$的某个邻域$N$内下式成立：

247

$$\|f_a(\eta,\phi(\eta)+s) - f_a(\eta,\phi(\eta))\| \leqslant k_1\|s\|$$

因此可选取足够小的μ，使得$\Omega_\mu \subset N_\eta \cap N$。在$\Omega_\mu$内有

$$\begin{aligned}
s^{\mathrm{T}}\dot{s} &= -\frac{\beta(x)}{\mu}s^{\mathrm{T}}G(x)s + s^{\mathrm{T}}\Delta(t,x,v) \\
&\leqslant -\frac{\beta(x)\lambda_{\min}(G(x))}{\mu}\|s\|^2 + \lambda_{\min}(G(x))\left[\varrho(x) + \frac{\kappa_0\beta(x)\|s\|}{\mu}\right]\|s\| \\
&\leqslant -\frac{\lambda_0\beta_0(1-\kappa_0)}{\mu}\|s\|^2 + \lambda_{\min}(G(x))\varrho(x)\|s\|
\end{aligned}$$

由于G是连续的，并且ϱ是局部Lipschitz的，以及$\varrho(0)=0$，因此

$$s^{\mathrm{T}}\dot{s} \leqslant -\frac{\lambda_0\beta_0(1-\kappa_0)}{\mu}\|s\|^2 + k_2\|\eta\|\|s\| + k_3\|s\|^2$$

选取备选Lyapunov函数$W=v_1(\eta)+\frac{1}{2}s^{\mathrm{T}}s$ ⊖，得到：

$$\begin{aligned}
\dot{W} &\leqslant -c_3\|\eta\|^2 + c_4k_1\|\eta\|\|s\| + k_2\|\eta\|\|s\| + k_3\|s\|^2 - \frac{\lambda_0\beta_0(1-\kappa_0)}{\mu}\|s\|^2 \\
&= -\begin{bmatrix}\|\eta\| \\ \|s\|\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} c_3 & -\dfrac{c_4k_1+k_2}{2} \\ -\dfrac{c_4k_1+k_2}{2} & \lambda_0\beta_0\,\dfrac{1-\kappa_0}{\mu} - k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix}\|\eta\| \\ \|s\|\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

当

$$\mu < \frac{4c_3\lambda_0\beta_0(1-\kappa_0)}{4c_3k_3 + (c_4k_1+k_2)^2}$$

时，其右边是负定的，结论直接可得。 □

前述证明的原则是，在边界层内，控制$v=-\beta(x)\dfrac{s}{\mu}$在$\mu$比较小时，起着高增益反馈的作用。这说明通过选择足够小的μ，这种高增益反馈能镇定原点。

对于满足匹配条件的不确定项，我们指出滑模控制器具有鲁棒性。那么当不确定项不满足匹配条件时将会怎样呢？假定方程式(10.1)被改写成

$$\dot{x} = f(x) + B(x)[G(x)u + \delta(t,x,\mu)] + \delta_1(x)$$

结合式(10.3)给出的变量替换，系统可改写为：

$$\dot{\eta} = f_a(\eta,\xi) + \delta_a(\eta,\xi), \quad \dot{\xi} = f_b(\eta,\xi) + G(x)u + \delta(t,x,u) + \delta_b(\eta,\xi)$$

这里$\left[\dfrac{\partial T}{\partial x}\right]\delta_1$被分割为$\delta_a$和$\delta_b$，$\delta_b$可以加到匹配不确定项$\delta$中，加了之后仅仅改变了

⊖ 系统式(10.17)称为奇异扰动系统，Lyapunov函数W的构造同C.3节。

$\left\|\frac{\Delta}{\lambda_{\min}(G)}\right\|$的上界，其他处理都是一样的。另一方面，由于 δ_a 不满足匹配条件，使得降阶的滑模方程成为下列形式： 248

$$\dot{\eta} = f_a(\eta,\phi(\eta)) + \delta_a(\eta,\phi(\eta))$$

此时，设计 ϕ 时，要保证当不确定项 δ_a 存在时原点 $\eta=0$ 的渐近稳定性，这是一个鲁棒镇定性问题，可以通过其他的鲁棒镇定技术，比如高增益反馈来解决。匹配和非匹配不确定项的区别是：当匹配不确定项的上界已知，只要给出的滑模控制能够运行，就能够保证匹配不确定项的鲁棒性，但是对非匹配的不确定项，滑模控制不能保证其鲁棒性，因为我们不得不被局限在滑模流形上讨论系统的鲁棒镇定问题。接下来的两个例子将说明这一点。

例 10.3 考虑系统

$$\dot{x}_1 = x_2 + \theta_1 x_1 \sin x_2, \quad \dot{x}_2 = \theta_2 x_2^2 + x_1 + u$$

其中，θ_1 和 θ_2 都是未知的参数，满足$|\theta_1|\leqslant a$，$|\theta_2|\leqslant b$，a 和 b 为已知的边界。系统已经处于 $\eta=x_1$ 和 $\xi=x_2$ 的正规型。θ_2 是匹配不确定项，而 θ_1 是非匹配不确定项。我们从下述系统着手：

$$\dot{x}_1 = x_2 + \theta_1 x_1 \sin x_2$$

通过设计 x_2 来鲁棒镇定原点 $x_1=0$，这可以通过 $x_2=-kx_1$，$k>a$ 达到，因为

$$x_1\dot{x}_1 = -kx_1^2 + \theta_1 x_1^2 \sin(-kx_1) \leqslant -(k-a)x_1^2$$

取 $s=x_2+kx_1$，得到

$$\dot{s} = \theta_2 x_2^2 + x_1 + u + k(x_2 + \theta_1 x_1 \sin x_2)$$

为了抵消右边的已知项，取 $u=-x_1-kx_2+v$，可得 $\dot{s}=v+\Delta(x)$，其中 $\Delta(x)=\theta_2 x_2^2+k\theta_1 x_1\sin x_2$。因为$|\Delta(x)|\leqslant ak|x_1|+bx_2^2$，取 $\beta(x)=ak|x_1|+bx_2^2+\beta_0$，其中 $\beta_0>0$，反馈取成：

$$u = -x_1 - kx_2 - \beta(x)\,\mathrm{sat}\left(\frac{s}{\mu}\right)$$

由定理 10.2 可知，若 μ 足够小，这个控制器能全局镇定原点。◀

在该例中，对具有非匹配不确定项$|\theta_1|\leqslant a$ 的降阶模型，我们能够用高增益反馈来鲁棒镇定它，并且不需要限制 a。但是，这种情况未必总是不可能的，这点可由下面的例子看出来。 249

例 10.4 考虑系统

$$\dot{x}_1 = x_1 + (1-\theta_1)x_2, \quad \dot{x}_2 = \theta_2 x_2^2 + x_1 + u$$

其中，θ_1 和 θ_2 是未知参数，满足$|\theta_1|\leqslant a$ 和$|\theta_2|\leqslant b$。我们从下述系统入手：

$$\dot{x}_1 = x_1 + (1-\theta_1)x_2$$

通过设计 x_2 来鲁棒镇定原点 $x_1=0$。注意，系统在 $\theta_1=1$ 时是不可镇定的。因此，必须限制 a 小于 1。取 $x_2=-kx_1$，得到

$$x_1\dot{x}_1 = x_1^2 - k(1-\theta_1)x_1^2 \leqslant -[k(1-a)-1]x_1^2$$

若选取 $k>\frac{1}{1-a}$，则可镇定原点 $x_1=0$。取 $s=x_2+kx_1$，如同前面的例子，取

$$u = -(1+k)x_1 - kx_2 - \beta(x)\,\mathrm{sat}\left(\frac{s}{\mu}\right)$$

其中，$\beta(x)=bx_2^2+ak|x_2|+\beta_0$ 和 $\beta_0>0$。◀

在将要结束这一小节的时候，我们给出另一种不同形式的滑模控制器，其中 $m>1$。如

果$G(x)$是对角线上元素为正的对角矩阵，设计v的每一个v_i为标量$\frac{s_i}{\mu}$的饱和函数。方程式(10.8)可以写成

$$\dot{s}_i = g_i(x)v_i + \Delta_i(t,x,v), \quad 1 \leqslant i \leqslant m$$

其中，s_i、v_i和Δ_i分别是s、v和Δ的第i个分量，g_i是G的第i个对角元素。假设对于所有的$(t, x, v) \in [0, \infty) \times D \times R^m$和所有的$1 \leqslant i \leqslant m$，存在$\varrho(x) \geqslant 0$（一个局部 Lipschitz 函数）和$\kappa_0 \in [0, 1)$，使得

$$g_i(x) \geqslant g_0 > 0, \quad \left| \frac{\Delta_i(t,x,v)}{g_i(x)} \right| \leqslant \varrho(x) + \kappa_0 \max_{1 \leqslant i \leqslant m} |v_i|$$

令

$$v_i = -\beta(x)\text{sat}\left(\frac{s_i}{\mu}\right), \quad 1 \leqslant i \leqslant m \tag{10.18}$$

其中，β是一个局部 Lipschitz 函数，且满足式(10.11)。当$|s_i| \geqslant \mu$时，$V_i = \frac{1}{2}s_i^2$的导数满足

$$\begin{aligned}\dot{V}_i = s_i g_i(x)v_i + s_i\Delta_i(t,x,v) &\leqslant g_i(x)\{s_i v_i + |s_i|[\varrho(x) + \kappa_0 \max_{1 \leqslant i \leqslant m} |v_i|]\} \\ &\leqslant g_i(x)[-\beta(x) + \varrho(x) + \kappa_0\beta(x)]|s_i| = g_i(x)[-(1-\kappa_0)\beta(x) + \varrho(x)]|s_i| \\ &\leqslant g_i(x)[-\varrho(x) - (1-\kappa_0)\beta_0 + \varrho(x)]|s_i| \leqslant -g_0\beta_0(1-\kappa_0)|s_i|\end{aligned}$$

[250]

不等式$\dot{V}_i \leqslant -g_0\beta_0(1-k_0)|s_i|$保证了所有的轨迹在有限时间内到达边界层$\{|s_i| \leqslant \mu, 1 \leqslant i \leqslant m\}$。式(10.5)和式(10.16)中的集合$\Omega$和$\Omega_\mu$分别为

$$\Omega = \{V_0(\eta) \leqslant c_0\} \times \{|s_i| \leqslant c, 1 \leqslant i \leqslant m\}, \quad \text{其中 } c_0 \geqslant \alpha(c)$$

$$\Omega_\mu = \{V_0(\eta) \leqslant \alpha(\mu)\} \times \{|s_i| \leqslant \mu, 1 \leqslant i \leqslant m\}$$

在这里，$\alpha(r) = \alpha_2(\alpha_4(r\sqrt{m}))$。在控制律式(10.18)作用下，可以证明可得到类似定理10.1和定理10.2的结果[⊖]。

10.2 Lyapunov 再设计方法

考虑系统

$$\dot{x} = f(x) + G(x)[u + \delta(t,x,u)] \tag{10.19}$$

在这里，$x \in R^n$是系统状态，$u \in R^m$是控制输入，函数f、G和δ定义在$(t, x, u) \in [0, \infty) \times D \times R^m$上，其中，区域$D \subset R^n$包含原点。假设$f$、$G$是局部 Lipschitz 的，$\delta$关于$t$是分段连续的，对于$x$和$u$是局部 Lipschitz 的。函数$f$和$G$是已知的，$\delta$是未知的。系统的标称模型是

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u \tag{10.20}$$

假设已经设计了状态反馈$u=\phi(x)$来镇定标称闭合系统的原点，即要使得函数

$$\dot{x} = f(x) + G(x)\phi(x) \tag{10.21}$$

的原点是渐近稳定的平衡点，于是，存在一个连续可微的 Lyaponov 函数$V(x)$，使得对于所有$x \in D$，下式成立：

$$\frac{\partial V}{\partial x}[f(x) + G(x)\phi(x)] \leqslant -W(x) \tag{10.22}$$

⊖ 参阅文献[74]中的定理 14.1 和定理 14.2。

其中，$W(x)$是正定的。现在再考虑具有不确定的系统，令状态反馈是 $u=\phi(x)+v$，假设不确定项 δ 满足不等式

$$\|\delta(t,x,\phi(x)+v)\| \leqslant \varrho(x)+\kappa_0\|v\|, \quad 0 \leqslant \kappa_0 < 1 \tag{10.23}$$

其中，$\varrho(x)\geqslant 0$ 是局部 Lipschitz 函数。在式(10.23)中 ϱ 和 κ_0 都是已知的，这是设计中唯一知道的关于 δ 的信息。函数 ϱ 用来刻画不确定项的大小。我们的目标是设计一个辅助的反馈控制器 v，从而使整个控制器 $u=\phi(x)+v$ 能镇定实际系统式(10.19)的原点，这里称这种对 v 的设计为 Lyapunov 再设计[⊖]。 251

在控制 $u=\phi(x)+v$ 的作用下，闭环系统为

$$\dot{x} = f(x)+G(x)\phi(x)+G(x)[v+\delta(t,x,\phi(x)+v)] \tag{10.24}$$

将式(10.24)看成标称系统式(10.21)的扰动形式。沿着式(10.24)对 $V(x)$求导，可得

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x}(f+G\phi)+\frac{\partial V}{\partial x}G(v+\delta) \leqslant -W(x)+\frac{\partial V}{\partial x}G(v+\delta)$$

此处，为了方便，我们没有写出各函数的自变量。记 $w^{\mathrm{T}}=\left[\frac{\partial V}{\partial x}\right]G$，将最后的不等式重写于下

$$\dot{V} \leqslant -W(x)+w^{\mathrm{T}}v+w^{\mathrm{T}}\delta$$

右边的第一项来源于标称系统的闭环，第二项和第三项分别代表控制 v 和不确定项 δ 对 $\dot{V}$ 的作用。由于匹配条件，不确定项 δ 与 v 出现在同一位置上。因此，就有可能选取 v 来抵消掉 δ 对 $\dot{V}$ 产生的导致不稳定的影响。于是

$$w^{\mathrm{T}}v+w^{\mathrm{T}}\delta \leqslant w^{\mathrm{T}}v+\|w\|\|\delta\| \leqslant w^{\mathrm{T}}v+\|w\|[\varrho(x)+\kappa_0\|v\|]$$

取

$$v=-\beta(x)\cdot\frac{w}{\|w\|} \tag{10.25}$$

其中，$\beta(x)$是非负的局部 Lipschitz 函数，于是，对于所有 $x\in D$，下式成立：

$$w^{\mathrm{T}}v+w^{\mathrm{T}}\delta \leqslant -\beta\|w\|+\varrho\|w\|+\kappa_0\beta\|w\| = -\beta(1-\kappa_0)\|w\|+\varrho\|w\|$$

选择 $\beta(x)\geqslant\frac{\varrho(x)}{1-\kappa_0}$，有

$$w^{\mathrm{T}}v+w^{\mathrm{T}}\delta \leqslant -\varrho\|w\|+\varrho\|w\| = 0$$

因此，通过辅助反馈式(10.25)，$V(x)$沿闭环系统式(10.24)的导数是负定的。

辅助反馈式(10.25)关于 x 是不连续的，它具与有滑模控制器式(10.11)相同的形式。类似于滑模控制，我们对式(10.25)采用连续逼近

$$v=-\beta(x)\mathrm{Sat}\left(\frac{\beta(x)w}{\mu}\right)=\begin{cases}-\beta(x)\left(\dfrac{w}{\|w\|}\right), & \text{若 } \beta(x)\|w\|>\mu \\ -\beta^2(x)\left(\dfrac{w}{\mu}\right), & \text{若 } \beta(x)\|w\|\leqslant\mu\end{cases} \tag{10.26}$$

252

它关于 x 是局部 Lipschitz 的。从式(10.26)可知，只要 $\beta(x)\|w\|>\mu$，V 沿着闭环系统式(10.24)的导数就是负定的，因此我们只需检验 $\beta(x)\|w\|\leqslant\mu$ 时 $\dot{V}$ 的符号，此时，

$$w^{\mathrm{T}}v+w^{\mathrm{T}}\delta \leqslant -\frac{\beta^2}{\mu}\|w\|^2+\varrho\|w\|+\frac{\kappa_0\beta^2}{\mu}\|w\|^2 \leqslant (1-\kappa_0)\left(-\frac{\beta^2}{\mu}\|w\|^2+\beta\|w\|\right)$$

⊖ 它也被称为最小-最大控制[29]。更多的 Lyapunov 再设计结果可参阅文献[13, 28, 107]。

当 $\beta\|w\|=\frac{\mu}{2}$ 时，$-\left(\frac{\beta^2}{\mu}\right)\|w\|^2+\beta\|w\|$ 取得最大值 $\frac{\mu}{4}$。因而，只要 $\beta(x)\|w\|\leqslant\mu$，就有

$$\dot{V}\leqslant -W(x)+\frac{\mu(1-\kappa_0)}{4} \tag{10.27}$$

另一方面，当 $\beta(x)\|w\|>\mu$ 时，$\dot{V}$ 满足

$$\dot{V}\leqslant -W(x)\leqslant -W(x)+\frac{\mu(1-\kappa_0)}{4}$$

因此不等式(10.27)总是成立的，与 $\beta(x)\|w\|$ 无关。由于 $V(x)$ 和 $W(x)$ 都是正定函数，因而总存在 $\mathcal{K}$ 类函数 α_1，α_2 和 α_3，使得对所有的 $x\in D$，如下不等式成立

$$\alpha_1(\|x\|)\leqslant V(x)\leqslant \alpha_2(\|x\|),\quad W(x)\geqslant \alpha_3(\|x\|) \tag{10.28}$$

则，对于 $0<\theta<1$，有

$$\begin{aligned}\dot{V}&\leqslant -(1-\theta)\alpha_3(\|x\|)-\theta\alpha_3(\|x\|)+\frac{\mu(1-\kappa_0)}{4}\\&\leqslant -(1-\theta)\alpha_3(\|x\|)\end{aligned}$$

对任意的 $\|x\|\geqslant\alpha_3^{-1}\left(\frac{\mu(1-\kappa_0)}{4\theta}\right)\overset{\text{def}}{=}\mu_0$ 成立。取 $r>0$，使得 $B_r\subset D$，再取

$$\mu<\frac{4\theta\alpha_3(\alpha_2^{-1}(\alpha_1(r)))}{1-\kappa_0}$$

那么 $\mu_0<\alpha_2^{-1}(\alpha_1(r))$。应用定理 4.4 可以得到如下定理，这个定理表明闭环系统的解是一致终极有界的，这个界可以用 μ 的 $\mathcal{K}$ 类函数表示。

定理 10.3　*考虑系统式(10.19)，设 $D\subset R^n$ 为包含原点的一个区域，$B_r=\{\|x\|\leqslant r\}\subset D$，而 $\phi(x)$ 是标称系统式(10.20)的镇定反馈，则存在 Lyapunov 函数 $V(x)$，使得对一切 $x\in D$，不等式(10.22)和式(10.28)成立，其中的 α_1，α_2 和 α_3 都是 $\mathcal{K}$ 类函数。假设对于所有的 $t\geqslant 0$ 和 $x\in D$，不确定项 δ 满足不等式(10.23)。设 v 由式(10.26)给出，选取 $\mu<\frac{4\theta\alpha_3(\alpha_2^{-1}(\alpha_1(r)))}{1-\kappa_0}$，$0<\theta<1$，则对任意 $x(t_0)\in\{V(x)\leqslant\alpha_1(r)\}$，闭环系统式(10.24)的解满足*

$$\|x(t)\|\leqslant \max\{\beta_1(\|x(t_0)\|,t-t_0),b(\mu)\} \tag{10.29}$$

其中，β_1 是一个 $\mathcal{KL}$ 类函数，b 是由下式定义的 $\mathcal{K}$ 类函数

$$b(\mu)=\alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu_0))=\alpha_1^{-1}\left(\alpha_2\left(\alpha_3^{-1}\left(\frac{0.25\mu(1-\kappa_0)}{\theta}\right)\right)\right)$$

253　*如果所有假设全局成立，α_1 是 $\mathcal{K}_\infty$ 类函数，则式(10.29)对于任意初始状态 $x(t_0)$ 成立。*

通常，式(10.26)给出的连续 Lyapunov 再设计不能像其对应的不连续型的再设计式(10.25)[⊖]那样能使原点镇定。但是，它却能保证解的一致终极有界。由于终极上界函数 $b(\mu)$ 是关于 μ 的 $\mathcal{K}$ 类函数，可以通过选择足够小的 μ 使函数值任意小。注意到在上述分析过程中对 μ 唯一的限制是 $\mu<\frac{4\theta\alpha_3(\alpha_2^{-1}(\alpha_1(r)))}{1-\kappa_0}$。当假设条件全局满足，且 $\alpha_i(i=1, 2, 3)$ 是 $\mathcal{K}_\infty$ 函数时，这个要求对所有 μ 都能满足。当然，从实用的角度考虑，因为我们想驱动系统到原点的尽可能小的邻域，所以 μ 应该尽可能的小。在探索 μ 尽可能的小的时候，如果 δ 在原点处为 0，那么我们可以得到一个更准确的结果：假设存在一个球域 $B_a=\{\|x\|\leqslant a\}$，

⊖　原书为(10.8)，有误。——译者注

$a \leqslant r$，使得对所有 $x \in B_a$，下述不等式成立：

$$W(x) \geqslant \varphi^2(x), \quad \beta(x) \geqslant \beta_0 > 0, \quad \varrho(x) \leqslant \varrho_1 \varphi(x) \tag{10.30}$$

其中，$\varphi(x)$正定，ϱ_1是正常数。选择 $\mu < b^{-1}(a)$，以确保闭环系统的轨迹在有限时间后一直在 B_a 内。当 $\beta(x)\|w\| \leqslant \mu$ 时，$\dot{V}$ 满足：

$$\begin{aligned}
\dot{V} &\leqslant -W(x) - \frac{\beta^2(x)(1-\kappa_0)}{\mu}\|w\|^2 + \varrho(x)\|w\| \\
&\leqslant -(1-\theta)W(x) - \theta\varphi^2(x) - \frac{\beta_0^2(1-\kappa_0)}{\mu}\|w\|^2 + \varrho_1\varphi(x)\|w\| \\
&\leqslant -(1-\theta)W(x) - \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\varphi(x) \\ \|w\|\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}2\theta & -\varrho_1 \\ -\varrho_1 & \dfrac{2\beta_0^2(1-\kappa_0)}{\mu}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi(x) \\ \|w\|\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

其中，$0<\theta<1$。如果 $\mu < \dfrac{4\theta\beta_0^2(1-\kappa_0)}{\varrho_1^2}$，二次型矩阵将是正定的，则 $\dot{V} \leqslant -(1-\theta)W(x)$。因为当 $\beta(x)\|w\| > \mu$ 时，$\dot{V} \leqslant -W(x) \leqslant -(1-\theta)W(x)$，可推出 $\dot{V} \leqslant -(1-\theta)W(x)$，这表明原点是一致渐近稳定的。这个结论概括在定理 10.4 中。

定理 10.4 假设定理 10.3 的条件都成立，且条件式(10.30)也成立，则对于所有的 $\mu < \min\left\{\dfrac{4\theta\beta_0^2(1-\kappa_0)}{\varrho_1^2},\ b^{-1}(a)\right\}$，其中 $0<\theta<1$，闭环系统式(10.24)的原点是一致渐近稳定的。若式(10.28)中的 α_1、α_2 和 α_3 都能写成 $\alpha_i(r)=k_i r^c$ 的形式，则原点将是指数稳定的。

如闭环标称系统式(10.21)是指数稳定的，并且扰动 $\delta(t, x, u)$对 x 和 u 是局部 Lipschitz 的并在($x=0$，$u=0$)处为 0，则定理 10.4 特别有用。此时，$\varphi(x)$与$\|x\|$成比例，不确定项满足式(10.23)，且 $\varrho(x) \leqslant \varrho_1\varphi(x)$。通常，扰动项在原点处为 0 并不意味不等式 $\varrho(x) \leqslant \varrho_1\varphi(x)$一定成立。例如，在标量情况下，$\varphi(x)=|x|^3$，$\varrho(x)=|x|$时，$\varrho(x)$就不能有 $\varrho_1\varphi(x)$这样的上界。

254

定理 10.4 的镇定依赖于 β 的选择，即要求 β 满足 $\beta(x) \geqslant \beta_0 > 0$。在这个条件下，反馈控制式(10.26)在区域 $\beta\|w\| \leqslant \mu$ 内是高增益反馈 $v = -\dfrac{\beta w}{\mu}$。当式(10.30)满足时，此高增益反馈可以镇定原点。可以看出，如果 β 不满足 $\beta(x) \geqslant \beta_0 > 0$ 这个条件，这种反馈控制就不可能镇定原点[⊖]。

例 10.5 重新考虑例 9.4 的单摆方程：

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\sin(x_1+\delta_1) - b_0 x_2 + cu$$

其中，$x_1=\theta-\delta_1$，$x_2=\dot{\theta}$，不确定参数 b_0 和 c 满足 $0 \leqslant b_0 \leqslant 0.2$，$0.5 \leqslant c \leqslant 2$。我们想通过镇定原点 $x=0$ 来使单摆稳定在 $\theta=\delta_1$ 的位置上。对系统进行反馈线性化可得

$$\dot{x} = Ax + B[-\sin(x_1+\delta_1) - b_0 x_2 + cu]$$

其中，(A, B)代表两个积分的串联。由标称参数$\hat{b}_0=0$ 和$\hat{c}$，标称的镇定反馈控制可选取为

$$\phi(x) = \left(\frac{1}{\hat{c}}\right)[\sin(x_1+\delta_1) - k_1 x_1 - k_2 x_2]$$

其中，$K=[k_1 \quad k_2]$，它使得 $A-BK$ 是 Hurwitz 矩阵。取 $u=\phi(x)+v$，不确定项 δ 为

⊖ 参见文献[74]中的习题 14.20。

$$\delta = \left(\frac{c-\hat{c}}{\hat{c}^2}\right)[\sin(x_1+\delta_1) - k_1x_1 - k_2x_2] - \frac{b_0}{\hat{c}}x_2 + \left(\frac{c-\hat{c}}{\hat{c}}\right)v$$

因此

$$|\delta| \leqslant \varrho_0 + \varrho_1|x_1| + \varrho_2|x_2| + \kappa_0|v|$$

其中，

$$\varrho_0 \geqslant \left|\frac{(c-\hat{c})\sin\delta_1}{\hat{c}^2}\right|, \quad \varrho_1 \geqslant \left|\frac{c-\hat{c}}{\hat{c}^2}\right|(1+k_1), \quad \varrho_2 \geqslant \frac{b_0}{\hat{c}} + \left|\frac{c-\hat{c}}{\hat{c}^2}\right|k_2, \quad \kappa_0 \geqslant \left|\frac{c-\hat{c}}{\hat{c}}\right|$$

假设 $\kappa_0<1$，取 $\beta(x)$ 为

$$\beta(x) \geqslant \beta_0 + \frac{\varrho_0 + \varrho_1|x_1| + \varrho_2|x_2|}{1-\kappa_0}, \quad \beta_0 > 0$$

标称系统闭环后有一个 Lyapunov 函数 $V(x)=x^{\mathrm{T}}Px$，其中 P 是 Lyapunov 方程 $P(A-BK)+(A-BK)^{\mathrm{T}}P=-I$ 的解。因此，$w=2x^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}P=2(p_{12}x_1+p_{22}x_2)$，考虑不确定后，系统控制律为

$$u = \phi(x) - \beta(x)\,\mathrm{sat}\left(\frac{\beta(x)w}{\mu}\right)$$

255

它实现了全局终极有界，此界与$\sqrt{\mu}$成正比。如果 $\sin\delta_1=0$，可取 $\varrho_0=0$，闭环系统是全局指数稳定的。

在例 9.4 中，我们分析了同一个系统，但控制为 $u=\phi(x)$。比较两个例子可以看出辅助控制 v 的作用。在例 9.4 中，我们必须对不确定项进行如下限制：

$$\left|\frac{c-\hat{c}}{\hat{c}}\right|[1+\sqrt{k_1^2+k_2^2}] \leqslant \frac{1}{2\sqrt{p_{12}^2+p_{22}^2}}$$

现在这个限制可以取消。当 $\sin\delta_1\neq 0$，我们在那里证明了终极边界与$\left|\sin(\delta_1)\frac{c-\hat{c}}{\hat{c}}\right|$成正比。在当前控制下，终极边界与$\sqrt{\mu}$成正比，因而通过选取足够小的 μ，可以使它任意小。

考虑将单摆稳定在 $\delta_1=\frac{\pi}{2}$处。为使$|(c-\hat{c})/\hat{c}|$最小，取$\hat{c}=\frac{2+0.5}{2}=1.25$，这时可取 $\kappa_0=\left|\frac{c-\hat{c}}{\hat{c}}\right|=0.6$ ⊖。当取 $K=[1\quad 2]$时，$A-BK$ 在 -1 处有重特征值，并且由 Lyapunov 方程的解可得出 $w=x_1+x_2$。取 $\beta_0=0.3$，$\beta(x)$可以由下式得到

$$\beta(x) = 2.4|x_1| + 2.8|x_2| + 1.5$$

和

$$u = 0.8(\cos x_1 - x_1 - 2x_2) - \beta(x)\,\mathrm{sat}\left(\frac{\beta(x)w}{\mu}\right)$$

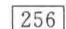
参数 μ 可以选取得足够小以满足终极边界的要求。例如，要求 $x(t)$最终在集合$\{|x_1|\leqslant 0.01, |x_2|\leqslant 0.01\}$内取值。我们可利用定理 10.3 提供的终极边界和 $\theta=0.9$ 选择 μ。Lyapunov 函数 $V(x)=x^{\mathrm{T}}Px$ 满足式(10.28)，其中 $\alpha_1(r)=\lambda_{\min}(P)r^2$，$\alpha_2(r)=\lambda_{\max}(P)r^2$，$\alpha_3(r)=r^2$。因而，

$$b(\mu) = \alpha_1^{-1}\left(\alpha_2\left(\alpha_3^{-1}\left(0.25\mu\frac{(1-\kappa_0)}{\theta}\right)\right)\right) \approx 0.8\sqrt{\mu}$$

选择$\sqrt{\mu}<\frac{0.01}{0.8}$以确保球域$\{\|x\|\leqslant b\}$在集合$\{|x_1|\leqslant 0.01, |x_2|\leqslant 0.01\}$内。一个对 μ 的较

⊖ 回头看具有同样参数的例 9.4，$\left|\frac{c-\hat{c}}{\hat{c}}\right|$就必须比 0.3951 小。

小保守的估计可以通过分析$\{\|\mathbf{x}\|\leqslant b\}$内的轨线获得。可以看出，这个集合内的轨线收敛在一个平衡点$\left(\bar{x}_1\approx\mu\dfrac{(0.8c-1)}{2.25c},\ \bar{x}_2=0\right)$[⊖]处。当$c\in[0.5,\ 2]$时，$\left|\mu\dfrac{(0.8c-1)}{2.25c}\right|\leqslant 0.53\mu$，因此只要选择$\mu<\dfrac{0.01}{0.53}$。图 10.9 显示了$b_0=0.01$，$c=0.5$，$\mu=0.01$时的仿真结果。图 10.9a 是当$\theta(0)=\dot{\theta}(0)=0$时$\theta$的响应；图 10.9b 显示了滑模控制下相轨线在有限时间内到达切换面$w=0$，然后沿切换面滑动到原点。尽管这个控制器中$w\dot{w}$不为负，但可以看出当$\beta|w|\geqslant\mu$时，$w\dot{w}\leqslant -w^2$。


256

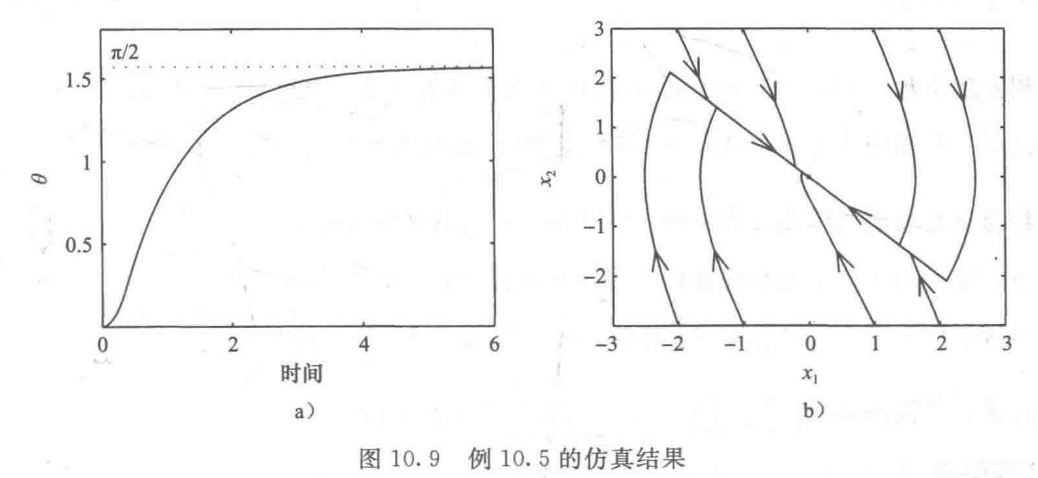


图 10.9 例 10.5 的仿真结果

10.3 高增益反馈

在处理不确定性模型的镇定和干扰抑制方面，高增益反馈是一个经典的工具。10.1 节中的滑模控制和 10.2 节中的 Lyapunov 再设计都可以用高增益反馈来替代。

先从滑模控制开始，假设定理 10.1 中的条件都满足，将式(10.13)中的反馈控制$v=-\beta(x)\mathrm{Sat}\left(\dfrac{s}{\mu}\right)$换成为

$$v=-\frac{\beta(x)s}{\mu} \tag{10.31}$$

这时$V=\dfrac{1}{2}s^{\mathrm{T}}s$的导数满足：

$$\begin{aligned}\dot{V}&=-\frac{\beta(x)}{\mu}s^{\mathrm{T}}G(x)s+s^{\mathrm{T}}\Delta(t,x,\nu)\\&\leqslant-\frac{\beta(x)}{\mu}\lambda_{\min}(G(x))\|s\|^2+\lambda_{\min}(G(x))\varrho(x)\|s\|+\lambda_{\min}(G(x))\kappa_0\frac{\beta(x)}{\mu}\|s\|^2\\&=\lambda_{\min}(G(x))\left[-\left(\frac{\|s\|}{\mu}-1\right)\beta(x)(1-\kappa_0)\|s\|-\beta_0(1-\kappa_0)\|s\|\right]\\&\leqslant-\lambda_0\beta_0(1-\kappa_0)\|s\|,\quad s\geqslant\mu\end{aligned}$$

⊖ 在球域$\{\|x\|\leqslant b\}$内的分析中用到了下列事实：只要$\beta|w|\geqslant\mu$，β几乎是一个常数，则$w\dot{w}\leqslant -w^2$。因此，轨线将在有限时间内进入集合$\{\beta|w|\leqslant\mu\}$。

因此，轨线在有限时间内到达了边界层$\{\|s\|\leqslant\mu\}$。此后，因为在边界层内 $\text{Sat}\left(\frac{s}{\mu}\right)=\frac{s}{\mu}$，所以
257 它的分析与滑模控制完全相同。因而定理 10.1 和定理 10.2 对高增益反馈式(10.31)同样成立。

将滑模控制和高增益反馈做对比是很有意义的。方便起见，我们这里仅考虑单输入系统且控制器中 $\psi=0$ 的情况，无论是滑模控制 $u=-\beta(x)\text{sat}\left(\frac{s}{\mu}\right)$，还是高增益反馈控制 $u=-\frac{\beta(x)s}{\mu}$，都将轨线驱动到了边界层$\{|s|\leqslant\mu\}$并保持在那里，但是高增益反馈更快，这是因为 $\dot{s}$ 的方程是

$$\mu\dot{s}=-G(x)s+\mu\Delta$$

在方程左边出现了 μ，μ 越小表示 s 将越快速地到达边界层。快速到达边界层是以阻止控制在瞬态阶段作用为代价的。这与在 $|u|\leqslant\beta$ 阶段的滑动模型控制不同。在 $u=-\beta\text{sat}\left(\frac{s}{\mu}\right)$ 中，减小稳态误差是通过减小 μ 取得的，而减小 μ 不会增加控制的幅值，然而在控制 $u=-\beta\frac{s}{\mu}$ 作用下，通过减小 μ 来减小稳态误差将会导致控制在初始时刻遭受大的阻尼。这些差别将在下面例子中说明。请读者注意 β 是常数时的特殊情况，滑模控制 $u=-\beta\text{sat}\left(\frac{s}{\mu}\right)$ 可以看作线性高增益反馈控制 $-\left(\frac{\beta}{\mu}\right)s$ 在 $\pm\beta$ 处达到饱和的饱和函数。

例 10.6 在例 10.1 中，我们设计了滑模控制

$$u=-(2.5+2|\dot{\theta}|)\text{sat}\left(\frac{s}{\mu}\right)$$

其中，$s=\theta-\frac{\pi}{2}+\dot{\theta}$，该控制使得单摆稳定在 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 处。相对应的高增益反馈控制是

$$u=-(2.5+2|\dot{\theta}|)\left(\frac{s}{\mu}\right)$$

图 10.10 比较了在 $b=0.01$，$c=0.5$，$\mu=0.1$ 时两种控制器的作用。图 10.10a 显示了应用高增益反馈控制，s 较快地到达边界层。图 10.10b 给出了滑模控制信号，图 10.10c 显示了高增益反馈的控制信号，可以看出它很快就衰减了。

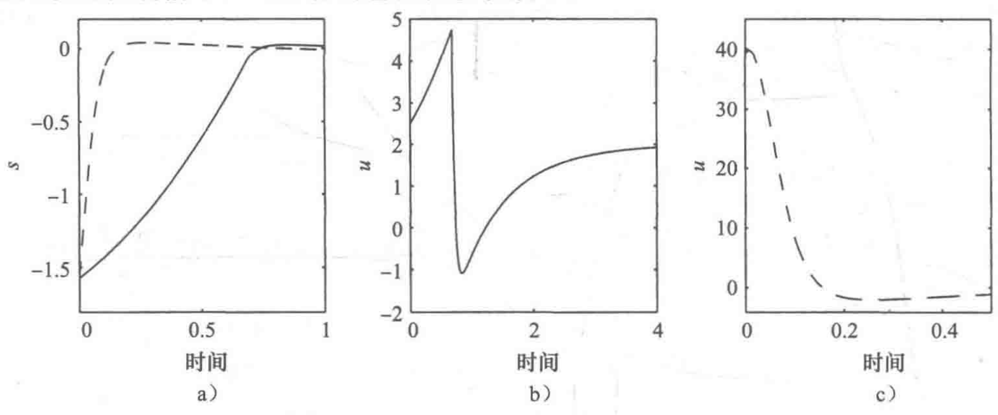


图 10.10 当 $\theta(0)=\dot{\theta}(0)=0$ 时，在滑模控制器 $u=-(2.5+2|\dot{\theta}|)\text{sat}\left(\frac{s}{0.1}\right)$(实线)和高增益反馈控制 $u=-(2.5+2|\dot{\theta}|)\left(\frac{s}{0.1}\right)$(虚线)下例 10.6 的比较 ◀

现在回到 Lyapunov 再设计，假设定理 10.3 中所有条件都满足，用

$$v=-\frac{\beta^2(x)w}{\mu} \tag{10.32}$$

来代替 $v=-\beta(x)\mathrm{Sat}\left(\frac{\beta(x)w}{\mu}\right)$。当 $\beta(x)\|w\|\leqslant\mu$ 时，10.2 节用这个控制证明了 $\dot{V}$ 满足式(10.27)。这里唯一的区别就是式(10.32)对所有的 w 都有效。因此，式(10.27)仍然满足，也就是说在高增益反馈控制(式(10.32))下，定理 10.3 和定理 10.4 仍然成立。 258

10.4 练习

10.1 对下述的每个系统，利用滑模控制设计局部 Lipschitz 的全局镇定状态反馈控制律。常数 θ_1、θ_2 和函数 $q(t)$ 满足 $0\leqslant\theta_1\leqslant a$，$0<b\leqslant\theta_2\leqslant c$，$|q(t)|\leqslant d$，其中常数 a、b、c、d 已知。要求证明所设计的控制器确实镇定了系统，其中 $\mu<\mu^*$，$\mu^*>0$ 是一个常数(不需要估计 μ^*)。

(1) $\dot{x}_1=x_2+2\sin x_1$，$\dot{x}_2=\theta_1 x_1^2+\theta_2 u$

(2) $\dot{x}_1=x_2+\sin x_1$，$\dot{x}_2=\theta_1 x_1 x_2+u$

(3) $\dot{x}_1=(1+x_1^2)x_2$，$\dot{x}_2=x_1+\theta_2 u$

(4) $\dot{x}_1=x_1^2+x_2$，$\dot{x}_2=\theta_1 h(x)+u$，$|h(x)|\leqslant\|x\|$

(5) $\dot{x}_1=x_1^3+x_2$，$\dot{x}_2=q(t)x_3+u$，$\dot{x}_3=x_1-x_3$

(6) $\dot{x}_1=x_1-\theta_2 u$，$\dot{x}_2=2x_2+\theta_2 u$

10.2 对于下面每个系统，利用滑模控制设计一个局部 Lipschitz 的状态反馈控制，使得对给定的 $\delta_1>0$，能实现全局终极有界，即 $x(t)$最终属于集合$\{|x_1|\leqslant\delta_1,\ |x_2|\leqslant\delta_1\}$。常数 θ_1、θ_2 和函数 $q(t)$ 满足 $0\leqslant\theta_1\leqslant a$，$0<b\leqslant\theta_2\leqslant c$，$|q(t)|\leqslant d$，其中常数 a、b、c、d 已知，μ 应该根据 δ_1 来选取。 259

(1) $\dot{x}_1=x_1 x_2$，$\dot{x}_2=x_1+\theta_2 u$

(2) $\dot{x}_1=x_2$，$\dot{x}_2=\sin x_1+u+q(t)$

(3) $\dot{x}_1=\sin x_1+x_2$，$\dot{x}_2=u+q(t)$

(4) $\dot{x}_1=x_1-\theta_2 u+q(t)$，$\dot{x}_2=2x_2+\theta_2 u-q(t)$

(5) $\dot{x}_1=-x_1+\tanh(x_2)$，$\dot{x}_2=x_2+x_3$，$\dot{x}_3=u+q(t)$

(6) $\dot{x}_1=-x_1+\tanh(x_2)$，$\dot{x}_2=\theta_1 x_2+u_1$，$\dot{x}_3=u_2+q(t)$

10.3 用 Lyapunov 再设计方法再做习题 10.1。

10.4 用 Lyapunov 再设计方法再做习题 10.2。

10.5 考虑单摆系统，其悬挂点受到一个时变有界水平加速度的干扰，状态模型为

$$\dot{x}_1=x_2,\quad \dot{x}_2=-\sin x_1-bx_2+cu+h(t)$$

其中，$b\in[0,\ 0.4]$，$c\in[0.5,\ 1.5]$，$|h(t)|\leqslant 1$。设计局部 Lipschitz 的状态反馈控制，使得对任意初始状态，存在有限时间 T，当 $t\geqslant T$ 时，$x(t)\in\{|x_1|\leqslant 0.01,\ |x_2|\leqslant 0.01\}$。要求分别用如下方法设计控制器：

(1) 滑模控制　　(2) Lyapunov 再设计方法　　(3) 高增益反馈

10.6 考虑磁悬浮系统式(A.29)，其中不确定参数 $b\in[0,\ 0.1]$，$c\in[0.8,\ 1.2]$，当有约束 $u\in[-2,\ 0]$时，如果 $r\in[0.5,\ 1.5]$，要求将 x_1 调节到使得稳态误差满足$|x_1-$

$r|\leqslant 0.01$。用如下方法设计一个局部 Lipschitz 的状态反馈控制器：

(1) 滑模控制　　(2) Lyapunov 再设计方法

10.7 考虑磁悬浮系统，见式(A.30)～(A.32)，其中 $\alpha=1.5$，$\beta=2$，不确定参数 $b\in[0,\ 0.1]$，$c\in[0.8,\ 1.2]$。要求设计一个局部 Lyapunov 状态反馈控制器，调节 x_1 到 1，允许稳态误差 $|x_1-1|\leqslant 0.01$。提示：通过标称参数 $\hat{b}=0$ 和 $\hat{c}=1$ 将系统转换为控制形式。

10.8 考虑生化反应器，见式(A.19)，不确定项为 $\nu(x_2)$，已知不确定项的上界为 $\nu_{\max}$，即在研究的区域内有 $\nu(x_2)\leqslant\nu_{\max}$，试设计一个状态反馈控制器将系统镇定在 $x=\mathrm{col}(1,\ 1)$ 处。

(1) 证明：在区域 $x_1>0$ 内，进行变量变换 $\eta=\dfrac{x_2-\alpha}{x_1}$，$\xi=x_2$，可将系统转换为正规型。

(2) 令 $\alpha=23$，$\nu_{\max}=1.5$，采用滑模控制，设计一个形如 $u=-k\mathrm{sat}\left(\dfrac{x_2-1}{\mu}\right)$ 的控制器，其中 k 和 μ 是正常数，使系统稳定在平衡点 $x=\mathrm{col}(1,\ 1)$ 附近的区域 $O(\mu)$，且吸引域包含了集合 $\{0.1\leqslant x_1\leqslant 2,\ 0\leqslant x_2\leqslant 2\}$。

260

(3) 在区域 $\{x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0\}$ 中，画出闭环系统的相图，其中 $\nu(x_2)$ 由式(A.20)定义，参数为 $\alpha=23$，$\beta=0.39$，$\gamma=0.57$，$\mu=0.01$，并与 $u=1$ 时的相图做比较。

10.9 考虑微静电执行器，见式(A.33)，其中不确定项 $\zeta\in(0,\ 0.5]$ 和 $T\in[0.1,\ 0.5]$。利用滑模控制，设计一个局部 Lipschitz 的状态反馈控制器，使平板镇定在 $x_1=r$ 处，其中 $r\in[0.1,\ 0.9]$。取 $r=0.5$，$\zeta=0.1$，$T=0.2$，对闭环系统进行仿真。证明控制器不仅能达到终极有界，还能实现镇定。

10.10 考虑倒立摆系统，见式(A.47)，其中不确定参数 $a\in[0.5,\ 1.5]$，利用滑模控制设计一个局部 Lipschitz 的状态反馈控制器，使单摆在 $\theta=0$ 处稳定。当 $x(0)=\mathrm{col}(x_1(0),\ 0)$ 时，通过仿真找到使单摆镇定的最大 $|x_1(0)|$，其中取 $a=1$。

10.11 文献[39]给出了一个拖曳作业的水下机器人简化模型，具体如下：

$$\ddot{\psi}+a\dot{\psi}|\dot{\psi}|=u$$

其中，ψ 是航向角，u 是规范化转矩，参数 $a\in[0.5,\ 1.5]$。利用滑模控制设计一个局部 Lipschitz 的状态反馈控制器全局镇定系统的平衡点($\psi=\psi_r$，$\dot{\psi}=0$)。

10.12 考虑机械臂，见式(A.34)，令 $\hat{M}$、$\hat{C}$ 和 $\hat{g}$ 分别代表 M、C 和 g 的标称模型。为了采用滑模控制，取 $s=\Lambda(q-q_r)+\dot{q}$，其中 q_r 是期望的设定目标，$\Lambda=\Lambda^{\mathrm{T}}>0$。

(1) 证明采用下述滑模控制，当 μ 足够小时，能够取得全局实用稳定

$$u=-\beta(x)\mathrm{Sat}\left(\frac{s}{\mu}\right)\quad\text{或}\quad u=\hat{C}\dot{q}+\hat{g}-\hat{M}\Lambda\dot{q}-\beta(x)\mathrm{Sat}\left(\frac{s}{\mu}\right)$$

并讨论在不同情况下 β 的选择范围。这两种控制是否可以实现镇定？

(2) 将这两种控制器应用于由式(A.36)和式(A.37)所定义的双关节机械臂，其标称数据由式(A.38)给出而实际数据由式(A.39)给出。要求在控制有约束条件 $|u_1|\leqslant 6\,000$ 和 $|u_1|\leqslant 5\,000$ 情况下，调整机械臂到 $q_r=\left(\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ 处，比较两种控制器的性能。

10.13　考虑式(A.49)～(A.52)描述的 TORA 系统，目的是设计一个滑模控制器[⊖]镇定原点。 261

(1) 证明

$$\eta_1 = x_1, \quad \eta_2 = x_3, \quad \eta_3 = x_4 + \frac{mLx_2\cos x_1}{m+M}, \quad \xi = x_2$$

是一个全局微分同胚，它将系统转化为规范型：

$$\dot{\eta}_1 = \xi, \quad \dot{\eta}_2 = \frac{-mL\xi\cos\eta_1}{m+M} + \eta_3, \quad \dot{\eta}_3 = \frac{-k\eta_2}{m+M}$$

$$\dot{\xi} = \frac{1}{\Delta(\eta_1)}[(m+M)u - mL\cos\eta_1(mL\xi^2\sin\eta_1 - k\eta_2)]$$

(2) 当 k_1 和 k_2 是正常数时，证明函数

$$V_0(\eta) = \frac{1}{2}\left[k_1\eta_1^2 + \frac{(m+M)k_2}{mL}\eta_2^2 + \frac{(m+M)^2k_2}{mLk}\eta_3^2\right]$$

的导数为 $\dot{V}_0 = -\phi(\eta)\xi$，其中 $\phi(\eta) = -k_1\eta_1 + k_2\eta_2\cos\eta_1$。

(3) 当 $\xi = \phi(\eta)$ 时，证明 $\dot{\eta}$ -方程的原点 $\eta = 0$ 是全局渐近稳定和局部指数稳定的。

(4) 针对(3)，取

$$s = \xi - \phi(\eta) = \xi + k_1\eta_1 - k_2\eta_2\cos\eta_1 = x_2 + k_1x_1 - k_2x_3\cos x_1$$

注意：这个 s 是独立于系统参数的，选择 $\beta(x)$，使得对充分小的 μ，

$$u = -\beta(x)\,\text{sat}\left(\frac{s}{\mu}\right)$$

能全局镇定原点。

10.14　用式(A.53)的数据对 TORA 系统式(A.49)～(A.52)进行仿真，将习题 9.13 中所采用的无源控制与上题中的滑模控制做比较。在比较中，习题 9.13 中的函数 ϕ_1 和 ϕ_2 取为 $\phi_i(y) = U_i\,\text{sat}(k_iy)$，则 $u = -U_1\,\text{sat}(k_1x_1) - U_2\,\text{sat}(k_2x_2)$。在滑模控制 $u = -\beta\,\text{sat}\left(\frac{s}{\mu}\right)$ 中，β 取为常数。因此它仅能实现区域稳定，与无源控制下的全局稳定不同。比较的初始值应处于滑模控制的吸引域内。我们对这两种控制器都有约束条件 $|u| \leqslant 0.1$，这可以通过取 $\beta = 0.1$ 和 $U_1 + U_2 = 0.1$ 得到满足。

(1) 在初始状态 $x(0) = (\pi, 0, 0.025, 0)$ 下，调节无源控制的参数 k_1、k_2、U_1 和 U_2，使调整时间尽量小，大约为 30s。

(2) 在初始状态 $x(0) = (\pi, 0, 0.025, 0)$ 下，调整滑模控制的参数 k_1、k_2、μ，使调整时间尽量小，大概为 4s。

(3) 比较这两种控制器的性能。 262

⊖ 这个设计用到了文献[121]中的无源控制思想。

第11章

非线性观测器

本章研究观测器设计问题，观测器是用来估计系统状态的。考虑下列非线性系统

$$\dot{x} = f(x,u), \quad y = h(x)$$

其中，u 是给定的输入，y 是可以测量的输出。观测器一般采用如下形式：

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x},u) + H(\cdot)[y - h(\hat{x})]$$

其中，$H(\cdot)$称为观测器增益，它可以是常数矩阵也可以是时变矩阵。观测器方程中的 $f(\hat{x}, u)$是一个从原系统复制过来的预测项，而 $H[y-h(\hat{x})]$称为修正项[⊖]，它依赖于由 $h(\hat{x})$和输出 y 之间的偏差。对于线性系统

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx$$

其估计误差(也称观测误差)为$\tilde{x}=x-\hat{x}$满足线性方程

$$\dot{\tilde{x}} = (A - HC)\,\tilde{x}$$

如果(A, C)可检测，也就是(A, C)是可观的或者(A, C)不可观但其不可观的特征值具有负实部，则可以设计矩阵 H，使得 $A-HC$ 是 Hurwitz 的，这时$\lim\limits_{t\to\infty}\tilde{x}(t)=0$。因此，当 t 趋于无穷大时，估计$\hat{x}(t)$将以渐近方式趋近于 $x(t)$。而对于非线性系统，本章将给出几种不同的方法来设计非线性观测器。前两节介绍的方法是基于线性化的。11.1 节将给出一种局部观测器的设计，它是基于非线性系统 $\dot{x}=f(x, u)$的平衡点做线性化，因此只有当 x 和 u 足够靠近平衡点的时候才有效，并要求$\|\tilde{x}(0)\|$足够小。11.2 节叙述的观测器是非线性估计理论中扩展 Kalman 滤波器的一种确定型版本[⊜]。这里要对估计$\hat{x}$进行线性化处理，因此观测器增益是时变的，而且由于 $H(t)$依赖于$\hat{x}(t)$，所以需要实时在线地计算。这种观测器仍然需要初始误差$\|\tilde{x}(0)\|$足够小，但是 $x(t)$和 $u(t)$没有大小上限制，只要求微分方程的解有定义且其轨线不会在有限时间逃逸即可。11.3 节中设计的非线性系统观测器要用到 8.3 节中的观测器型，并且和线性观测器一样，其误差方程是线性的。因此，观测误差$\tilde{x}$是全局收敛的，即对所有的初始值$\tilde{x}(0)$，$\lim\limits_{t\to\infty}\tilde{x}(t)=0$。同时，证明了这种设计适用于更一般的系统，这类系统可以再有一个满足Lipschitz条件的非线性项，当然其 Lipschitz 常数需要足够小[⊜]。

前三节的观测器都要求非线性函数 f 和 h 是已知的，因为在这三种情况下，我们将证明关于观测误差的动态系统，其原点是指数稳定的。从 4.3 节的鲁棒性分析可知，若 f 和 h 发生充分小的有界扰动，那么估计误差$\tilde{x}(t)$将终极有界。然而，这些观测器不能保证出现大扰动的情况下依然有效。11.4 节将高增益观测器应用于一类特殊的非线性系统，相对于部分在 11.1 节～11.3 节中给出的观测器不容许的不确定性的部分情形，这种观测器具有鲁棒性。这种鲁棒性是通过足够高的观测器增益实现的，它使得观测误差动态比系统 $\dot{x}=f(x, u)$的动态变化得更迅速。正如 12.4 节中所述的，当用观测器输出完成反馈控制

⊖ 在估计理论中也称为更新项。

⊜ 见文献[47]或者[127]。

⊜ 更多的非线性观测器设计方法可以参阅文献[5, 46, 72, 123]。

时，这种观测误差的快速性具有重要作用。

11.1 局部观测器

考虑非线性系统

$$\dot{x} = f(x,u), \quad y = h(x) \tag{11.1}$$

以及它的观测器

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x},u) + H[y - h(\hat{x})] \tag{11.2}$$

其中，$x \in R^n$，$u \in R^m$ 和 $y \in R^p$，f 和 h 二阶连续可微，H 是 $n \times p$ 的常量矩阵，则观测误差 $\tilde{x} = x - \hat{x}$ 满足方程：

$$\dot{\tilde{x}} = f(x,u) - f(\hat{x},u) - H[h(x) - h(\hat{x})] \tag{11.3}$$

方程(11.3)在 $\tilde{x} = 0$ 处有一个平衡点，我们的目标是设计一个观测器增益矩阵 H，使这个平衡点指数稳定。我们欲对充分小的 $\|\tilde{x}(0)\|$ 寻求一种局部的解决方案。对式(11.3)在 $\tilde{x} = 0$ 处线性化可得线性时变系统：

264

$$\dot{\tilde{x}} = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x(t),u(t)) - H\frac{\partial h}{\partial x}(x(t))\right]\tilde{x} \tag{11.4}$$

对于这样一个时变系统要设计一个常量矩阵 H 去镇定原点几乎是不可能的，因为这需要它对某个范围内的所有初始值 $x(0)$ 和输入 $u(t)$ 都有效。假设存在向量 $x_{ss} \in R^n$ 和 $u_{ss} \in R^m$，使得当 $u = u_{ss}$ 时系统式(11.1)在 $x = x_{ss}$ 处有一个平衡点，且在此平衡点处输出 $y = 0$，即

$$0 = f(x_{ss}, u_{ss}), \quad 0 = h(x_{ss})$$

另外，对任意给定的 $\varepsilon > 0$，假设存在 $\delta_1 > 0$，$\delta_2 > 0$，使得

$$\|x(0) - x_{ss}\| \leqslant \delta_1, \quad \|u(t) - u_{ss}\| \leqslant \delta_2, \quad \forall t \geqslant 0$$

且 $x(t)$ 对一切 $t \geqslant 0$ 都有定义，还满足 $\|x(t) - x_{ss}\| \leqslant \varepsilon$。

令

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_{ss}, u_{ss}), \quad C = \frac{\partial h}{\partial x}(x_{ss})$$

假设(A, C)可检测，于是存在 H，使得 $A - HC$ 是 Hurwitz 矩阵。

引理 11.1　如果 $\|\tilde{x}(0)\|$，$\|x(0) - x_{ss}\|$ 和 $\sup_{t \geqslant 0}\|u(t) - u_{ss}\|$ 都充分小，则

$$\lim_{t \to \infty} \tilde{x}(t) = 0$$

证明： 由式(B.6)，我们有

$$f(x,u) - f(\hat{x},u) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x - \sigma\tilde{x}, u)\mathrm{d}\sigma\,\tilde{x}$$

因此，

$$\begin{aligned}
&\|f(x,u) - f(\hat{x},u) - A\tilde{x}\| \\
&= \left\|\int_0^1 \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x - \sigma\tilde{x}, u) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,u) + \frac{\partial f}{\partial x}(x,u) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_{ss}, u_{ss})\right]\mathrm{d}\sigma\,\tilde{x}\right\| \\
&\leqslant L_1\left(\frac{1}{2}\|\tilde{x}\| + \|x - x_{ss}\| + \|u - u_{ss}\|\right)\|\tilde{x}\|
\end{aligned}$$

其中，L_1 是 $\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]$ 的 Lipschitz 常数。可以类似地推出

265

$$\|h(x)-h(\hat{x})-C\tilde{x}\|\leqslant L_2\left(\frac{1}{2}\|\tilde{x}\|+\|x-x_{ss}\|\right)\|\tilde{x}\|$$

其中，L_2 是$\left[\frac{\partial h}{\partial x}\right]$的 Lipschitz 常数。因此，观测误差的动态满足

$$\dot{\tilde{x}}=(A-HC)\tilde{x}+\Delta(x,u,\tilde{x}) \tag{11.5}$$

其中，

$$\|\Delta(x,u,\tilde{x})\|\leqslant k_1\|\tilde{x}\|^2+k_2(\varepsilon+\delta_2)\|\tilde{x}\|$$

k_1 和 k_2 为两个正常数。令 $V=\tilde{x}^{\mathrm{T}}P\tilde{x}$，其中，$P$ 是 Lyapunov 方程 $P(A-HC)+(A-HC)^{\mathrm{T}}P=-I$ 的正定解。将 V 作为式(11.5)的备选 Lyapunov 函数，得

$$\dot{V}\leqslant-\|\tilde{x}\|^2+c_4k_1\|\tilde{x}\|^3+c_4k_2(\varepsilon+\delta_2)\|\tilde{x}\|^2$$

其中，$c_4=2\|P\|$。因此当 $c_4k_1\|\tilde{x}\|\leqslant\frac{1}{3}$，$c_4k_2(\varepsilon+\delta_2)\leqslant\frac{1}{3}$时，有

$$\dot{V}\leqslant-\frac{1}{3}\|\tilde{x}\|^2$$

这表明当$\|\tilde{x}(0)\|$，ε 和 δ_2 充分小时，估计误差随 t 趋于无穷大而收敛到 0。要 ε 充分小，可以通过选取小的 δ_1 和 δ_2 来保证。 □

11.2 扩展 Kalman 滤波器

考虑非线性系统

$$\dot{x}=f(x,u),\quad y=h(x) \tag{11.6}$$

其中，$x\in R^n$，$u\in R^m$，$y\in R^p$，f 和 h 关于其自变量是二阶连续可微的，对于任意 $t\geqslant0$，$x(t)$和 $u(t)$都有界。考虑观测器

$$\dot{\hat{x}}=f(\hat{x},u)+H(t)[y-h(\hat{x})] \tag{11.7}$$

其中，$H(t)$是时变的观测器增益，则观测误差$\tilde{x}=x-\hat{x}$满足方程

$$\dot{\tilde{x}}=f(x,u)-f(\hat{x},u)-H(t)[h(x)-h(\hat{x})] \tag{11.8}$$

将等式右边在$\tilde{x}=0$ 处做 Taylor 展开，沿着$\hat{x}$求 Jacobi 矩阵，则式(11.8)可化为

$$\dot{\tilde{x}}=[A(t)-H(t)C(t)]\tilde{x}+\Delta(\tilde{x},x,u) \tag{11.9}$$

其中，

$$A(t)=\frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}(t),u(t)),\quad C(t)=\frac{\partial h}{\partial x}(\hat{x}(t)) \tag{11.10}$$

和

266

$$\Delta=f(x,u)-f(\hat{x},u)-A(t)\tilde{x}-H(t)[h(x)-h(\hat{x})-C(t)\tilde{x}]$$

与 Kalman 滤波器设计类似[⊖]，取观测器增益 H 为

$$H(t)=P(t)C^{\mathrm{T}}(t)R^{-1} \tag{11.11}$$

其中，$P(t)$为 Riccati 微分方程

$$\dot{P}=AP+PA^{\mathrm{T}}+Q-PC^{\mathrm{T}}R^{-1}CP,\quad P(t_0)=P_0 \tag{11.12}$$

的解，P_0、Q、R 都是正定对称矩阵。需要强调的是，因为 $A(t)$和 $C(t)$都依赖于$\hat{x}(t)$，要

⊖ 可参阅文献[82]。

将 Riccati 方程式(11.12)和观测器方程式(11.7)作为方程组同时求解。

假设 11.1 对于$\forall t \geqslant t_0$，方程式(11.12)有解$P(t)$，且存在正常数α_1和α_2，使下列不等式成立：

$$\alpha_1 I \leqslant P(t) \leqslant \alpha_2 I \tag{11.13}$$

这个假设对于扩展的 Kalman 滤波器很重要，但却很难证明[1]。尽管从 Riccati 方程的性质可知，若$A(t)$和$C(t)$有界，则$(A(t), C(t))$一致可观，假设就能成立[2]，但矩阵$A(t)$和$C(t)$是实时产生的(即依赖$\hat{x}(t)$和$u(t)$的)，我们无法离线检验其可观性。

引理 11.2 若假设 11.1 成立，则式(11.9)的原点指数稳定，且存在正常数c、k、λ，使得

$$\|\tilde{x}(0)\| \leqslant c \quad \Rightarrow \quad \|\tilde{x}(t)\| \leqslant k\mathrm{e}^{-\lambda(t-t_0)}, \quad \forall\, t \geqslant t_0 \geqslant 0 \tag{11.14}$$

证明： 由式(B.6)

267

$$\|f(x,u)-f(\hat{x},u)-A(t)\,\tilde{x}\| = \left\|\int_0^1\left[\frac{\partial f}{\partial x}(\sigma\,\tilde{x}+\hat{x},u)-\frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x},u)\right]\mathrm{d}\sigma\,\tilde{x}\right\| \leqslant \frac{1}{2}L_1\|\tilde{x}\|^2$$

$$\|h(x)-h(\hat{x})-C(t)\,\tilde{x}\| = \left\|\int_0^1\left[\frac{\partial h}{\partial x}(\sigma\,\tilde{x}+\hat{x})-\frac{\partial h}{\partial x}(\hat{x})\right]\mathrm{d}\sigma\,\tilde{x}\right\| \leqslant \frac{1}{2}L_2\|\tilde{x}\|^2$$

$$\|C(t)\| = \left\|\frac{\partial h}{\partial x}(x-\tilde{x})\right\| \leqslant \left\|\frac{\partial h}{\partial x}(0)\right\| + L_2(\|x\|+\|\tilde{x}\|)$$

其中，L_1和L_2分别是$\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]$和$\left[\frac{\partial h}{\partial x}\right]$的 Lipschitz 常数，存在正常数$k_1$、$k_2$，使得$\|\Delta(\tilde{x}, x, u)\| \leqslant k_1\|\tilde{x}\|^2 + k_2\|\tilde{x}\|^3$[3]。由假设 11.1，对于所有$t \geqslant t_0$，存在$P^{-1}(t)$，且满足下述不等式

$$\alpha_3 I \leqslant P^{-1}(t) \leqslant \alpha_4 I \tag{11.15}$$

其中，α_3和α_4为正常数。取$V=\tilde{x}^{\mathrm{T}}P^{-1}\tilde{x}$作为式(11.9)的备选 Lyapunov 函数，注意：$\frac{\mathrm{d}P^{-1}}{\mathrm{d}t} = -P^{-1}\dot{P}P^{-1}$，因而有

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \tilde{x}^{\mathrm{T}}P^{-1}\,\dot{\tilde{x}} + \dot{\tilde{x}}^{\mathrm{T}}P^{-1}\,\tilde{x} + \tilde{x}^{\mathrm{T}}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P^{-1}\,\tilde{x} \\
&= \tilde{x}^{\mathrm{T}}P^{-1}(A-PC^{\mathrm{T}}R^{-1}C)\,\tilde{x} + \tilde{x}^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}-C^{\mathrm{T}}R^{-1}CP)P^{-1}\,\tilde{x} \\
&\quad - \tilde{x}^{\mathrm{T}}P^{-1}\dot{P}P^{-1}\,\tilde{x} + 2\,\tilde{x}^{\mathrm{T}}P^{-1}\Delta \\
&= \tilde{x}^{\mathrm{T}}P^{-1}(AP+PA^{\mathrm{T}}-PC^{\mathrm{T}}R^{-1}CP-\dot{P})P^{-1}\,\tilde{x} - \tilde{x}^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}R^{-1}C\,\tilde{x} + 2\,\tilde{x}^{\mathrm{T}}P^{-1}\Delta
\end{aligned}$$

用式(11.12)替换$\dot{P}$可得

$$\dot{V} = -\,\tilde{x}^{\mathrm{T}}(P^{-1}QP^{-1}+C^{\mathrm{T}}R^{-1}C)\,\tilde{x} + 2\,\tilde{x}^{\mathrm{T}}P^{-1}\Delta$$

由式(11.15)可得，$P^{-1}QP^{-1}$对t正定，$C^{\mathrm{T}}R^{-1}C$半正定，因此它们的和对t为正定矩阵。因此，存在正常数c_1和c_2使$\dot{V}$满足不等式

$$\dot{V} \leqslant -c_1\|\tilde{x}\|^2 + c_2k_1\|\tilde{x}\|^3 + c_2k_2\|\tilde{x}\|^4$$

当$\|\tilde{x}\| \leqslant r$时，有

---

[1] 对于特殊类型的系统，其 Kalman 滤波器的收敛性可参阅文献[12，79]。

[2] 参阅文献[82]。

[3] 原文误为k_3。——译者注

$$\dot{V} \leqslant -\frac{1}{2}c_1\|\widetilde{x}\|^2$$

其中，r 为$-\frac{1}{2}c_1+c_2k_1y+c_2k_2y^2$ 的正根。由上面的不等式可看出原点是指数稳定的。 □

例 11.1 考虑系统

$$\dot{x} = A_1x + B_1[0.25x_1^2x_2 + 0.2\sin 2t], \quad y = C_1x$$

其中，

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_1 = [1 \quad 0]$$

我们先研究 $x(t)$的有界性。取 $V_1(x)=x^{\mathrm{T}}P_1x$，其中 $P_1=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$是 Lyapunov 方程 $P_1A_1+A_1^{\mathrm{T}}P_1=-I$ 的解，可证明，若 $x_1^2\leqslant\sqrt{2}$，则有

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &= -x^{\mathrm{T}}x + 2x^{\mathrm{T}}P_1B_1[0.25x_1^2x_2 + 0.2\sin 2t] \\ &\leqslant -\|x\|^2 + 0.5\|P_1B_1\|x_1^2\|x\|^2 + 0.4\|P_1B_1\|\|x\| \\ &= -\|x\|^2 + \frac{x_1^2}{2\sqrt{2}}\|x\|^2 + \frac{0.4}{\sqrt{2}}\|x\| \leqslant -0.5\|x\|^2 + \frac{0.4}{\sqrt{2}}\|x\|\end{aligned}$$

268

注意：$\min\limits_{x_1^2=\sqrt{2}} x^{\mathrm{T}}Px=\frac{\sqrt{2}}{b^{\mathrm{T}}P^{-1}b}=\sqrt{2}$，其中，$b=\mathrm{col}(1, 0)$[⊖]，则可得到 $\Omega=\{V_1(x)\leqslant\sqrt{2}\}\subset\{x_1^2\leqslant\sqrt{2}\}$。在 Ω 内，我们有

$$\dot{V}_1 \leqslant -0.5\|x\|^2 + \frac{0.4}{\sqrt{2}}\|x\| \leqslant -0.15\|x\|^2, \quad \forall \|x\| \geqslant \frac{0.4}{0.35\sqrt{2}} = 0.808\,1$$

因 $\lambda_{\max}(P_1)=1.707\,1$，故$(0.808\,1)^2\lambda_{\max}(P_1)<\sqrt{2}$。因此球域$\{\|x\|\leqslant 0.808\,1\}$包含在 Ω 内。这表明 $\dot{V}$ 在边界 $\partial\Omega$ 上是负定的。因此，Ω 是正不变的，对于所有 $x(0)\in\Omega$，$x(t)$是有界的。现在我们对 $x(0)\in\Omega$，设计一个扩展 Kalman 滤波器来估计 $x(t)$。取 $Q=R=P(0)=I$，这时 Riccati 方程式(11.12)成为

$$\dot{P} = AP + PA^{\mathrm{T}} + I - PC^{\mathrm{T}}CP, \quad P(0) = I$$

其中，

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1+0.5\,\hat{x}_1(t)\,\hat{x}_2(t) & -2+0.25\,\hat{x}_1^2(t) \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0]$$

取 $P=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$，扩展 Kalman 滤波器由下面 5 个方程一起确定

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 + p_{11}(y - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 &= -\hat{x}_1 - 2\,\hat{x}_2 + 0.25\,\hat{x}_1^2\,\hat{x}_2 + 0.2\sin 2t + p_{12}(y - \hat{x}_1) \\ \dot{p}_{11} &= 2p_{12} + 1 - p_{11}^2 \\ \dot{p}_{12} &= p_{11}(-1 + 0.5\,\hat{x}_1\,\hat{x}_2) + p_{12}(-2 + 0.25\,\hat{x}_1^2) + p_{22} - p_{11}p_{12} \\ \dot{p}_{22} &= 2p_{12}(-1 + 0.5\,\hat{x}_1\,\hat{x}_2) + 2p_{22}(-2 + 0.25\,\hat{x}_1^2) + 1 - p_{12}^2\end{aligned}$$

初始条件为$\hat{x}_1(0)$，$\hat{x}_2(0)$，$p_{11}(0)=1$，$p_{12}(0)=0$，$p_{22}(0)=1$。图 11.1 显示了仿真结果，

⊖ 见(B.3)。

其中 $x_1(0)=1$，$x_2(0)=-1$，$\hat{x}_1(0)=\hat{x}_2(0)=0$，注意：尽管初始偏差较大，但观测误差仍然会收敛到 0。◀

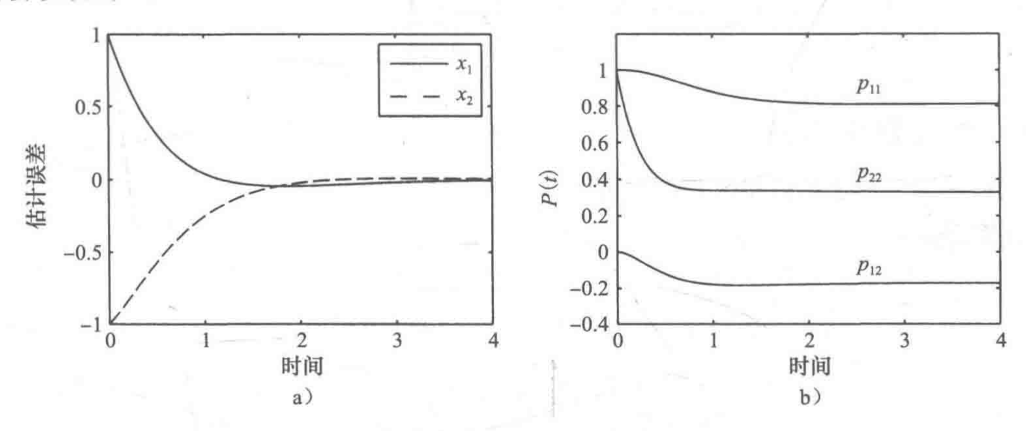


图 11.1　例 11.1 的仿真结果

11.3　全局观测器

考虑如下观测器形式的非线性系统

$$\dot{x} = Ax + \psi(u,y), \quad y = Cx \tag{11.16}$$

其中，$x \in R^n$，$u \in R^m$，$y \in R^p$，(A, C)可观，ψ 是局部 Lipschitz 的，对所有 $t \geqslant 0$，$x(t)$ 和 $u(t)$都有定义，式(11.16)的观测器写为

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + \psi(u,y) + H(y - C\hat{x}) \tag{11.17}$$

269

则观测误差$\tilde{x}=x-\hat{x}$满足线性方程

$$\dot{\tilde{x}} = (A - HC)\tilde{x}$$

选取 H 要使得 $A-HC$ 是 Hurwitz 矩阵，从而对任意的初始条件$\tilde{x}(0)$有$\lim\limits_{t\to\infty}\tilde{x}(t)=0$。我们称式(11.17)为具有线性误差动态的观测器。

现在考虑更一般的系统

$$\dot{x} = Ax + \psi(u,y) + \phi(x,u), \quad y = Cx \tag{11.18}$$

其中，(A, C)可观，ψ 和 ϕ 都是局部 Lipschitz 的，$x(t)$ 和 $u(t)$ 对于 $t \geqslant 0$ 都有定义，$\phi(x, u)$关于 x 对 u 是一致全局 Lipschitz 的，即对于所有的 x，z，u，有

$$\|\phi(x,u) - \phi(z,u)\| \leqslant L\|x - z\|$$

对式(11.18)，观测器取为

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + \psi(u,y) + \phi(\hat{x},u) + H(y - C\hat{x}) \tag{11.19}$$

选取 H 使 $A-HC$ 为 Hurwitz 矩阵。观测误差满足方程

$$\dot{\tilde{x}} = (A - HC)\tilde{x} + \phi(x,u) - \phi(\hat{x},u) \tag{11.20}$$

选取 $V=\tilde{x}^{\mathrm{T}}P\tilde{x}$为方程式(11.20)的备选 Lyapunov 函数，其中，矩阵 P 为 Lyapunov 方程 $P(A-HC)+(A-HC)^{\mathrm{T}}P=-I$ 的正定解，则

$$\dot{V} = -\tilde{x}^{\mathrm{T}}\tilde{x} + 2\tilde{x}^{\mathrm{T}}P[\phi(x,u) - \phi(\hat{x},u)] \leqslant -\|\tilde{x}\|^2 + 2L\|P\|\|\tilde{x}\|^2$$

270

因此，若

$$L < \frac{1}{2\|P\|} \tag{11.21}$$

则式(11.20)的原点是全局指数稳定的。此处 L 的界依赖于 P，进而依赖于 H。可以先给定 L，再设计满足式(11.21)的 H，或者使$\frac{1}{2\|P\|}$尽可能的大[⊖]。

11.4 高增益观测器

我们从一个例子出发研究高增益观测器。

例 11.2 考虑二维系统

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = \phi(x,u), \quad y = x_1$$

其中，$x=\text{col}(x_1, x_2)$，ϕ 是局部 Lipschitz 的，$x(t)$、$u(t)$对于 $t\geqslant 0$ 都是有界的。设观测器为

$$\dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + h_1(y-\hat{x}_1), \quad \dot{\hat{x}}_2 = \phi_0(\hat{x},u) + h_2(y-\hat{x}_1)$$

其中，$\phi_0(x, u)$为 $\phi(x, u)$的标称模型，不像前三节所讲的观测器那样，这里不再要求 ϕ_0 和 ϕ 相同，甚至可以取 $\phi_0=0$ 使观测器简化成线性的。无论如何取 ϕ_0，我们总假设存在非负常数 L 和 M，对于在研究区域内的(x, z, u)，下式成立：

$$|\phi_0(z,u)-\phi(x,u)| \leqslant L\|x-z\|+M$$

而一种特殊的情况是 $\phi_0=\phi$，如 ϕ 关于 x 对 u 是一致 Lipschitz 的，则上述不等式成立，且 $M=0$。观测误差$\tilde{x}=x-\hat{x}$满足方程

$$\dot{\tilde{x}} = A_o\tilde{x} + B\delta(x,\tilde{x},u)$$

其中，$A_o=\begin{bmatrix} -h_1 & 1 \\ -h_2 & 0 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，$\delta(x, \tilde{x}, u)=\phi(x, u)-\phi_0(\hat{x}, u)$。

我们把这个方程看作是对线性方程$\dot{\tilde{x}}=A_o\tilde{x}$叠加扰动的结果。若不存在 δ，只要设计 $H=\text{col}(h_1, h_2)$使 A_o 是 Hurwitz 矩阵，就可使观测误差渐近收敛。现在存在 δ，就需要考虑再设计，使得 H 能抵消 δ 对$\tilde{x}$的作用。设从 δ 到$\tilde{x}$的传递函数是

$$G_o(s) = \frac{1}{s^2+h_1s+h_2}\begin{bmatrix} 1 \\ s+h_1 \end{bmatrix}$$

如果可以理想地使 $G_o(s)$恒等于零，这时等于没有扰动的作用，因而观测是可以实现的。然而让 $G_o(s)$恒等于 0 是不可能的，于是我们只能选择 $h_2\gg h_1\gg 1$，使得$\sup\limits_{w\in R}\|G_0(\mathrm{j}w)\|$可以任意得小。特别地，取

271

$$h_1=\frac{\alpha_1}{\varepsilon}, \quad h_2=\frac{\alpha_2}{\varepsilon^2}$$

其中，α_1、α_2 和 $\varepsilon(\varepsilon\ll 1)$都是正常数，则

$$G_o(s) = \frac{\varepsilon}{(\varepsilon s)^2+\alpha_1\varepsilon s+\alpha_2}\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon s+\alpha_1 \end{bmatrix}$$

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}G_o(s)=0$。高增益观测器的干扰抑制特性可以通过在时域内观察误差的衰减看出来。

令

$$\eta_1=\frac{\tilde{x}_1}{\varepsilon}, \quad \eta_2=\tilde{x}_2 \tag{11.22}$$

则

⊖ 文献[108，109]给出了能满足这一目标的算法。

$$\varepsilon\dot{\eta} = F\eta + \varepsilon B\delta, \quad 其中\ F = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & 1 \\ -\alpha_2 & 0 \end{bmatrix} \tag{11.23}$$

因为 α_1 和 α_2 是正数，所以矩阵 F 是 Hurwitz 的。矩阵 A_o 和 $\frac{F}{\varepsilon}$ 的关系可由式(11.22)给出的相似变换得到，所以 A_o 的特征值是 F 特征值的 $\frac{1}{\varepsilon}$ 倍。根据方程式(11.23)和变量替换式(11.22)，可以得到关于观测误差的一些重要结论。由于 $|\delta| \leqslant L\|\tilde{x}\| + M \leqslant L\|\eta\| + M$，备选 Lyapunov 函数为 $V = \eta^{\mathrm{T}} P\eta$，其中 P 是方程 $PF + F^{\mathrm{T}}P = -I$ 的解，则

$$\varepsilon\dot{V} = -\eta^{\mathrm{T}}\eta + 2\varepsilon\eta^{\mathrm{T}}PB\delta \leqslant -\|\eta\|^2 + 2\varepsilon L\|PB\|\|\eta\|^2 + 2\varepsilon M\|PB\|\|\eta\|$$

选取 $\varepsilon L\|PB\| \leqslant \frac{1}{4}$，则

$$\varepsilon\dot{V} \leqslant -\frac{1}{2}\|\eta\|^2 + 2\varepsilon M\|PB\|\|\eta\|$$

因此由定理 4.5、$\|\eta\|$，以及对应的 $\|\tilde{x}\|$ 是终极有界的，即存在正常数 a，k 和 $c>0$，使得

$$\|\eta(t)\| \leqslant \max\{k\mathrm{e}^{-\frac{at}{\varepsilon}}\|\eta(0)\|, \varepsilon cM\}, \quad \forall\, t \geqslant 0$$

因此 $\eta(t)$ 呈指数速度接近终极边界 εcM，ε 越小衰减越快，这表明对于充分小的 ε，观测误差 $\tilde{x}$ 会收敛得比 x 快。这也说明可以通过选择足够小的 ε 使得终极边界变的任意得小。如果 $M=0$，即 $\phi_0=\phi$ 的情形，则 t 趋向于无穷大的时候，$\tilde{x}(t)$ 收敛于 0。这里要注意到，只要 $x_1(0) \neq \hat{x}_1(0)$，就有 $\eta_1(0) = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$。因此，式(11.23)的解将包含形如 $\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\mathrm{e}^{-\frac{at}{\varepsilon}}(a>0)$ 的项。尽管这种指数形式对于较小的 ε 衰减得很快，但是它有一种类似脉冲的现象，它在快速衰减到 0 之前会有瞬态峰值 $O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$。事实上，当 ε 趋向于 0 时，函数 $\left(\frac{a}{\varepsilon}\right)\mathrm{e}^{-\frac{at}{\varepsilon}}$ 接近于一个脉冲函数，这就是著名的峰值现象。我们将在 12.4 节中看到，当把这种观测器应用于反馈控制时，它将产生严重的冲击。我们用数字仿真来表述前面的结论。在例 11.1 中，对于所有的 $x(0) \in \Omega = \{1.5x_1^2 + x_1x_2 + 0.5x_2^2 \leqslant \sqrt{2}\}$，当 $a=0.25$，$b=0.2$ 时，下列系统的状态 $x(t)$ 是有界的： 272

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2 + ax_1^2x_2 + b\sin 2t, \quad y = x_1$$

采用高增益观测器

$$\dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + \frac{2}{\varepsilon}(y - \hat{x}_1), \quad \dot{\hat{x}}_2 = -\hat{x}_1 - 2\hat{x}_2 + \hat{a}\hat{x}_1^2\hat{x}_2 + \hat{b}\sin 2t + \frac{1}{\varepsilon^2}(y - \hat{x}_1)$$

并选择两组不同的($\hat{a}$，$\hat{b}$)。已知 $a=0.25$，$b=0.2$ 时，取 $\hat{a}=0.25$，$\hat{b}=0.2$，这时没有模型不确定项和 $\phi_0=\phi$ 的情形。另一种情形是系数 a 和 b 未知，此时取 $\hat{a}=\hat{b}=0$。图 11.2 给出了两种不同情形下的仿真结果。图 11.2a 和图 11.2b 显示了在没有不确定项的情况下，当 ε 取不同值时，状态 x 的和它的估计 $\hat{x}$。估计值 $\hat{x}_2$ 出现了峰值现象。注意到估计 $\hat{x}_1$ 中没有出现峰值现象。峰值现象是由误差 $x_1(0) - \hat{x}_1(0)$ 引起的，它在 $\hat{x}_1$ 中并没有出现是因为 $\tilde{x}_1 = \varepsilon\eta_1$。图 11.2c 和图 11.2d 给出当 $\hat{a}=\hat{b}=0$ 时，模型存在不确定的情况下，估计误差 $\tilde{x}_2$ 的仿真。将图 11.2b 和图 11.2c 进行比较可以看出不确定项对于观测器的影响较小。图 11.2d 显示了估计误差的终极边界的阶是 $O(\varepsilon)$。

在结束这个例子的时候，我们讨论测量噪声对高增益观测器的影响[⊖]。现假设测试信

⊖ 在数字实现中，其他影响高增益观测器性能的因素有采样率和计算机字长。需要足够高的采样频率来捕取快变估计，并且需要足够大的字长来代表观测器中比较大(或比较小)的数。由于技术的发展，这些因素不如测量噪声的影响重要。

号 y 含有量测噪声 v，即 $y=x_1+v$，而 $|v(t)|\leqslant N$。此时方程式(11.23)成为

$$\varepsilon\dot{\eta}=F\eta+\varepsilon B\delta-\frac{1}{\varepsilon}Ev,\quad 其中\quad E=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix}$$

关于 $\dot{V}$ 的不等式变为

$$\varepsilon\dot{V}\leqslant-\frac{1}{2}\|\eta\|^2+2\varepsilon M\|PB\|\|\eta\|+\frac{2N}{\varepsilon}\|PE\|\|\eta\|$$

因此，$\|\tilde{x}\|$ 的终极边界为

$$\|\tilde{x}\|\leqslant c_1M\varepsilon+\frac{c_2N}{\varepsilon} \tag{11.24}$$

a）当 $\hat{a}=a,\ \hat{b}=b$ 时，状态 x_1（实线）及其估计 $\hat{x}_1$（虚线）

b）当 $\hat{a}=a,\ \hat{b}=b$ 时，状态 x_2（实线）及其估计 $\hat{x}_2$（虚线）

c）当 $\hat{a}=\hat{b}=0$ 时，状态 $\tilde{x}_2$ 的瞬态响应

d）当 $\hat{a}=\hat{b}=0$ 时，状态 $\tilde{x}_2$ 的稳态响应

图 11.2 例 11.2 的仿真结果

其中，c_1、c_2 为正数。此不等式显示了模型不确定项和测量噪声间的权衡。图 11.3 给出式(11.24)右面函数的图像，在到达点 $\varepsilon_1=\sqrt{\frac{c_2N}{c_1M}}$ 之前，减小 ε 的值可以缩小终极边界。过了此点之后再减小 ε 的值反而会增大终极边界。为使高增益观测器有效，$\frac{N}{M}$ 的比值应相对较小，以便选择恰当的 ε，既能减小不确定项造成的影响，还能使观测器快速跟踪状态。即使不存在模型不确定项，即 $M=0$，仍然需要 N 较小，以便观测器能较快跟踪状态，

273

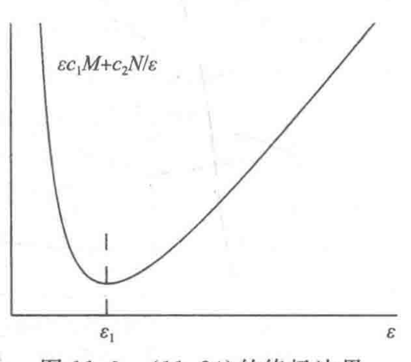


图 11.3 (11.24)的终极边界

并使得误差的终极边界处于可接受的范围内。 ◀ 274

现将高增益观测器推广到具有如下形式的非线性系统：

$$\dot{w} = f_0(w,x,u) \tag{11.25}$$

$$\dot{x}_i = x_{i+1} + \psi_i(x_1,\cdots,x_i,u), \quad 1 \leqslant i \leqslant \rho - 1 \tag{11.26}$$

$$\dot{x}_\rho = \phi(w,x,u) \tag{11.27}$$

$$y = x_1 \tag{11.28}$$

其中，$w \in R^l$ 和 $x = \text{col}(x_1, x_2, \cdots, x_\rho) \in R^\rho$ 为状态向量，$u \in R^m$ 为输入，$y \in R$ 为可量测的输出。可以看出 8.1 节中的标称模型是该系统的一种特殊情况，即其中 $\psi_i = 0 (1 \leqslant i \leqslant \rho - 1)$，$f_0$ 和 u 无关，且 $\phi(w, x, u) = \phi_1(w, x) + \phi_2(w, x)u$。更进一步，严格反馈型(式(9.17))也是它的一种特殊情况，其中 $g_i = 1 (1 \leqslant i \leqslant k-1)$，$f_0$ 和 ψ_i 与 u 无关，并具有 $f_0(w, x) = f_{01}(w) + f_{02}(w)x_1$，$\phi(w, x, u) = \phi_1(w, x) + \phi_2(w, x)u$ 的形式。假设在研究的区域内，f_0，ψ_1，$\cdots$，$\psi_{\rho-1}$ 和 ϕ 对其变量是局部 Lipschitz 的，ψ_1，$\cdots$，$\psi_{\rho-1}$ 关于 x 对 u 是一致Lipschitz的，即

$$|\psi_i(x_1,\cdots,x_i,u) - \psi_i(z_1,\cdots,z_i,u)| \leqslant L_i \sum_{k=1}^{i} |x_k - z_k| \tag{11.29}$$

进一步，我们假设对于所有 $t \geqslant 0$，$w(t)$、$x(t)$ 和 $u(t)$ 都是有界的。

用于观测 x 的部分状态观测器可设计成

$$\dot{\hat{x}}_i = \hat{x}_{i+1} + \psi_i(\hat{x}_1,\cdots,\hat{x}_i,u) + \frac{\alpha_i}{\varepsilon^i}(y - \hat{x}_1), \quad 1 \leqslant i \leqslant \rho - 1 \tag{11.30}$$

$$\dot{\hat{x}}_\rho = \phi_0(\hat{x},u) + \frac{\alpha_\rho}{\varepsilon^\rho}(y - \hat{x}_1) \tag{11.31}$$

其中，ϕ_0 关于 x 对 u 是一致的 Lipschitz 函数，ε 是充分小的正常数，选择 α_1，$\cdots$，α_ρ，以使

$$s^\rho + \alpha_1 s^{\rho-1} + \cdots + \alpha_{\rho-1} s + \alpha_\rho = 0 \tag{11.32}$$

275

的所有根具有负实部，式(11.31)中的 ϕ_0 是 ϕ 的标称型。假设

$$\|\phi(w,x,u) - \phi_0(z,u)\| \leqslant L\|x - z\| + M \tag{11.33}$$

因为

$$\phi(w,x,u) - \phi_0(z,u) = \phi(w,x,u) - \phi_0(x,u) + \phi_0(x,u) - \phi_0(z,u)$$

且 ϕ_0 是 Lipschitz 的，所以式(11.33)就是要求建模误差 $\phi(w, x, u) - \phi_0(x, u)$ 有界。

引理 11.3 *在上述条件下，存在 $\varepsilon^* > 0$，使得对于 $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon^*$，高增益观测器式(11.30)～式(11.31)的估计误差 $\tilde{x}_i = x_i - \tilde{x}_i (1 \leqslant i \leqslant \rho)$ 满足*

$$|\tilde{x}_i| \leqslant \max\left\{\frac{b}{\varepsilon^{i-1}} e^{-\frac{at}{\varepsilon}}, \varepsilon^{\rho+1-i} cM\right\} \tag{11.34}$$

其中 a，b，c 为正常数。

证明：定义标量估计误差

$$\eta_1 = \frac{x_1 - \hat{x}_1}{\varepsilon^{\rho-1}}, \quad \eta_2 = \frac{x_2 - \hat{x}_2}{\varepsilon^{\rho-2}}, \quad \cdots, \quad \eta_{\rho-1} = \frac{x_{\rho-1} - \hat{x}_{\rho-1}}{\varepsilon}, \quad \eta_\rho = x_\rho - \hat{x}_\rho \tag{11.35}$$

可以证明 $\eta = \text{col}(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_\rho)$ 满足方程

$$\varepsilon\dot{\eta} = F\eta + \varepsilon\delta(w,x,\tilde{x},u) \tag{11.36}$$

其中，

$$F = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ -\alpha_{\rho-1} & & & 0 & 1 \\ -\alpha_\rho & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$\delta=\text{col}(\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_\rho)$，$\delta_\rho=\phi(w, x, u)-\phi_0(\hat{x}, u)$和

$$\delta_i = \frac{1}{\varepsilon^{\rho-i}}[\psi_i(x_1,\cdots,x_i,u) - \psi_i(\hat{x}_1,\cdots,\hat{x}_i,u)], \quad 1 \leqslant i \leqslant \rho-1$$

因为 F 的特征方程是式(11.32)，所以它是 Hurwitz 矩阵。根据式(11.29)，$\delta_1, \cdots, \delta_{\rho-1}$ 满足

276

$$|\delta_i| \leqslant \frac{L_i}{\varepsilon^{\rho-i}}\sum_{k=1}^{i}|x_k - \hat{x}_k| = \frac{L_i}{\varepsilon^{\rho-i}}\sum_{k=1}^{i}\varepsilon^{\rho-k}|\eta_k| = L_i\sum_{k=1}^{i}\varepsilon^{i-k}|\eta_k|$$

由此不等式和式(11.33)可得

$$\|\delta\| \leqslant L_\delta\|\eta\| + M \tag{11.37}$$

其中，L_δ 和 ε 无关，这里的 $\varepsilon\leqslant\varepsilon^*$，而 $\varepsilon^*>0$ 是任意给定的。取 $V=\eta^{\text{T}}P\eta$，其中 $P=P^{\text{T}}>0$ 为 Lyapunov 方程 $PF+F^{\text{T}}P=-I$ 的解，则

$$\varepsilon\dot{V} = -\eta^{\text{T}}\eta + 2\varepsilon\eta^{\text{T}}P\delta$$

由式(11.37)可得

$$\varepsilon\dot{V} \leqslant -\|\eta\|^2 + 2\varepsilon\|P\|L_\delta\|\eta\|^2 + 2\varepsilon\|P\|M\|\eta\|$$

选取 $\varepsilon\|P\|L_\delta\leqslant\frac{1}{4}$，可得

$$\varepsilon\dot{V} \leqslant -\frac{1}{2}\|\eta\|^2 + 2\varepsilon\|P\|M\|\eta\| \leqslant -\frac{1}{4}\|\eta\|^2, \quad \forall\,\|\eta\|\geqslant 8\varepsilon\|P\|M$$

由定理 4.5 可知

$$\|\eta(t)\| \leqslant \max\{k\text{e}^{-\frac{at}{\varepsilon}}\|\eta(0)\|, \varepsilon cM\}, \quad \forall\, t\geqslant 0$$

其中，a、c 和 k 为正常数。由式(11.35)可得，如果 $\|\eta(0)\|\leqslant\frac{\beta}{\varepsilon^{\rho-1}}(\beta>0)$和 $\|\tilde{x}_i\|\leqslant\varepsilon^{\rho-i}|\eta_i|$，则式(11.34)得证。 □

11.5 练习

11.1 考虑 van der Pol 方程

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + (1-x_1^2)x_2, \quad y = x_1$$

(1) 设计一个扩展的 Kalman 滤波器。

(2) 设计一个高增益观测器，取 ε 为 0.01。

(3) 对以上两种观测器进行仿真，比较它们的性能。

11.2 Duffing 方程式(A.4)经归一化后的状态空间模型为

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1(1+x_1^2) - x_2 + a\cos(t), \quad y = x_1$$

(1) 当 $a=1$ 时，设计一个具有线性动态估计误差的观测器。

(2) 设计一个高增益观测器，其中 $\varepsilon=0.01$。

(3) 当 a 受扰动时，利用仿真比较两种观测器的性能(在观测器参数中先保持 $a=1$，

然后在仿真中逐渐增加它在原系统中的值)。

277

11.3 考虑习题 2.5 中所述的 Wien-Bridge 振荡器，其中 $C_1=C_2=C$，$R_1=R_2=R$，取时域刻度为 $\tau=\frac{t}{CR}$，其模型为

$$\dot{x}_1=-\frac{1}{2}x_2,\quad \dot{x}_2=2(x_1-x_2)+g(x_2)-x_2$$

其中，$g(v)=3.234v-2.195v^3+0.666v^5$，假设测量的输出为 x_2。

(1) 设计一个扩展的 Kalman 滤波器。

(2) 设计一个具有线性动态误差的观测器。

(3) 设计一个高增益观测器，其中 $\varepsilon=0.01$。提示：把系统转化成式(11.26)～(11.28)的形式。

(4) 对以上三种观测器进行仿真，比较它们的性能。

(5) 当系统方程中的 g 增加到 $1.2g$ 时，重复(4)。

11.4 考虑式(A.33)所述的微静电执行器，其中 $\zeta=0.1$ 和 $T=0.2$。在常输入 $u=\frac{5}{4\sqrt{2}}$作用下，系统在点 $\bar{x}=\mathrm{col}\left(\frac{1}{6},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$处有一个渐近稳定平衡点。假设可测量输出为 x_1 和 x_3，而 x_2 可由下面的两种高增益观测器估计

$$\dot{\hat{x}}_1=\hat{x}_2+\left(\frac{\alpha_1}{\varepsilon}\right)(x_1-\hat{x}_1),\quad \dot{\hat{x}}_2=-\hat{x}_1+\frac{1}{3}x_2^2+\left(\frac{\alpha_2}{\varepsilon^2}\right)(x_1-\hat{x}_1)$$

或

$$\dot{\hat{x}}_1=\hat{x}_2+\left(\frac{\alpha_1}{\varepsilon}\right)(x_1-\hat{x}_1),\quad \dot{\hat{x}}_2=-\hat{x}_1+\left(\frac{\alpha_2}{\varepsilon^2}\right)(x_1-\hat{x}_1)$$

在第一个观测器中，$\frac{1}{3}x_2^2$ 被看作给定输入，而在第二个中被视为扰动。令 $\alpha_1=2$ 和 $\alpha_2=1$，$x(0)$限制在 $\bar{x}$ 的吸引域内，分别取 $\varepsilon=1$ 和 0.1，通过仿真比较两种观测器的性能。

11.5 考虑系统

$$\dot{x}_1=\beta_1(x_1)+x_2,\quad \dot{x}_2=\beta_2(x_1)+\beta_3(x_1)x_2+u,\quad y=x_1$$

其中，β_1、β_2、β_3 都是光滑函数。

(1) 设计一个具有线性动态误差的观测器。

(2) 设计一个高增益观测器。

(3) 当 β_2，β_3 未知时，重复(2)。

11.6 考虑例 8.15 讨论的带有柔性关节的单关节的机械臂。

(1) 当 $y=x_1$ 时，设计一个具有线性动态误差的观测器。

278

(2) 当 $y=\mathrm{col}(x_1,x_3)$时，设计一个具有线性动态误差的观测器。

(3) 当 $y=x_1$ 时，设计一个高增益观测器。

(4) 当 $y=\mathrm{col}(x_1,x_3)$，且参数 a、b、c、d 未知时，试设计一个高增益观测器。

11.7 考虑高增益观测器式(11.30)～(11.31)，其中 $y(t)=x_1(t)+v(t)$，$|v(t)|\leqslant N$。证明存在 $c_2>0$，上界式(11.34)能改写成

$$|\tilde{x}_i|\leqslant\max\left\{\frac{b}{\varepsilon^{i-1}}\mathrm{e}^{-\frac{at}{\varepsilon}},\varepsilon^{\rho+1-i}cM+\frac{c_2N}{\varepsilon^{i-1}}\right\}$$

11.8 文献[110]给出了一种修正的扩展 Kalman 滤波器，其估计误差衰减到 0 的速度比指数级 $ke^{-\alpha t}$ 快，其中给定的正常数 α 可由改变的 Riccati 方程

$$\dot{P} = (A + \alpha I)P + P(A^{\mathrm{T}} + \alpha I) + Q - PC^{\mathrm{T}}R^{-1}CP, \quad P(t_0) = P_0$$

得到。现利用这种修正来重新设计例 11.1 的扩展型 Kalman 滤波器，并利用仿真观察 α 对收敛速度的影响。

11.9 考虑系统

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1 + a\sin x_1 - x_2, \quad y = x_2$$

要求设计全局观测器，$|a|$ 的最大取值是多少？

可以将未知参数视为在扩展状态模型中的状态变量，于是非线性观测器就可以用作一个估计未知参数的工具，接下来的 3 个练习就应用了这种思想。

11.10 考虑谐波发生器

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -ax_1, \quad y = x_1$$

其中，正常数 a 未知。用 $x_3 = a$ 和 $\dot{x}_3 = 0$ 产生扩展的状态模型。试设计一个扩展的 Kalman 滤波器，其中 $Q=R=P_0=I$，并在 $a=1$，$x(0)=\mathrm{col}(1, 0)$，$\hat{x}(0)=\mathrm{col}(0, 0, 0)$时进行仿真。

11.11 考虑单摆方程

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\sin x_1 + cu, \quad y = x_1$$

279

c 为未知正常数，u 为已知的常数输入，用 $x_3 = cu$ 和 $\dot{x}_3 = 0$ 扩展状态模型。

(1) 设计一个具有线性动态误差的观测器，其特征值为−1、−1、−1。

(2) 设计高增益观测器，其中 $\varepsilon=0.1$。

(3) 设计一个扩展 Kalman 滤波器，其中 $Q=R=P_0=I$。

(4) 通过仿真比较三种观测器的性能，其中取

$$u = \frac{1}{2}, \quad c = 1, \quad x(0) = \mathrm{col}\left(\frac{\pi}{3}, 0\right), \quad \hat{x}(0) = \mathrm{col}(0,0,0)$$

11.12 考虑附录 A.5 给出的升压变换器，因为未知负载，故认为电阻 R 未知。现改变 x_1 的定义为 $x_1 = \left(\frac{i_L}{E}\right)\sqrt{\frac{L}{C}}$，则状态模型式(A.16)成为

$$\dot{x}_1 = (x_2 + k)u - \left(\frac{1}{k}\right)x_2, \quad \dot{x}_2 = \left(\frac{1}{k}\right)x_1 - \alpha x_2 - x_1 u - \alpha k$$

其中，$\alpha = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ 未知。要求设计一个观测器来估计 α 的值。取 $u=0$，用 $x_3 = \alpha$ 和 $\dot{x}_3 = 0$ 得到扩展状态模型。

(1) 假设 $y = x_1$，试设计一个扩展 Kalman 滤波器，对观测器输出做仿真，其中 $\alpha = 0.3$，$k=2$。

280

(2) 当 $y = x_2$ 时，重复(1)，$\hat{x}_3$ 会收敛到 α 吗？如果不能，请解释原因。

第12章 输出反馈镇定

第 9 章和第 10 章的反馈镇定需要测量所有的状态变量。本章中我们研究只能应用输出向量完成反馈的镇定设计。这个输出向量是状态变量的一个非线性函数，而且它的维数一般低于状态变量。

在 12.1 节，我们先从线性化开始，它是最简单的输出反馈控制设计方法，当然，它只能在局部范围内有效。在 12.2 节中，当从输入到输出的导数之间的映射是无源时，我们给出一种基于无源性控制器设计。这种方法在许多物理系统很有效，这里以机械手为例来说明这一点。接下来两节阐述基于观测器的控制，将镇定问题分为两步：首先设计状态反馈控制镇定原点，然后再设计一个观测器估计系统状态。输出反馈控制是通过在状态反馈中用估计状态替代实际状态完成的。本章不讨论如何设状态反馈控制，因为在第 9 章和第 10 章已经给出了它的设计方法。在 12.3 节中，我们将介绍如何通过 11.1 节和 11.3 节中所讲的局部或全局观测器来实现状态反馈镇定。正如在 11 章中所看到的，这些观测器设计需要了解系统的非线性状态模型，容许包含一些模型的不确定性。11.4 节中的高增益观测器能够容许较大匹配的不确定项，它在反馈控制器中的应用将在 12.4 节介绍。我们引入饱和控制来避免观测器发生峰值现象。通过将饱和控制和估计误差的快速收敛组合起来，我们能够证明只要观测器收敛足够快，输出反馈的轨迹可以任意接近状态反馈的轨迹。最后，在 12.5 节我们给出了最小相位系统的鲁棒输出反馈镇定，这里的讨论扩展了第 10 章中所介绍的鲁棒状态反馈镇定技术。我们的方案用到了滑模控制，但也可以用Lyapunov再设计和高增益反馈来实现。

12.1 输出反馈线性化

考虑系统

$$\dot{x} = f(x,u), \quad y = h(x) \tag{12.1}$$

其中，$x\in R^n$，$u\in R^m$，$y\in R^p$，$f(0,0)=0$，$h(0)=0$，假设函数 $f(x,u)$，$h(x)$在包括原点($x=0$，$u=0$)的区域 $D_x\times D_u\subset R^n\times R^m$ 上连续可微。我们想设计一个输出反馈控制器使系统在 $x=0$ 处稳定。对式(12.1)在原点($x=0$，$u=0$)处做线性化，可得线性系统

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx \tag{12.2}$$

其中，

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x,u)\bigg|_{x=0,u=0}, \quad B = \frac{\partial f}{\partial u}(x,u)\bigg|_{x=0,u=0}, \quad C = \frac{\partial h}{\partial x}(x)\bigg|_{x=0}$$

假设(A，B)可镇定，(A，C)可检测，设计一个线性动态输出反馈控制

$$\dot{z} = Fz + Gy, \quad u = Lz + My \tag{12.3}$$

使闭环系统矩阵

$$\begin{bmatrix} A+BMC & BL \\ GC & F \end{bmatrix} \tag{12.4}$$

是 Hurwitz 矩阵。基于观测器的状态估计实现反馈控制就是这种设计的一个例子。具体是

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + H(y - C\hat{x}), \quad u = -K\hat{x}$$

它具有式(12.3)的形式，其中

$$z = \hat{x}, \quad F = A - BK - HC, \quad G = H, \quad L = -K, \quad M = 0$$

在这种情况下，若设计的 K 和 H 能让 $A-BK$ 和 $A-HC$ 都是 Hurwitz 阵，则矩阵(12.4)就是 Hurwitz 矩阵。另外一个例子是静态输出反馈控制 $u=My$，其中 M 设计为使 $A+BMC$ 为 Hurwitz 矩阵。当去掉 $\dot{z}$-方程，取 $L=0$ 时，那么它具有式(12.3)的形式。将控制器式(12.3)用于非线性系统式(12.1)，得到的闭环系统为

$$\dot{x} = f(x, Lz + Mh(x)), \quad \dot{z} = Fz + Gh(x) \tag{12.5}$$

可以证明原点($x=0$，$z=0$)是闭环系统式(12.5)的一个平衡点，在原点线性化可得 Hurwitz矩阵式(12.4)。因此，由定理 3.2 原点是指数稳定的。

282

例 12.1 重新考虑例 9.2 中的单摆方程。假设我们测量到的是角度 θ，而不是角速度 $\dot{\theta}$，取输出为 $y=x_1=\theta-\delta_1$，那么例 9.2 的状态反馈控制可由观测器

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu_\delta + H(y - \hat{x}_1)$$

的估计状态完成，其中 $H=\text{col}(h_1, h_2)$。可以证明如果有

$$h_1 + b > 0, \quad h_1 b + h_2 + \cos\delta_1 > 0$$

则 $A-HC$ 是 Hurwitz 阵。输出反馈控制器为 $u=\left(\frac{1}{c}\right)\sin\delta_1 - K\hat{x}$。 ◀

12.2 基于无源性的控制

在 9.6 节中，我们考虑了 m 维输入、m 维输出系统

$$\dot{x} = f(x, u), \quad y = h(x) \tag{12.6}$$

其中，$f(0, 0)=0$，$h(0)=0$。若系统是无源的和零状态可测的，并有一个正定的径向无界存储函数，则它可以用输出反馈控制 $u=-\phi(y)$ 全局镇定，其中 $\phi(0)=0$，并对所有的 $y \neq 0$，$y^T\phi(y)>0$。本节考虑另一类系统，它从输入 u 到输出的导数 $\dot{y}$ 的映射是无源的，且零状态可测，我们证明它也能用输出反馈镇定。

考虑系统式(12.6)，其中 $f(0, 0)=0$，$h(0)=0$，f 关于(x, u)是局部 Lipschitz 的，h 对所有的 $x \in R^n$ 连续可微。考虑辅助系统

$$\dot{x} = f(x, u), \quad \dot{y} = \frac{\partial h}{\partial x} f(x, u) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{h}(x, u) \tag{12.7}$$

其中的 $\dot{y}$ 看成是输出。假设辅助系统是无源的，有径向无界正定存储函数 $V(x)$，且零状态可观。图 12.1 给出了用单输入单输出系统设计输出反馈控制器的一种方法。从图 12.1a 可以看出，反馈控制器的构造是将系统式(12.6)的输出 y 通过传递函数 $\frac{s}{(\tau s+1)}$，$\tau>0$ 的一阶环节后再做反馈。设此一阶环节的输出为 z，它输入无源非线性项 ϕ 构成闭环中的反馈。图 12.1b是一种等价变换，经变换，前向通道即为辅助系统式(12.7)，而反馈通道中线性部分传递函数成为 $\frac{1}{(\tau s+1)}$。这时系统为两个无源系统的反馈连接，依假设可知前向通道中的系统是无源的，设其存储函数为 $V(x)$。例 5.3 说明反馈通道上系统也是无源的，其

存储函数为 $\tau\int_0^z\phi(\sigma)\mathrm{d}\sigma$。这两个存储函数之和构成了整个反馈连接的存储函数，它将作为一个备选 Lyapunov 函数来证明系统的渐近稳定性。传递函数 $\frac{s}{(\tau s+1)}$ 可由状态模型来实现，它的输出满足 $\tau\dot{z}=-z+\dot{y}$。 283

$$\tau\dot{\omega}=-\omega+y,\quad z=\frac{(-\omega+y)}{\tau}$$

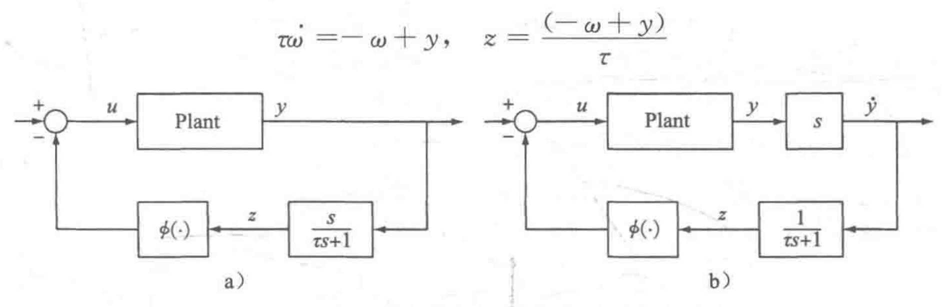


图 12.1　对于系统式(12.6)的基于无源的控制

引理 12.1　考虑系统式(12.6)和输出反馈控制器

$$u_i=-\phi_i(z_i),\quad \tau_i\dot{\omega}_i=-\omega_i+y_i,\quad z_i=\frac{-\omega_i+y_i}{\tau_i},\quad 1\leqslant i\leqslant m \tag{12.8}$$

其中，$\tau_i>0$，ϕ_i 是局部 Lipschitz 的，$\phi_i(0)=0$，对于所有的 $z_i\neq 0$，$z_i\phi_i(z_i)>0$。假设辅助系统式(12.7)满足：

- 无源的，且有一个正定存储函数 $V(x)$，对 $\forall(x,u)$，有

$$u^{\mathrm{T}}\dot{y}\geqslant\dot{V}=\frac{\partial V}{\partial x}f(x,u)$$

- 零状态可观，即若 $u=0$，$\dot{y}(t)\equiv 0\ \Rightarrow\ x(t)\equiv 0$。

则闭环系统的原点是渐近稳定的。若 $V(x)$ 径向无界，且当 $|z_i|\to\infty$ 时，有 $\int_0^{z_i}\phi_i(\sigma)\mathrm{d}\sigma\to\infty$，则闭环系统的原点是全局渐近稳定的。

证明：把 x 和 z_1，…，z_m 视为状态变量，闭环系统可表示为

$$\begin{aligned}\dot{x}&=f(x,-\phi(z))\\ \tau_i\dot{z}_i&=-z_i+\dot{y}_i=-z_i+\tilde{h}_i(x,-\phi(z)),\quad 1\leqslant i\leqslant m\end{aligned}$$

其中，$z=\mathrm{col}(z_1,\cdots,z_m)$，$\phi=\mathrm{col}(\phi_1,\cdots,\phi_m)$。

取

$$W(x,z)=V(x)+\sum_{i=1}^{m}\tau_i\int_0^{z_i}\phi_i(\sigma)\mathrm{d}\sigma$$

则函数 W 是正定的，其导数为

$$\dot{W}=\dot{V}+\sum_{i=1}^{m}\tau_i\phi_i(z_i)\dot{z}_i\leqslant u^{\mathrm{T}}\dot{y}-\sum_{i=1}^{m}z_i\phi_i(z_i)-u^{\mathrm{T}}\dot{y}=-\sum_{i=1}^{m}z_i\phi_i(z_i)$$ 284

因此，$\dot{W}$ 是半负定的。另外

$$\dot{W}\equiv 0\ \Rightarrow\ z(t)\equiv 0\ \Rightarrow\ u(t)\equiv 0,\dot{y}(t)\equiv 0$$

从辅助系统式(12.7)的零状态可观性可得 $x(t)\equiv 0$。根据不变原理可推出原点是渐近稳定的。如果 $V(x)$ 径向无界，且当 $|z_i|\to\infty$ 时，有 $\int_0^{z_i}\phi_i(\sigma)\mathrm{d}\sigma\to\infty$，那么函数 W 径向无界，所以原点是全局渐近稳定的。 □

类似于我们在 9.6 节中的讨论，如果系统式(12.7)不是无源的，那么可以通过反馈无源化把它转换为无源系统。但是，在这里要通过输出反馈实现无源化。

例 12.2 再次考虑例 9.15 中的 m 个关节的机器臂问题，这里假设只能量测 q，不能量测 $\dot{q}$。调节误差 $e=q-q_r$，以满足下列方程

$$M(q)\ddot{e}+C(q,\dot{q})\dot{e}+D\dot{e}+g(q)=u$$

输出为 $y=e$。可通过将系统镇定在($e=0$，$\dot{e}=0$)来实现调节任务，取

$$u=g(q)-K_pe+v$$

其中，K_p 是正定对称矩阵，闭环后系统为

$$M(q)\ddot{e}+C(q,\dot{q})\dot{e}+D\dot{e}+K_pe=v,\quad y=e$$

当 $v=0$ 时，该系统在($e=0$，$\dot{e}=0$)处有一个平衡点。取能量函数

$$V=\frac{1}{2}\dot{e}^{\mathrm{T}}M(q)\dot{e}+\frac{1}{2}e^{\mathrm{T}}K_pe$$

作为该系统的存储函数，则有

$$\begin{aligned}\dot{V}&=\dot{e}^{\mathrm{T}}M\ddot{e}+\frac{1}{2}\dot{e}^{\mathrm{T}}\dot{M}\dot{e}+e^{\mathrm{T}}K_p\dot{e}\\&=\frac{1}{2}\dot{e}^{\mathrm{T}}(\dot{M}-2C)\dot{e}-\dot{e}^{\mathrm{T}}D\dot{e}-\dot{e}^{\mathrm{T}}K_pe+\dot{e}^{\mathrm{T}}v+e^{\mathrm{T}}K_p\dot{e}\leqslant\dot{e}^{\mathrm{T}}v\end{aligned}$$

因此，辅助系统从 v 到 $\dot{e}$ 是无源的。它也是零状态可观的，因为当 $v=0$ 时，有

$$\dot{e}(t)\equiv 0\ \Rightarrow\ \ddot{e}(t)\equiv 0\ \Rightarrow\ K_pe(t)\equiv 0\ \Rightarrow\ e(t)\equiv 0$$

根据引理 12.1，系统可被控制器 $v=-K_dz$ 全局镇定，其中 K_d 是正定对角矩阵，z_i 是线性系统

$$\tau_i\dot{\omega}_i=-\omega_i+e_i,\quad z_i=\frac{(-\omega_i+e_i)}{\tau_i},\quad 1\leqslant i\leqslant m$$

的输出。总的控制器为

285

$$u=g(q)-K_p(q-q_r)-K_dz$$

将它与例 9.15 的状态反馈控制器

$$u=g(q)-K_p(q-q_r)-K_d\dot{q}$$

比较可得：z 可以替换 PD 控制器中的 $\dot{q}$，它是将 e_i 输入传递函数$\frac{s}{(\tau_is+1)}$后的输出。要强调的是：因为我们不要求时间常数 τ_i 很小，所以没有要求 z_i 逼近$\dot{q}_i$。 ◀

12.3 基于观测器的控制

考虑系统

$$\dot{x}=f(x,u),\quad y=h(x)\tag{12.9}$$

其中，$x\in R^n$，$u\in R^m$，$y\in R^p$ 分别是状态，控制输入和测量输出。$f(0,0)=0$、$h(0)=0$、$f(x,u)$、$h(x)$都是局部 Lipschitz 的。令 $u=\gamma(x)$为一个局部 Lipschitz 状态反馈控制器，它可以使闭环系统 $\dot{x}=f(x,\gamma(x))$在原点稳定。取系统式(12.9)的观测器为

$$\dot{\hat{x}}=f(\hat{x},u)+H[y-h(\hat{x})]\tag{12.10}$$

则其观测误差$\tilde{x}=x-\hat{x}$满足方程

$$\dot{\tilde{x}}=f(x,u)-f(\hat{x},u)-H[h(x)-h(\hat{x})]\stackrel{\text{def}}{=}g(x,\tilde{x})\tag{12.11}$$

方程式(12.11)在$\tilde{x}=0$处有一个平衡点。假设存在观测器增益 H 使得$\tilde{x}=0$指数稳定，且有一个 Lyapunov 函数 $V_1(\tilde{x})$对于所有的 $x\in D_1$，$\tilde{x}\in D_2$，满足不等式

$$c_1\|\tilde{x}\|^2\leqslant V_1(\tilde{x})\leqslant c_2\|\tilde{x}\|^2,\quad \frac{\partial V_1}{\partial \tilde{x}}g(x,\tilde{x})\leqslant -c_3\|\tilde{x}\|^2,\quad \left\|\frac{\partial V_1}{\partial \tilde{x}}\right\|\leqslant c_4\|\tilde{x}\| \tag{12.12}$$

其中，c_1、c_2、c_3、c_4 为正常数，$D_1\subset R^n$ 和 $D_2\subset R^n$ 为包含原点的区域。我们已经在 11.1 节和 11.3 节的观测器设计中看到，式(12.12)可以局部或全局成立。输出反馈下的闭环系统为

$$\dot{x}=f(x,\gamma(x-\tilde{x})),\quad \dot{\tilde{x}}=g(x,\tilde{x}) \tag{12.13}$$

现在的任务是证明原点($x=0$，$\tilde{x}=0$)是系统式(12.13)的一个渐近稳定平衡点。

定理 12.1　*考虑系统式(12.13)，假设存在 Lyapunov 函数 $V_1(\tilde{x})$，使得不等式组(12.12)成立，则*

- *如果系统 $\dot{x}=f(x,\ \gamma(x))$的原点渐近稳定，那么系统式(12.13)的原点渐近稳定。*
- *如果系统 $\dot{x}=f(x,\ \gamma(x))$的原点指数稳定，那么系统式(12.13)的原点指数稳定。*
- *如果式(12.12)全局都成立，系统 $\dot{x}=f(x,\ \gamma(x-\tilde{x}))$输入-状态稳定($\tilde{x}$为输入)，那么系统式(12.13)的原点全局渐近稳定。*

286

定理的前两项给出的是局部结果，第三项是全局结论，但它要求较强的输入-状态稳定条件。定理的证明非常类似于附录 C.1 中级联系统的 Lyapunov 方法。尽管系统式(12.13)不是级联的，但$\dot{\tilde{x}}=g(x,\ \tilde{x})$的原点对 x 是一致指数稳定的。

证明：若系统 $\dot{x}=f(x,\ \gamma(x))$的原点渐近稳定，基于定理 3.9(逆 Lyapunov 定理)，存在正定函数 $V_0(x)$和 $W_0(x)$，使得在 $x=0$ 的某个邻域内下式成立：

$$\frac{\partial V_0}{\partial x}f(x,\gamma(x))\leqslant -W_0(x)$$

在原点的某个有界邻域内，由于 f 和 γ 具有局部 Lipschitz 特性，因而存在正常数 L 使得

$$\left\|\frac{\partial V_0}{\partial x}[f(x,\gamma(x))-f(x,\gamma(x-\tilde{x}))]\right\|\leqslant L\|\tilde{x}\|$$

取 $V(x,\ \tilde{x})=bV_0(x)+\sqrt{V_1(\tilde{x})}$作为系统式(12.13)的备选 Lyapunov 函数，其中 $b>0$，则有

$$\begin{aligned}\dot{V}&=b\frac{\partial V_0}{\partial x}f(x,\gamma(x-\tilde{x}))+\frac{1}{2\sqrt{V_1}}\frac{\partial V_1}{\partial \tilde{x}}g(x,\tilde{x})\\&=b\frac{\partial V_0}{\partial x}f(x,\gamma(x))+b\frac{\partial V_0}{\partial x}[f(x,\gamma(x-\tilde{x}))-f(x,\gamma(x))]+\frac{1}{2\sqrt{V_1}}\frac{\partial V_1}{\partial \tilde{x}}g(x,\tilde{x})\\&\leqslant -bW_0(x)+bL\|\tilde{x}\|-\frac{c_3\|\tilde{x}\|^2}{2\sqrt{V_1}}\end{aligned}$$

因为

$$V_1\leqslant c_2\|\tilde{x}\|^2\quad\Rightarrow\quad\frac{-1}{\sqrt{V_1}}\leqslant\frac{-1}{\sqrt{c_2}\|\tilde{x}\|}$$

所以

$$\dot{V}\leqslant -bW_0(x)+bL\|\tilde{x}\|-\frac{c_3}{2\sqrt{c_2}}\|\tilde{x}\|$$

287 为了确保 $\dot{V}$ 为负定，可选择 $b<\frac{c_3}{2L\sqrt{c_2}}$，至此定理 12.1 的第一点获证。

如果系统 $\dot{x}=f(x, \gamma(x))$ 在原点处指数稳定，由定理 3.8(逆 Lyapunov 定理)可得：在原点的某个邻域内，存在 Lyapunov 函数 $V_0(x)$ 满足不等式

$$a_1\|x\|^2\leqslant V_0(x)\leqslant a_2\|x\|^2,\quad \frac{\partial V_0}{\partial x}f(x,\gamma(x))\leqslant -a_3\|x\|^2,\quad \left\|\frac{\partial V_0}{\partial x}\right\|\leqslant a_4\|x\|$$

其中，α_1，…，α_4 为正数。选取 $V(x, \tilde{x})=bV_0(x)+V_1(\tilde{x})$ 作为系统式(12.13)的一个备选 Lyapunov 函数，其中 $b>0$，那么有

$$\begin{aligned}\dot{V}&=b\frac{\partial V_0}{\partial x}f(x,\gamma(x))+b\frac{\partial V_0}{\partial x}[f(x,\gamma(x-\tilde{x}))-f(x,\gamma(x))]+\frac{\partial V_1}{\partial \tilde{x}}g(x,\tilde{x})\\&\leqslant -ba_3\|x\|^2+ba_4L_1\|x\|\|\tilde{x}\|-c_3\|\tilde{x}\|^2\\&=-\begin{bmatrix}\|x\|\\\|\tilde{x}\|\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}ba_3 & -ba_4L_1 2\\ \frac{-ba_4L_1}{2} & c_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\|x\|\\\|\tilde{x}\|\end{bmatrix}\end{aligned}$$

这里的 L_1 为函数 $f(x, \gamma(x-\tilde{x}))$ 关于 $\tilde{x}$ 的 Lipschitz 常数。为了确保前面不等式里的矩阵为正定，可选择 $b<\frac{4a_3c_3}{(a_4L_1)^2}$，定理 12.1 的第二条获证。定理中的第三条可运用引理 4.6 来证明⊖，详细过程从略。 □

如果已知状态反馈下闭环系统的 Lyapunov 函数 $V_0(x)$ 和观测器的 Lyapunov 函数 $V_1(\tilde{x})$，对于定理第一条，有复合 Lyapunov 函数 $V=bV_0+\sqrt{V_1}$，对于定理第二条，有复合 Lyapunov 函数 $V=bV_0+V_1$，这两个复合 Lyapunov 函数可用来估计输出反馈闭环系统的吸引域。

12.4 高增益观测器和分离原理

与 11.4 节相同，我们从一个启发性的例子来研究反馈控制的高增益观测器。

例 12.3 考虑二维系统

$$\dot{x}_1=x_2,\quad \dot{x}_2=\phi(x,u),\quad y=x_1 \tag{12.14}$$

其中，$x=\mathrm{col}(x_1, x_2)$。设状态反馈控制 $u=\gamma(x)$ 是局部 Lipschitz 的，并使下列闭环系统

$$\dot{x}_1=x_2,\quad \dot{x}_2=\phi(x,\gamma(x)) \tag{12.15}$$

的原点稳定。

为了用输出反馈来实施这个控制，我们采用高增益观测器

288

$$\dot{\hat{x}}_1=\hat{x}_2+\left(\frac{\alpha_1}{\varepsilon}\right)(y-\hat{x}_1),\quad \dot{\hat{x}}_2=\phi_0(\hat{x},u)+\left(\frac{\alpha_2}{\varepsilon^2}\right)(y-\hat{x}_1) \tag{12.16}$$

其中，ϕ_0 是 ϕ 的标称模型，α_1、α_2、ε 都是正常数，且 $\varepsilon\ll 1$。从引理 11.3 可以看到，如果在研究的范围内成立

$$|\phi_0(z,u)-\phi(x,u)|\leqslant L\|x-z\|+M$$

则对充分小的 ε，估计误差 $\tilde{x}_1=x_1-\hat{x}_1$ 和 $\tilde{x}_2=x_2-\hat{x}_2$ 满足以下不等式

⊖ 见文献[130]。

$$|\widetilde{x}_1| \leqslant \max\{b\mathrm{e}^{-\frac{at}{\varepsilon}}, \varepsilon^2 cM\}, \quad |\widetilde{x}_2| \leqslant \left\{\frac{b}{\varepsilon}\mathrm{e}^{-\frac{at}{\varepsilon}}, \varepsilon cM\right\} \tag{12.17}$$

其中，a、b、c 为正常数。这些不等式表明，减少 ε 值能够减弱对不确定模型的影响，同时 ε 减小，能使估计误差的收敛比 x 来得越快。11.4 节在讨论 $\widetilde{x}_2$ 的上界时提出峰值现象，即 $\widetilde{x}_2$ 可能在迅速衰减到零之前先达到峰值 $O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$。这种峰值现象的出现可能会导致闭环系统的不稳定。通过对下面系统的仿真可以说明这个事实：

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_2^3 + u, \quad y = x_1$$

可由反馈控制

$$u = -x_2^3 - x_1 - x_2$$

全局镇定。取输出反馈控制器为

$$u = -\hat{x}_2^3 - \hat{x}_1 - \hat{x}_2, \quad \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + \left(\frac{2}{\varepsilon}\right)(y - \hat{x}_1), \quad \dot{\hat{x}}_2 = \left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)(y - \hat{x}_1)$$

其中，$\phi_0 = 0$。图 12.2 给出在状态反馈和输出反馈下系统响应的性能比较，在输出反馈仿真中 ε 取了三种不同值。初始条件为 $x_1(0) = 0.1$，$x_2(0) = \hat{x}_1(0) = \hat{x}_2(0) = 0$。当 ε 充分小时，由 $\frac{[x_1(0) - \hat{x}_1(0)]}{\varepsilon} = \frac{0.1}{\varepsilon}$ 引起了峰值现象。图 12.2 显示了随着 ε 减小而出现的一种反常行为。因为减小 ε 会引起估计误差更快地衰减到零，所以我们期望随着 ε 的不断减小，输出反馈下的响应能够更快地接近状态反馈下的响应。图 12.2 展示了一种反向的行为，即随着 ε 的不断减小，输出反馈下的响应与状态反馈下的响应出现了越来越大的差别，这其实就是峰值现象的影响。在此图中我们也看到控制 u 在短时间内有峰值现象的出现，这种控制信号的峰值输入系统便引起状态峰值。从图 12.3 可以看出，当 ε 减小到 0.004 时，在 $t = 0.07$ 时刻后，系统出现了有限逃逸时间的现象。

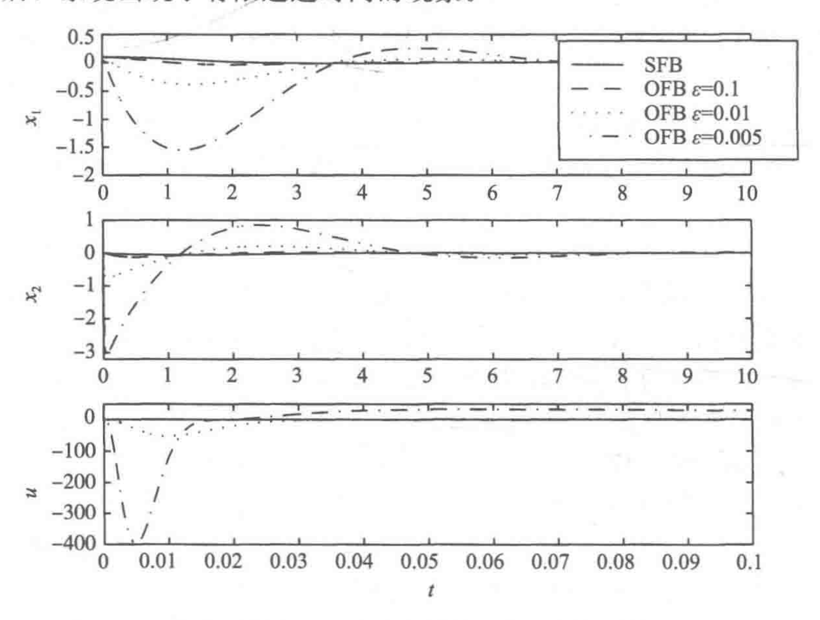


图 12.2　状态反馈(SFB)和输出反馈(OFB)下的系统响应对比

幸运的是，我们可以通过饱和控制来克服峰值现象带来的麻烦，可以在研究的紧集外构造一个缓冲区来保护系统不受峰值现象的影响。在状态反馈下将闭环系统写成 $\dot{x} = Ax$，并求解 Lyapunov 方程 $PA + A^{\mathrm{T}}P = -I$，其中

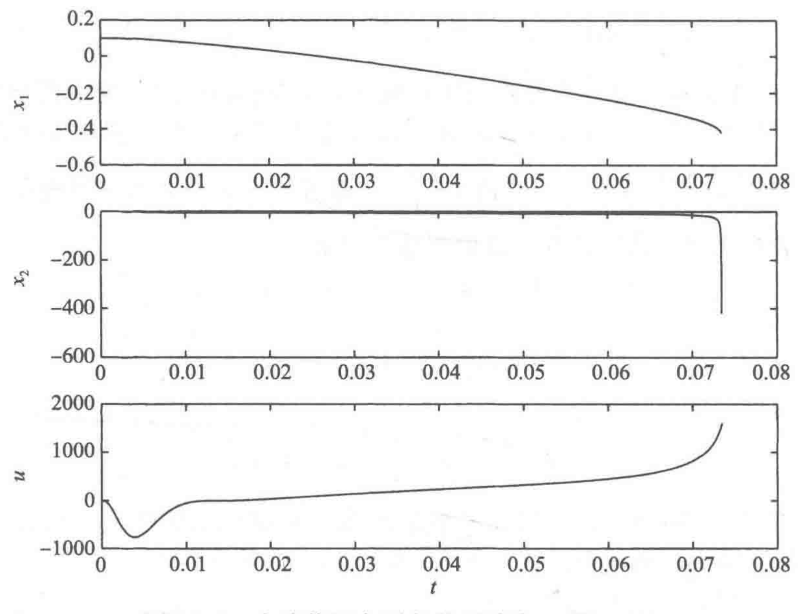


图 12.3 由峰值现象引起的不稳定，$\varepsilon=0.004$

289

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix},\quad P=\begin{bmatrix}1.5 & 0.5\\ 0.5 & 1\end{bmatrix}$$

那么，$V(x)=x^{\mathrm{T}}Px$ 是 $\dot{x}=Ax$ 的一个 Lyapunov 函数，$\dot{V}(x)=-x^{\mathrm{T}}x$。假设初始值属于集合 $\Omega=\{V(x)\leqslant 0.3\}$。因为 Ω 是正不变集，对所有的 $t\geqslant 0$，有 $x(t)\in\Omega$。在集合 Ω 内对 $|x_1+x_2|$ 和 $|x_2|$ 求最大值，由式(B.4)可知，对所有的 $x\in\Omega$，有 $|x_1+x_2|\leqslant 0.6$ 和 $|x_2|\leqslant 0.6$。因此，$|u|\leqslant|x_2|^3+|x_1+x_2|\leqslant 0.816$。取 u 在 ± 1 饱和，得全局有界状态反馈控制

$$u=\mathrm{sat}(-x_2^3-x_1-x_2)$$

对于所有的 $x(0)\in\Omega$，因为饱和控制对 $x\in\Omega$ 和 $|u|<1$ 不起任何作用，因此饱和控制与不饱和控制有着相同的轨迹。在输出反馈时，前述饱和控制中的 x 由其估计值$\hat{x}$代替，即

$$u=\mathrm{sat}(-\hat{x}_2^3-\hat{x}_1-\hat{x}_2)$$

在出现峰值期间，控制会达到饱和。图 12.4 给出了闭环系统在饱和状态和输出反馈下的响应。从控制 u 的图像可以看到，当峰值现象出现时有一个短时间的饱和过程，峰值出现的时间随着 ε 的减小而减小。状态 x_1 和 x_2 的图像直观地显示出达到了期望的控制效果，即当 ε 减小时，输出反馈下的响应会越来越接近状态反馈下的响应。注意到我们将 ε 减小到了 0.001，小于不用饱和时发生不稳定的值 0.004。此时不但系统稳定，而且输出反馈下的响应曲线和状态反馈下的响应曲线几乎重合。同样有意义的是当 ε 趋向于 0 时，输出反馈下的吸引域接近状态反馈下的吸引域，图 12.5 和图 12.6 说明了这种情况。第一个图显示了在 $u=\mathrm{sat}(-x_2^3-x_1-x_2)$作用下，闭环系统的相轨迹。它有一个被极限环包围的有界吸引域。第二个图显示了在 $u=\mathrm{sat}(-\hat{x}_2^3-\hat{x}_1-\hat{x}_2)$作用下吸引区域的边界，且随着 ε 趋向 0，在 x_1-x_2 平面上吸引域的边界逐步接近极限环。

290

对任意全局有界的镇定反馈 $u=\gamma(x)$，在采用加饱和的输出反馈后都可能出现图 12.4和图 12.6 所展示的现象。在出现峰值时刻，控制 $\gamma(\hat{x})$达到饱和。由于随着 ε 趋向于 0，峰值现象出现的时间将趋向于 0，所以 ε 充分小时，出现峰值现象的时间会很小，以至于系统状态 x 很接近它的初始值。在峰值现象过后，估计误差成为 $O(\varepsilon)$，反馈控制$\gamma(\hat{x})$接近于 $\gamma(x)$。因

此，当 ε 趋向于 0 时，输出反馈下闭环系统的轨线渐近接近于状态反馈下的轨线。$\gamma(x)$的全局有界性总是能够通过在研究的紧集外用饱和的状态反馈控制或者饱和的状态估计值来实现。

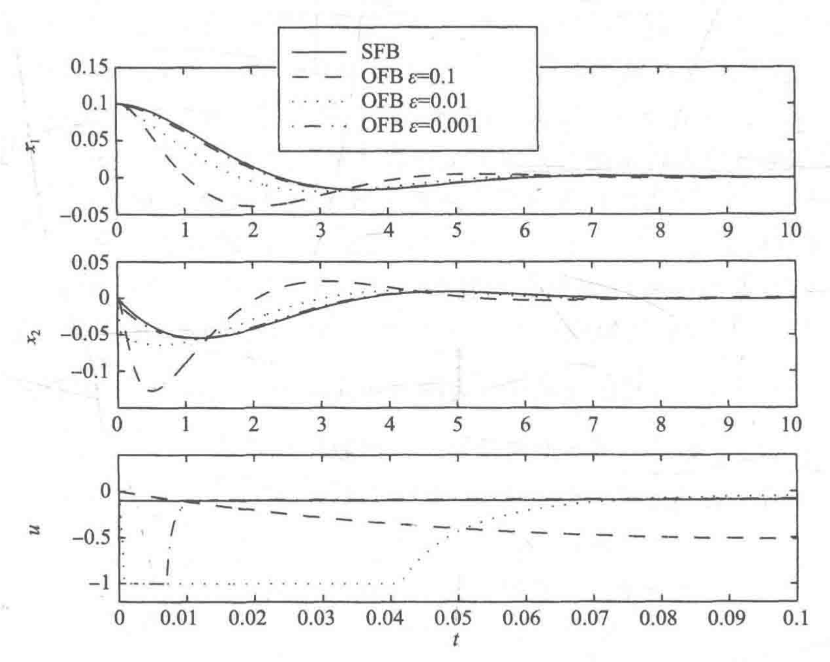


图 12.4　饱和状态反馈(SFB)和饱和输出反馈(OFB)下的系统性能

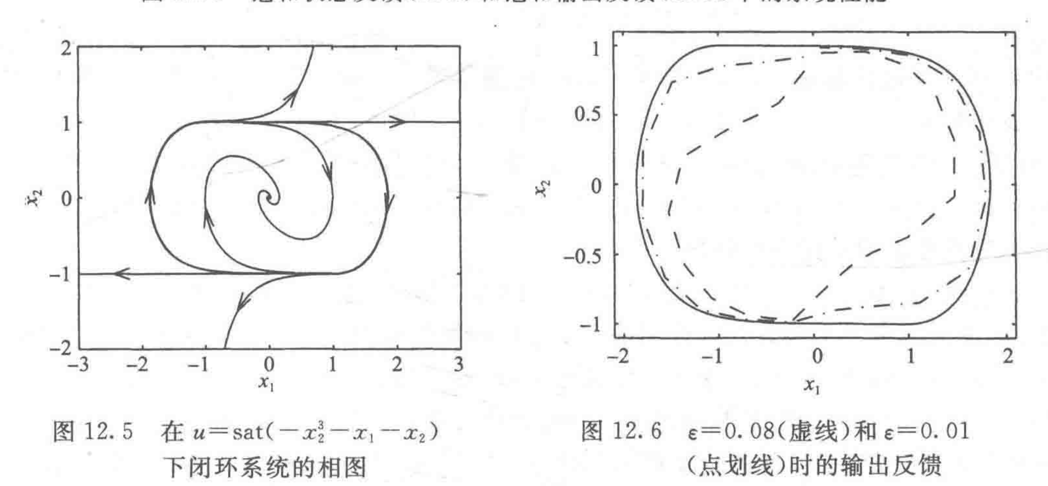


图 12.5　在 $u=\text{sat}(-x_2^3-x_1-x_2)$ 下闭环系统的相图

图 12.6　$\varepsilon=0.08$(虚线)和 $\varepsilon=0.01$(点划线)时的输出反馈

下面讨论闭环系统，在应用输出反馈后闭环系统用下述模型描述

$$\dot{x}_1=x_2,\quad \dot{x}_2=\phi(x,\gamma(x-D\eta)) \tag{12.18}$$

291

$$\varepsilon\dot{\eta}_1=-\alpha_1\eta_1+\eta_2,\quad \varepsilon\dot{\eta}_2=-\alpha_2\eta_1+\varepsilon\delta(x,\tilde{x}) \tag{12.19}$$

其中，$D=\begin{bmatrix}\varepsilon & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，$\eta=D^{-1}\tilde{x}$。在 ε 取充分小时，$\eta$ 变化速度比 x 快得多。让式(12.19)右边的 $\varepsilon=0$，快速变量 η 用以下模型逼近

$$\varepsilon\dot{\eta}=\begin{bmatrix}-\alpha_1 & 1\\ -\alpha_2 & 0\end{bmatrix}\eta\overset{\text{def}}{=}F\eta \tag{12.20}$$

它的解能快速收敛到 0。当 $\eta=0$，方程式(12.18)变成

$$\dot{x}_1=x_2,\quad \dot{x}_2=\phi(x,\gamma(x))$$

即为状态反馈式(12.15)下的闭环系统。取 $V(x)$ 为式(12.15)的 Lyapunov 函数，并取 $W(\eta)=\eta^{T}P_0\eta$，其中 P_0 为 Lyapunov 方程 $P_0F+F^{T}P_0=-I$ 的解。我们将用 V 和 W 来分析闭环系统式(12.18)～(12.19)的稳定性。定义集合 Ω_c 和 Σ 分别是 $\Omega_c=\{V(x)\leqslant c\}$ 和 $\Sigma=\{W(\eta)\leqslant\rho\varepsilon^2\}$，其中 $c>0$，选择 c 使 Ω_c 位于系统(式(12.15))的吸引域的内部。分两步进行分析，第一步证明对于足够大的 ρ，存在 $\varepsilon_1^*>0$，使得对于每一个 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1^*$，闭环系统的原点是渐近稳定的，$\Omega_c\times\Sigma$ 是吸引域内的正不变子集。该步的证明基于下列事实：在集合 $\Omega_c\times\Sigma$ 中，η 是 $O(\varepsilon)$。第二步证明对于任意有界的 $\hat{x}(0)$ 和任意 $x(0)\in\Omega_b$，其中 $0<b<c$，存在 $\varepsilon_2^*>0$，使得对于每一个 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_2^*$，轨线在有限时间内进入集合 $\Omega_c\times\Sigma$。该步的证明用到了 Ω_b 是在 Ω_c 的内部和 $\gamma(\hat{x})$ 是全局有界的。因此，存在不依赖 ε 的 $T_1>0$，对于所有 $t\in[0,T_1]$，任何始于 Ω_b 的轨线将保持在 Ω_c 内。另外注意到 η 的衰减速度快于形式为 $\left(\frac{k}{\varepsilon}\right)e^{-\frac{at}{\varepsilon}}$ 的指数型函数，并且能够证明在有限时间间隔 $[0,T(\varepsilon)]$ 内，轨线将进入集合 $\Omega_c\times\Sigma$，其中 $\lim\limits_{\varepsilon\to0}T(\varepsilon)=0$。因此，若 ε 取的足够小，就能确保 $T(\varepsilon)<T_1$。 ◀

[292]

现在我们来看一般的情形，考虑系统

$$\dot{\omega}=\psi(\omega,x,u) \tag{12.21}$$

$$\dot{x}_i=x_{i+1}+\psi_i(x_1,\cdots,x_i,u),\quad 1\leqslant i\leqslant\rho-1 \tag{12.22}$$

$$\dot{x}_\rho=\phi(\omega,x,u) \tag{12.23}$$

$$y=x_1 \tag{12.24}$$

$$z=q(\omega,x) \tag{12.25}$$

其中，$u\in R^m$ 是控制输入，$y\in R$ 和 $z\in R^s$ 是测量输出，$\omega\in R^\ell$ 和 $x\in R^\rho$ 一起构成状态向量。设函数 ψ、ϕ、q 对其变量 $(\omega,x,u)\in D_\omega\times D_x\times R^m$ 都是局部 Lipschitz 的，其中 $D_\omega\subset R^s$ 和 $D_x\subset R^\rho$ 是包含各自原点的区域，并设 $\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_{\rho-1}$ 全局满足 Lipschitz 条件式(11.2)。另外，设 $\phi(0,0,0)=0$，$\psi(0,0,0)=0$，$q(0,0)=0$。我们的目标是设计一个能镇定原点的输出反馈控制器。

[293]

当 $\psi_1=\cdots=\psi_\rho=0$ 时，方程式(12.22)～(12.23)表示 ρ 个积分器串联。模型式(12.21)～(12.25)的来源主要有两方面，分别是 8.1 节中的规范型和机电系统，其中机电系统中的位移是可测的，而它们的导数(速度、加速度等)是不可测的。当 $\psi_1,\cdots,\psi_{\rho-1}$ 都独立于 u 时，方程式(12.22)～(12.23)是形如式(9.17)的严格反馈型。如果 y 是唯一的可测量变量，则方程式(12.25)要删掉。然而，在许多问题中，除了 y，我们还可以测量到其他一部分状态变量。例如，A.8 节所述的磁悬浮系统模型是

$$\dot{x}_1=x_2$$

$$\dot{x}_2=-bx_2+1-\frac{4cx_3^2}{(1+x_1)^2}$$

$$\dot{x}_3=\frac{1}{T(x_1)}\left[-x_3+u+\frac{\beta x_2x_3}{(1+x_1)^2}\right]$$

其中，归一化变量 x_1、x_2、x_3 分别是球的位置、速度和电磁铁电流。通常，我们能测量的有球的位置 x_1 和电流 x_3。该模型和式(12.21)～(12.25)吻合，只要把 (x_1,x_2) 视作为 x，把 x_3 看作 ω，则可测量的输出就是 $y=x_1$ 和 $z=x_3$。

我们可以分两步来设计输出反馈控制器。第一步用 x 和 z 设计一个部分状态反馈来渐近镇定原点；第二步设计一个高增益观测器，由 y 来估计 x 的值。设状态反馈采用动态反馈

$$\dot{\vartheta}=\Gamma(\vartheta,x,z),\quad u=\gamma(\vartheta,x,z) \tag{12.26}$$

来完成，其中，γ 和 Γ 对它们的自变量在研究的区域内都是局部 Lipschitz 的，且关于 x 全局有界。另外，$\gamma(0,0,0)=0$，$\Gamma(0,0,0)=0$。若不管 $\dot{\vartheta}$-方程，则上述方程退化成静态反馈控制 $u=\gamma(x,z)$，而式(12.26)是更加一般的形式。第 13 章中出现的积分控制就可认为是它的一个特例。如果函数 γ 和 Γ 对 x 不是全局有界的，那么我们可以在 x 的某个紧集外进行饱和处理。如例 12.3 所做的那样，饱和的水平可以通过计算边界来确定，或者通过对正在研究的紧集内的几个初始值做仿真来确定。

为了方便起见，把状态反馈下的闭环系统记为

$$\dot{\chi}=f(\chi) \tag{12.27}$$

其中，$\chi=\mathrm{col}(\omega,x,\vartheta)$。此时，如采用输出反馈控制，则是

294

$$\dot{\vartheta}=\Gamma(\vartheta,\hat{x},z),\quad u=\gamma(\vartheta,\hat{x},z) \tag{12.28}$$

其中，$\hat{x}$由高增益观测器

$$\dot{\hat{x}}_i=\hat{x}_{i+1}+\psi_i(\hat{x}_1,\cdots,\hat{x}_i,u)+\frac{\alpha_i}{\varepsilon^i}(y-\hat{x}_1),\quad 1\leqslant i\leqslant\rho-1 \tag{12.29}$$

$$\dot{\hat{x}}_\rho=\phi_0(\hat{x},z,u)+\frac{\alpha_\rho}{\varepsilon^\rho}(y-\hat{x}_1) \tag{12.30}$$

产生，其中，ε 是足够小的正常数，选取正数 $\alpha_1,\cdots,\alpha_\rho$ 使方程

$$s^\rho+\alpha_1 s^{\rho-1}+\cdots+\alpha_{\rho-1}s+\alpha_\rho=0 \tag{12.31}$$

的所有根具有负实部。函数 $\phi_0(\hat{x},z,u)$可以认为是 $\phi_0(x,z,u)$的具体实现，而 $\phi_0(x,z,u)$可以看做是 $\phi(\omega,x,u)$的标称模型，这里要求 $\phi_0(x,z,u)$在研究的区域内对其变量是局部 Lipschitz 的，且关于 x 全局有界。另外，$\phi_0(0,0,0)=0$。下面的定理阐述了在输出反馈控制下闭环系统的一些特性[㊀]。

定理 12.2 考虑闭环系统式(12.21)～(12.25)和输出反馈控制式(12.28)～(12.30)。假设式(12.27)的原点是渐近稳定的，$\mathcal{R}$为其吸引域。令$\mathcal{S}$是$\mathcal{R}$内的任一紧集，$\mathcal{Q}$为 R^ρ 中的任一紧集。则对任意给定的 $\mu>0$，存在依赖于 μ 的 $\varepsilon^*>0$ 和 $T^*>0$，使得对于每一个 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon^*$，始于$\mathcal{S}\times\mathcal{Q}$的闭环系统的解$(\chi(t),\hat{x}(t))$，对于所有 $t\geqslant0$ 有界，并满足以下不等式

$$\|\chi(t)\|\leqslant\mu,\|\hat{x}(t)\|\leqslant\mu,\quad\forall t\geqslant T^* \tag{12.32}$$

$$\|\chi(t)-\chi_r(t)\|\leqslant\mu,\quad\forall t\geqslant 0 \tag{12.33}$$

其中，χ_r 是式(12.27)的解，初始值为 $\chi(0)$。进一步，如果系统式(12.27)的原点是指数稳定的，则闭环系统的原点也是指数稳定的，$\mathcal{S}\times\mathcal{Q}$为吸引域的一个子集。

该定理展示了当 ε 充分小时，输出反馈控制器的若干特性。第一，式(12.32)表明若选取的 ε 足够小，就可以使得轨线进入到原点足够小的邻域内。第二，式(12.33)表明当 ε 趋向 0 时，输出反馈下的解 $\chi(t)$接近于状态反馈下的解 $\chi_r(t)$。第三，如果前两点特性适用于吸引域内的任何紧集，则该输出反馈控制能恢复状态反馈控制的吸引区域。最后，当状态反馈下的原点是指数稳定时，则输出反馈可维持指数稳定性[㊁]。作为定理的一个推论，如果状态反馈控制器实现了全局或者半全局稳定且局部指数稳定，则对充分小的 ε，输出反

295

㊀ 当 $\psi_1=\cdots=\psi_{\rho-1}=0$ 时，文献[74，定理 14.6]给出了证明。如文献内的 11.4 节所示，ψ_i's 的存在不会影响定理的证明，因为估计误差 η 满足方程式(11.36)，其中 δ 满足式(11.37)。另外，例 12.3 给出了证明大致步骤。

㊁ 方便起见，渐近稳定的保持只考虑了指数稳定的情形。对更一般的情形，请参阅文献[9]，那里考虑了当原点只是渐近稳定的，而不是指数稳定的情形。

馈控制器也能够实现半全局镇定且局部呈指数稳定。

式(12.33)给出的轨线逼近特性有相当重要的实用意义，因为它允许设计者先设计出状态反馈控制去满足系统对瞬态特性的要求，以及对控制或者输入的限制，然后，采用饱和的手段在研究区域之外让估计状态$\hat{x}$或者输入u达到饱和，于是可以使得$\gamma(\vartheta, \hat{x}, z)$，$\Gamma(\vartheta, \hat{x}, z)$和$\phi_0(\hat{x}, z, u)$关于$\hat{x}$全局有界。设计者还可以调整$\varepsilon$的大小，通过单调递减$\varepsilon$，使得输出反馈下的轨线充分接近状态反馈下的轨线。这就是典型的分离原则，也就是说状态反馈的设计和观测器的设计可以分开。

12.5 最小相位系统的鲁棒稳定性

本节讨论相对阶为ρ的单输入-单输出非线性系统，要求它能够转化成8.1节中讲到的规范型。假设系统为最小相位，我们的目标是设计一个反馈控制器，在存在匹配不确定项和时变干扰的情况下稳定系统原点。在12.5.1节中，考虑的系统相对阶为1。该节中的鲁棒镇定控制器的设计是第10章所讲的状态反馈镇定的自然延续。在12.5.2节中，我们考虑具有更高相对阶的系统，并研究如何用高增益观测器将镇定问题简化成相对阶为1的系统。

12.5.1 相对阶为1的情形

当$\rho=1$时，系统的规范型为

$$\dot{\eta} = f_0(\eta,y), \quad \dot{y} = a(\eta,y) + b(\eta,y)u + \delta(t,\eta,y,u) \tag{12.34}$$

其中，$\eta \in R^{n-1}$，$u \in R$，$y \in R$，函数f_0、a、b都是局部Lipschitz的，$f_0(0, 0)=0$，$a(0, 0)=0$。方程式(12.34)包含一个匹配的时变干扰信号δ，假设δ关于(η, y, u)是局部Lipschitz的，且关于t分段连续。设$D \subset R^n$是一个包含原点的区域，并假设对于所有的$(\eta, y) \in D$，有$b(\eta, y) \geqslant b_0 > 0$。当$\xi=y$时，方程式(12.34)具有规范型，如式(10.4)。因为系统是最小相位的，$\dot{\eta}=f_0(\eta, 0)$的原点是渐近稳定的。因此，我们可取滑模面为$y=0$。假设存在一个(连续可微)Lyapunov函数$V(\eta)$，对于所有的$(\eta, y) \in D$，有

296

$$\alpha_1(\|\eta\|) \leqslant V(\eta) \leqslant \alpha_2(\|\eta\|) \tag{12.35}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \eta} f_0(\eta,y) \leqslant -\alpha_3(\|\eta\|), \quad \forall \|\eta\| \geqslant \alpha_4(|y|) \tag{12.36}$$

其中，α_1，…，α_4都是$\mathcal{K}$类函数。由定理4.7，不等式(12.36)说明将y视为输入时，系统$\dot{\eta}=f_0(\eta, y)$是区域输入-状态稳定的。与式(10.7)类似，控制取为

$$u = \psi(y) + v$$

其中，ψ可以为0或者是被用来抵消方程$\dot{y}$右边的某些已知项，注意它仅依赖于y。假设已知有局部Lipschitz函数$\varrho(y) \geqslant 0$和常数$\kappa_0 \in [0, 1)$，使得对于所有的$t \geqslant 0$，$(\eta, y) \in D$，$v \in R$，有

$$\left| \frac{a(\eta,y) + b(\eta,y)\psi(y) + \delta(t,\eta,y,\psi(y)+v)}{b(\eta,y)} \right| \leqslant \varrho(y) + \kappa_0 |v| \tag{12.37}$$

与式(10.12)类似，取

$$v = -\beta(y)\,\mathrm{sat}\left(\frac{y}{\mu}\right)$$

其中，$\beta(y)$是一个局部Lipschitz函数，且存在$\beta_0 > 0$，使得下列不等式成立

$$\beta(y) \geqslant \frac{\varrho(y)}{1-\kappa_0} + \beta_0 \tag{12.38}$$

总控制律为

$$u = \psi(y) - \beta(y)\mathrm{sat}\left(\frac{y}{\mu}\right) \tag{12.39}$$

除了用 y 替代了 s，它与状态反馈非常相似，这里还限定 β 和 ψ 是 y 的函数而不是所有状态向量的函数。下面的两个定理可以看成是定理 10.1 和定理 10.2 的推论。

定理 12.3　考虑系统式(12.34)，假设存在 $V(\eta)$、$\varrho(y)$、κ_0，满足由式(12.35)、(12.36)和(12.37)构成的不等式组。u 由式(12.39)给出，其中的 β 满足式(12.38)。定义$\mathcal{K}$类函数 α：$\alpha(r)=\alpha_2(\alpha_4(r))$，假设 $c>\mu$，$c_0\geqslant\alpha(c)$能使集合

$$\Omega = \{V(\eta)\leqslant c_0\}\times\{|y|\leqslant c\} \quad c_0\geqslant\alpha(c) \tag{12.40}$$

为紧集并包含于 D。那么，Ω 是正不变的，对 Ω 内的任意初始值，对所有的 $t\geqslant0$，状态有界并在有限时间内到达正不变集

$$\Omega_\mu = \{V(\eta)\leqslant\alpha(\mu)\}\times\{|y|\leqslant\mu\} \tag{12.41}$$

如果假设全局成立，且 $V(\eta)$径向无界，那么前面的结论对于任何初始状态都成立。

297

定理 12.4　如果定理 12.3 中所有假设都满足，且 $\varrho(0)=0$，$\dot{\eta}=f_0(\eta,0)$的原点是指数稳定的，则存在 $\mu^*>0$，使得对所有的 $0<\mu<\mu^*$，闭环系统的原点是指数稳定的，Ω 为吸引域的一个子集。如果假设全局成立，且 $V(\eta)$径向无界，那么原点是全局一致渐近稳定的。

12.5.2　相对阶高于 1 的情形

相对阶 $\rho>1$ 的系统的规范型为

$$\dot{\eta} = f_0(\eta,\xi) \tag{12.42}$$

$$\dot{\xi}_i = \xi_{i+1},\quad 1\leqslant i\leqslant\rho-1 \tag{12.43}$$

$$\dot{\xi}_\rho = a(\eta,\xi)+b(\eta,\xi)u+\delta(t,\eta,\xi,u) \tag{12.44}$$

$$y = \xi_1 \tag{12.45}$$

其中，$\eta\in R^{n-\rho}$，$\xi=\mathrm{col}(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_\rho)$，$u\in R$，$y\in R$，$f_0$、$a$、$b$ 都是局部 Lipschitz 函数。匹配的干扰 δ 关于时间 t 分段连续，关于(η,ξ,u)是局部 Lipschitz 的。假设 $D\subset R^n$ 为包含原点的一个区域，且对于所有的$(\eta,\xi)\in D$，有 $b(\eta,\xi)\geqslant b_0>0$。由于系统为最小相位系统，$\dot{\eta}=f_0(\eta,0)$的原点是渐近稳定的。

根据 11.4 节中讲的关于高增益观测器的特性和 12.4 节中的分离原则，如果我们能设计出应用 ξ 的部分状态反馈，它能够镇定或实际镇定原点，那么我们就可能通过一个高增益观测器来估计 ξ，进而用估计值代替 ξ 实现原先设计的系统性能。基于这种设想，我们先设计关于 ξ 的反馈控制器㊀。

通过重新组织 ξ 的值，我们能够把相对阶为 ρ 的系统转化为相对阶为 1 的系统。考虑输出为

$$s = k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{\rho-1}\xi_{\rho-1}+\xi_\rho \tag{12.46}$$

该系统的规范型为

㊀ 或者使用滑模观测器实现鲁棒镇定[85,124]。

$$\dot{z} = \overline{f}_0(z,s), \quad \dot{s} = \overline{a}(z,s) + \overline{b}(z,s)u + \overline{\delta}(t,z,s,u) \tag{12.47}$$

其中，

$$z = \begin{bmatrix} \eta \\ \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_{\rho-2} \\ \xi_{\rho-1} \end{bmatrix}, \quad \overline{f}_0(z,s) = \begin{bmatrix} f_0(\eta,\xi) \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_{\rho-1} \\ \xi_\rho \end{bmatrix}, \quad \overline{a}(z,s) = \sum_{i=1}^{\rho-1} k_i\xi_{i+1} + a(\eta,\xi)$$

$$\overline{b}(z,s) = b(\eta,\xi), \quad \overline{\delta}(t,z,s,u) = \delta(t,\eta,\xi,u)$$

式中，$\xi_\rho = s - \sum_{i=1}^{\rho-1} k_i\xi_i$。函数 $\overline{f}_0$、$\overline{a}$、$\overline{b}$、$\overline{\delta}$ 分别保留了 f_0、a、b、δ 的性质。特别地，对于所有$(\eta,\ \xi)\in D$，有 $\overline{b}(z,\ s)\geqslant b_0>0$。系统(式(12.47))的零动态为 $\dot{z}=\overline{f}_0(z,\ 0)$。可将该系统写成串联形式

$$\dot{\eta} = f_0(\eta,\xi)\Big|_{\xi_\rho = -\sum_{i=1}^{\rho-1} k_i\xi_i}, \quad \dot{\zeta} = F\zeta \tag{12.48}$$

其中，

$$\zeta = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_{\rho-1} \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 & \cdots & -k_{\rho-2} & -k_{\rho-1} \end{bmatrix}$$

298

由最小相位的假设可知，$\dot{\eta}=f_0(\eta,\ 0)$的原点 $\eta=0$ 是渐近稳定的。如果矩阵 F 是 Hurwitz 的，那么串联系统式(12.48)的原点 $z=0$ 是渐近稳定的。因此，选取式(12.46)中的 k_1，…，$k_{\rho-1}$的值，使下列多项式是 Hurwitz 的：

$$\lambda^{\rho-1} + k_{\rho-1}\lambda^{\rho-2} + \cdots + k_2\lambda + k_1 \tag{12.49}$$

即它的所有根具有负实部。因此，k_1，…，$k_{\rho-1}$的值都是正常数。正如附录 C.1 中讲到的那样，为分析串联系统式(12.48)原点的渐近稳定性，可选取 Lyapunov 函数 $V_1(z)=cV_0(\eta)+\sqrt{\zeta^{\mathrm{T}}P\zeta}$，其中 V_0 是 $\dot{\eta}=f_0(\eta,\ 0)$的 Lyapunov 函数，根据定理 3.9(逆 Lyapunov 定理)可知其一定存在；P 为 Lyapunov 方程 $PF+F^{\mathrm{T}}P=-I$ 的正定解，c 是充分小的正常数。由于函数 $V_1(z)$在流形 $\zeta=0$ 上不连续可微，所以它在原点的邻域内也不连续可微。但是，一旦证明了式(12.48)的原点的渐近稳定性，定理 3.9 就能确保存在一个光滑的 Lyapunov函数，运用 $\overline{f}_0(z,\ s)$关于 s 的局部 Lipschitz 特性，则可以合理地假设：存在一个连续可微的 Lyapunov 函数 $V(z)$，对于所有的$(\eta,\ \xi)\in D$，有

$$\alpha_1(\|z\|) \leqslant V(z) \leqslant \alpha_2(\|z\|) \tag{12.50}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \eta}\overline{f}_0(z,s) \leqslant -\alpha_3(\|z\|), \quad \forall \|z\| \geqslant \alpha_4(|s|) \tag{12.51}$$

其中，α_1，…，α_4 是$\mathcal{K}$类函数。该串联系统的另一个特性是，如果 $\dot{\eta}=f_0(\eta,\ 0)$的原点$\eta=0$ 是指数稳定的，那么系统(式(12.48))的原点 $z=0$ 也将是指数稳定的。这在附录 C.1 中得

299

到了证明。注意到如果 $\iota(\xi)\geqslant 0$，则式(12.47)的零动态为 $\dot{\zeta}=F\zeta$。

至此，我们已经将相对阶为 ρ 的系统转换成满足 12.5.1 节假设的相对阶为 1 的系统。我们接着来设计 12.5.1 节给出的滑模控制器，由于假设 ξ 是可测的，我们期望除了输出 s，函数 ψ、ϱ、β 还可以依赖整个向量 ξ。取

$$u = \psi(\xi) + v$$

ψ 为局部 Lipschitz 函数，$\psi(0)=0$。假设已知有一个局部 Lipschitz 函数 $\varrho(\xi)\geqslant 0$ 和常数 $\kappa_0\in[0, 1)$，使得对所有的 $t\geqslant 0$，$(\eta, \xi)\in D$ 和 $v\in R$，下列不等式成立：

$$\left|\frac{\sum_{i=1}^{\rho-1} k_i\xi_{i+1} + a(\eta,\xi) + b(\eta,\xi)\psi(\xi) + \delta(t,\eta,\xi,\psi(\xi)+v)}{b(\eta,\xi)}\right| \leqslant \widetilde{\varrho}(\xi) + \kappa_0|v| \quad (12.52)$$

由于式(12.52)的左边与

$$\left|\frac{\bar{a}(z,s) + \bar{b}(z,s)\psi(\xi) + \bar{\delta}(t,z,s,\psi(\xi)+v)}{\bar{b}(z,s)}\right|$$

一样。与式(10.12)类似，取 v 为

$$v = -\beta(\xi)\operatorname{sat}\left(\frac{s}{\mu}\right)$$

其中，$\beta(\xi)$ 是一个局部 Lipschitz 函数，满足

$$\beta(\xi) \geqslant \frac{\varrho(\xi)}{1-\kappa_0} + \beta_0, \quad \beta_0 > 0 \quad (12.53)$$

总控制律为

$$u = \psi(\xi) - \beta(\xi)\operatorname{sat}\left(\frac{s}{\mu}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \gamma(\xi) \quad (12.54)$$

除了限定 β 和 ψ 是 ξ 的函数而不是整个状态向量外，其他都与状态反馈控制器相似。定义 $\mathcal{K}$ 类函数 α 为 $\alpha(r)=\alpha_2(\alpha_4(r))$，假设通过选择 μ，$c>\mu$，$c_0\geqslant\alpha(c)$ 使集合

$$\Omega = \{V(z)\leqslant c_0\}\times\{|s|\leqslant c\}, \quad c_0\geqslant\alpha(c) \quad (12.55)$$

为紧集，并包含在 D 中。那么，由定理 10.1 可得 Ω 是正不变的，对所有起始于 Ω 内的初始状态，轨线能够在有限时间内进入正不变集

$$\Omega_\mu = \{V(z)\leqslant\alpha(\mu)\}\times\{|s|\leqslant\mu\} \quad (12.56)$$

如果有 $\varrho(0)=0$，$\dot{\eta}=f_0(\eta, 0)$ 的原点是指数稳定的，定理 10.2 表明存在 $\mu^*>0$，使得对所有的 $0<\mu<\mu^*$，闭环系统的原点指数稳定，Ω 为吸引域的一个子集。 [300]

为了用高增益观测器实现部分状态反馈控制(式(12.54))，我们在紧集 Ω 外应用饱和控制，使其成为一个关于 ξ 的全局有界函数。对于克服高增益观测器的峰值现象来讲。这是需要的[⊖]。可以用不同方法设计饱和控制。我们可以在函数 ψ 和 β 中对 ξ 的每一个分量进行饱和处理。令

$$M_i = \max_{\Omega}\{|\xi_i|\}, \quad 1\leqslant i\leqslant\rho$$

用 $M_i\operatorname{sat}\left(\frac{\xi_i}{M_i}\right)$ 代替 ξ_i，将得到函数 ψ_s 和 β_s，去分别代替 ψ 和 β。或者，令

$$M_\psi = \max_{\Omega}\{|\psi(\xi)|\}, \quad M_\beta = \max_{\Omega}\{|\beta(\xi)|\}$$

取 $\psi_s(\xi)=M_\psi\operatorname{sat}\left(\frac{\psi(\xi)}{M_\psi}\right)$，$\beta_s(\xi)=M_\beta\operatorname{sat}\left(\frac{\beta(\xi)}{M_\beta}\right)$。无论哪种情况，控制器都取为

$$u = \psi_s(\xi) - \beta_s(\xi)\operatorname{sat}\left(\frac{s}{\mu}\right)$$

我们也可以对控制信号本身做饱和，设

$$M_u = \max_{\Omega}\left\{\left|\psi(\xi) - \beta_s(\xi)\operatorname{sat}\left(\frac{s}{\mu}\right)\right|\right\}$$

⊖ 见 11.4 节和 12.4 节。

而将控制律取成

$$u = M_u \mathrm{sat}\left[\frac{\psi(\xi) - \beta_s(\xi)\mathrm{sat}\left(\frac{s}{\mu}\right)}{M_u}\right]$$

不论如何设计饱和控制(式(12.54))，因为在 Ω 上饱和控制与原先的控制(式(12.54))相同，故饱和不影响所有始于 Ω 内的轨线。我们利用高增益观测器

$$\dot{\hat{\xi}}_i = \hat{\xi}_{i+1} + \frac{\alpha_i}{\varepsilon^i}(y - \hat{\xi}_1), \quad 1 \leqslant i \leqslant \rho - 1 \tag{12.57}$$

$$\dot{\hat{\xi}}_\rho = a_0(\hat{\xi}) + b_0(\hat{\xi})u + \frac{\alpha_\rho}{\varepsilon^\rho}(y - \hat{\xi}_1) \tag{12.58}$$

通过 $\hat{\xi}$ 估计 ξ，其中 ε 是充分小的正常数，选取 α_1，…，α_ρ 使得多项式

$$s^\rho + \alpha_1 s^{\rho-1} + \cdots + \alpha_{\rho-1}s + \alpha_\rho \tag{12.59}$$

是 Hurwitz 的，$a_0(\xi)$ 和 $b_0(\xi)$ 是局部 Lipschitz 函数，关于 ξ 全局有界，它们分别为 $a(\eta, \xi)$ 和 $b(\eta, \xi)$ 的标称模型。由于 η 不能够通过观测器式(12.57)～(12.58)获得，所以函数 a_0 和 b_0 与其无关。当 $a_0 = b_0 = 0$ 时就成为一个线性观测器。当对 a 和 b 没有好的模型可用时，或者要求使用线性观测器时，就常常取 $a_0 = b_0 = 0$。此时输出反馈控制器为

301

$$u = \gamma_s(\hat{\xi}) \tag{12.60}$$

其中，$\gamma_s(\hat{\xi})$ 为

$$\psi_s(\hat{\xi}) - \beta_s(\hat{\xi})\mathrm{sat}\left(\frac{\hat{s}}{\mu}\right) \quad 或 \quad M_u \mathrm{sat}\left[\frac{\psi(\hat{\xi}) - \beta(\hat{\xi})\mathrm{sat}\left(\frac{\hat{s}}{\mu}\right)}{M_u}\right]$$

且

$$\hat{s} = \sum_{i=1}^{\rho-1} k_i \hat{\xi}_i + \hat{\xi}_\rho$$

接下来的定理说明了该输出反馈控制器的特性，它的证明在附录 D 中给出。

定理 12.5 考虑系统式(12.42)～(12.45)，选取 k_1，…，$k_{\rho-1}$ 使得多项式(12.49)是 Hurwitz 的。假设存在满足式(12.50)、式(12.51)、式(12.52)的 $V(z)$、$\varrho(\xi)$、κ_0，选取 β 满足式(12.53)。集合 Ω 和 Ω_μ 分别由式(12.55)和式(12.56)定义。考虑式(12.57)～(12.58)给出的高增益观测器和输出反馈控制(式(12.60))，其中选取的 α_1，…，α_ρ 能使多项式(12.59)是 Hurwitz 的。令 Ω_0 为包含在 Ω 内的一个紧集，X 为 R^ρ 的一个紧子集。假设初始值 $(\eta(0), \xi(0)) \in \Omega_0$，$\hat{\xi}(0) \in X$，那么，存在一个依赖于 μ 的 ε^*，使得对于所有的 $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$，闭环系统的状态 $(\eta(t), \xi(t), \hat{\xi}(t))$ 对所有的 $t \geqslant 0$ 有界；并存在依赖于 μ 的有限时间 T，使得当 $t \geqslant T$ 时，有 $(\eta(t), \xi(t)) \in \Omega_\mu$。另外，若 $(\eta_r(t), \xi_r(t))$ 为状态反馈控制(式(12.54))作用下的闭环系统状态，其初始值为 $\eta_r(0) = \eta(0)$ 和 $\xi_r(0) = \xi(0)$，则对给定的任意 $\lambda > 0$，存在依赖于 μ 和 λ 的 $\varepsilon^{**} > 0$，使得对于所有的 $\varepsilon \in (0, \varepsilon^{**})$，有

$$\| \eta(t) - \eta_r(t) \| \leqslant \lambda \text{ 和 } \| \xi(t) - \xi_r(t) \| \leqslant \lambda, \quad \forall t \in [0, T] \tag{12.61}$$

定理 12.6 假设定理 12.5 的所有条件都满足，且 $\varrho(0) = 0$，$\dot{\eta} = f_0(\eta, 0)$ 的原点是指数稳定的，则存在 $\mu^* > 0$，且对于每一个 $\mu \in (0, \mu^*)$，存在依赖于 μ 的 $\varepsilon^* > 0$，使得对于所有的 $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$，输出反馈控制(式(12.60))作用下的闭环系统的原点是指数稳定的，$\Omega_0 \times X$ 为吸引域的一个子集。

定理 12.5 和定理 12.6 说明对于充分小的 ε，输出反馈控制(式(12.60))能够实现状态

反馈控制(式(12.54))的镇定或者实用镇定的要求。式(12.61)显示，它也能保留状态反馈的瞬态性能。

302

例 12.4 在例 10.1 中，我们设计了一个状态反馈控制器

$$u = -2(|x_1| + |x_2| + 1)\mathrm{sat}\left(\frac{s}{\mu}\right)$$

其中，$x_1=\theta-\pi$，$x_2=\dot{\theta}$，$s=x_1+x_2$，$\mu<0.308$，用它将单摆

$$\ddot{\theta} + \sin\theta + b\dot{\theta} = cu$$

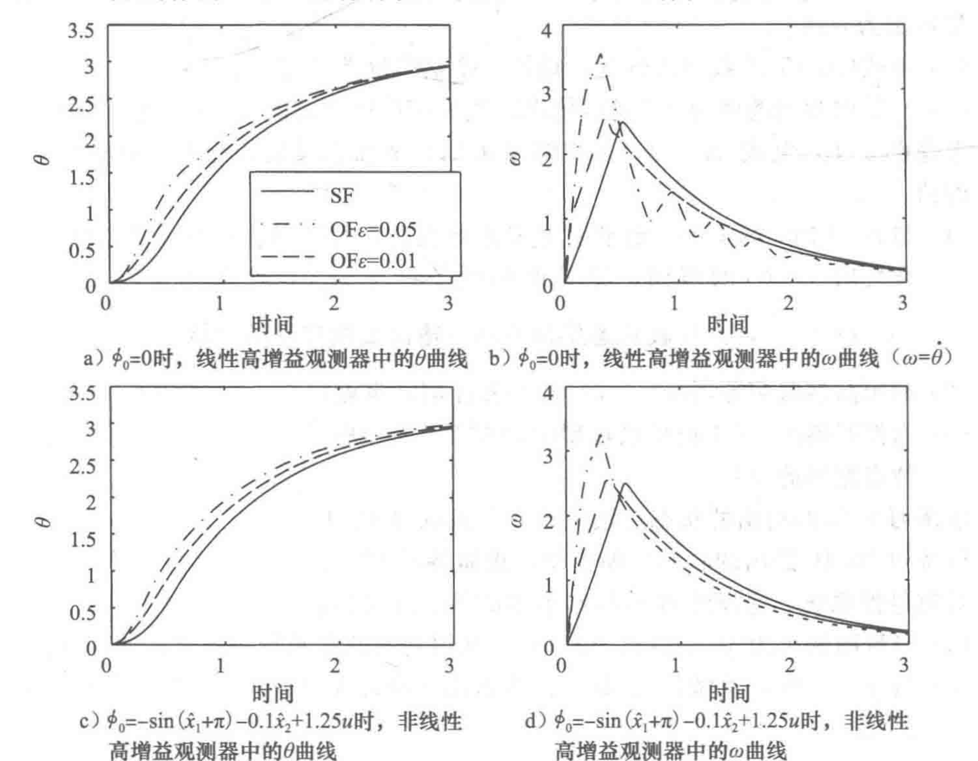
镇定到($\theta=\pi$，$\dot{\theta}=0$)处，其中假设 $0\leqslant b\leqslant 0.2$，$0.5\leqslant c\leqslant 2$。现在取 $\mu=0.1$，该控制器实现了全局镇定。假设只能测量到 θ，为了使用高增益观测器，先在紧集外对状态反馈做饱和。取 $V_1(x)=\frac{1}{2}x_1^2$，可得集合 $\Omega=\left\{|x_1|\leqslant\frac{c}{\theta_1}\right\}\times\{|s|\leqslant c\}$，其中 $c>0$，$0<\theta_1<1$。假设当 $c=2\pi$ 和 $\theta=0.8$ 时，集合 Ω 包含了所有感兴趣的初始值。在集合 Ω 上，我们有 $|x_1|\leqslant 2.5\pi$，$|x_2|\leqslant 4.5\pi$。因此，取输出反馈控制器为

$$u = -2\left(2.5\pi\mathrm{sat}\left(\frac{|\hat{x}_1|}{2.5\pi}\right) + 4.5\pi\mathrm{sat}\left(\frac{|\hat{x}_2|}{4.5\pi}\right) + 1\right)\mathrm{sat}\left(\frac{\mu}{s}\right)$$

其中，$\hat{s}=\hat{x}_1+\hat{x}_2$ 和 $\hat{x}=\mathrm{col}(\hat{x}_1,\hat{x}_2)$，它是下列高增益观测器的输出

$$\dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + \frac{2}{\varepsilon}(x_1 - \hat{x}_1),\quad \dot{\hat{x}}_2 = \phi_0(\hat{x},u) + \frac{1}{\varepsilon^2}(x_1 - \hat{x}_1)$$

式中的 ε 取得充分小。现在来分析 ϕ_0 取两种不同值时的情况。第一种取 $\phi_0=0$，可得一个线性观测器；第二种取 $\phi_0(\hat{x})=-\sin(\hat{x}_1+\pi)-0.1\hat{x}_2+1.25u$，它与状态方程右边相似，用 0.1 和 1.25 分别作为 b 和 c 的标称值。在图 12.7 中，我们比较了当 $\varepsilon=0.05$ 和 $\varepsilon=0.01$



a) $\phi_0=0$时，线性高增益观测器中的θ曲线　b) $\phi_0=0$时，线性高增益观测器中的ω曲线（$\omega=\dot{\theta}$）

c) $\phi_0=-\sin(\hat{x}_1+\pi)-0.1\hat{x}_2+1.25u$时，非线性高增益观测器中的$\theta$曲线　d) $\phi_0=-\sin(\hat{x}_1+\pi)-0.1\hat{x}_2+1.25u$时，非线性高增益观测器中的$\omega$曲线

图 12.7　例 12.4 中状态反馈控制(SF)和输出反馈控制(OF)的比较

时，输出反馈和状态反馈控制器的性能。单摆方程的参数为 $b=0.01$，$c=0.5$，初始值条件为 $\theta(0)=\dot{\theta}(0)=\hat{x}_1(0)=\hat{x}_2(0)=0$。由于 $x_1(0)=-\pi\neq\hat{x}_1(0)$，所以出现了峰值现象。无论 ϕ_0 如何取值，仿真结果表明，随着 ε 的减小，输出反馈下的响应接近于状态反馈下的响应。当 $\varepsilon=0.01$ 时，观测器中的 ϕ_0 对响应影响很小。然而，对于较大的值 $\varepsilon=0.05$，ϕ_0 会对观测器的效果产生有利影响⊖。

12.6 练习

12.1 对下面的每个系统，设计一个全局输出反馈镇定。

303

(1) $\dot{x}_1=x_2,\quad \dot{x}_2=-x_1^3+\tanh(u),\quad y=x_2$

(2) $\dot{x}_1=x_2,\quad \dot{x}_2=-x_1^3+\tanh(u),\quad y=x_1$

(3) $\dot{x}_1=\beta_1(x_1)+x_2,\quad \dot{x}_2=\beta_2(x_1)+\beta_3(x_1)x_2+u,\quad y=x_1$

(4) $\dot{x}_1=\sin x_1+x_2,\quad \dot{x}_2=u,\quad y=x_1$

12.2 对下面的每个系统，设计输出反馈镇定，使得集合 $\{|x_1|\leqslant 1,\ |x_2|\leqslant 1\}$ 包含在吸引域内。

(1) $\dot{x}_1=x_1+\dfrac{x_2}{(1+x_1^2)},\quad \dot{x}_2=-x_2+u,\quad y=x_1$

(2) $\dot{x}_1=ax_1^2+x_2,\quad \dot{x}_2=u,\quad y=x_1$，$a$ 未知但满足 $|a|\leqslant 1$

304

(3) $\dot{x}_1=x_2,\quad \dot{x}_2=-x_2|x_2|+u,\quad y=x_1$

(4) $\dot{x}_1=x_1^3+x_2,\quad \dot{x}_2=x_1x_2+u,\quad \dot{x}_3=x_1x_2-x_3,\quad y=x_1$

12.3 考虑车载倒立摆，见式(A.41)～(A.42)，要求使摆镇定在 $(\theta,\ y)=(0,\ 0)$ 处，测量输出为 θ 和 y。

(1) 用式(A.45)的数据线性化，设计一个输出反馈镇定器。

(2) 当其他初始条件为 0，通过仿真，找出使单摆稳定的 $x_1(0)$ 的范围。

12.4 考虑倒立摆，见式(A.47)，采用练习 9.5(1)的状态反馈控制器，假设只能测量到 θ 的值。

(1) 当 $a=1$ 时，设计一个线性误差动态观测器，并且用它来实现控制反馈。通过仿真找出 $x_1(0)$ 的范围，设其他初始条件都为 0，单摆稳定，且对于所有 t，$|x_1(t)|\leqslant\frac{\pi}{2}$，并比较状态反馈控制与输出反馈控制的性能。

(2) 利用高增益观测器($\varepsilon=0.01$)和饱和控制，重做(1)。

(3) 当控制器的 $a=1$ 但单摆模型中存在干扰使 $a\in[0.5,\ 1.5]$，比较应用上面这两种观测器的效果。

12.5 取练习 9.5(2)给出的状态反馈控制，重做练习 12.4。

12.6 取练习 10.10 给出的状态反馈控制，重做练习 12.4。

12.7 对磁悬浮系统，考虑练习 9.8(2)给出的状态反馈控制。

(1) 当量测输出为 $y=\mathrm{col}(x_1,\ x_3)$ 时，利用高增益观测器和饱和控制完成控制。

(2) 当 $y=x_1$ 时，重做(1)。提示：将系统转换为式(11.26)～(11.28)的形式。

⊖ 其他的仿真结果见文献[74，例 14.19]，说明如果没有一个好的状态方程的模型，ϕ_0 的有利影响将不能实现。

(3) 通过仿真比较状态反馈控制和输出反馈控制之间的性能。

12.8 取练习 9.8(4)给出的状态反馈控制，重做练习 12.7。

12.9 取练习 9.8(5)给出的状态反馈控制，重做练习 12.7。

12.10 取练习 10.7 给出的状态反馈控制，并考虑 b 和 c 具有不确定的情形，重做练习 12.7。 305

12.11 考虑微静电执行器式(A.33)。

(1) 假设只能测量到 x_1 和 x_3，设计一个线性误差动态观测器，用来实现练习 9.9(2)给出的状态反馈控制。当 $x(0)=\text{col}(0.1, 0, \sqrt{0.3})$，$\hat{x}(0)=0$ 时，通过仿真比较状态反馈和输出反馈的性能。

(2) 如果只能测量到 x_1，使用高增益观测器，重做(1)。

12.12 取练习 9.9(4)给出的控制器，重做练习 12.11。

12.13 取练习 9.9(5)给出的控制器，重做练习 12.11。

12.14 取练习 9.9(7)给出的控制器，重做练习 12.11。

12.15 考虑微静电执行器，见式(A.33)，设只能测量到 x_3。设计一个输出反馈控制，使平板镇定在 $x_1=r$ 处，其中假设 $\zeta\in[0.1, 0.5]$，$T\in[0.1, 0.5]$，$r\in[0.1, 0.9]$。取$r=0.5$，$\zeta=0.1$，$T=0.2$，$x(0)=\text{col}(0.1, 0, \sqrt{0.3})$，对闭环系统进行仿真。

12.16 考虑由式(A.36)和式(A.37)给出的双关节机械臂，其数据由式(A.38)给出。假设测量输出为 $y=\text{col}(q_1, q_2)$，要求在控制约束条件 $|u_1|\leqslant 6000$ 和 $|u_2|\leqslant 5000$ 下，调节机械臂到 $q_r=\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$，设计一个满足约束条件的无源控制器。*提示：参考例 12.2，注意，可以用非线性函数代替 $K_d z$ 和 $K_p e$。*

12.17 考虑 TORA 系统，见式(A.49)～(A.52)，测量输出是 $y=x_1=\theta$。设计一个全局输出反馈控制器。*提示：参考练习 5.10 和 9.13。*

12.18 考虑练习 10.13 中给出的 TORA 系统的滑模控制。当测量输出为 $y=\text{col}(x_1, x_3)$ 时，设计一个高增益观测器实现该控制器，其中 β 为常数。运用式(A.53)的数据和练习 10.14(1)给出的控制器参数，比较状态反馈和输出反馈控制器的性能。

12.19 当只能测量到 x_1 时，要求实现半全局稳定目标，重做练习 10.1 的(1)～(5)。 306

第13章 跟踪与调节

本章研究单输入单输出系统的跟踪和调节问题，设系统具有如下的规范形

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, \xi) \tag{13.1}$$

$$\dot{\xi}_i = \xi_{i+1}, \quad 1 \leqslant i \leqslant \rho - 1 \tag{13.2}$$

$$\dot{\xi}_\rho = a(\eta, \xi) + b(\eta, \xi)u \tag{13.3}$$

$$y = \xi_1 \tag{13.4}$$

其中，$\eta \in D_\eta \subset R^{n-\rho}$，$\xi = \mathrm{col}(\xi_1, \cdots, \xi_\rho) \in D_\xi \subset R^\rho$ ⊖，D_η 和 D_ξ 是两个区域。函数 f_0、a、b 都是局部 Lipschitz 函数，且在 $D_\eta \times D_\xi$ 上 $b(\eta, \xi) \neq 0$。当相对阶 $\rho = n$ 时，系统没有零动态，在这种情况下，变量 η 和它的方程都没用了，其他不变。跟踪的目标是设计一个反馈控制，使得输出 y 能够以渐近的方式跟踪参考信号 r，即当状态变量有界时，成立 $\lim\limits_{t\to\infty}[y(t) - r(t)] = 0$。调节问题是跟踪问题的一种特殊情况，其中的 r 为常数。我们假设系统式(13.1)～(13.4)和参考信号满足以下假设条件。

假设 13.1

$$b(\eta, \xi) \geqslant b_0 > 0, \quad \forall \eta \in D_\eta, \quad \xi \in D_\xi$$

假设 13.2 在 $D_\eta \times D_\xi$ 上，系统 $\dot{\eta} = f_0(\eta, \xi)$ 是有界输入-有界输出稳定的，即对于 D_ξ 中的每一个有界量 $\xi(t)$，解 $\eta(t)$ 有界且属于 D_η。

假设 13.3 对于所有 $t \geqslant 0$，$r(t)$ 及其导数 $\dot{r}(t)$，…，$r^{(\rho)}(t)$ 都是有界的，且它的 ρ 阶导数是关于 t 的分段连续函数。另外，对于所有的 $t \geqslant 0$，$\mathcal{R} = \mathrm{col}(r, \dot{r}, \cdots, r^{(\rho-1)}) \in D_\xi$。

对于最小相位系统，零动态 $\dot{\eta} = f_0(\eta, 0)$ 的原点是渐近稳定的，由引理 4.7 可知这时假设 13.2 局部成立。如果系统是输入-状态稳定的或者局部输入-状态稳定，则假设 13.2 全局或者局部成立。注意，当 $\dot{\eta} = f_0(\eta, 0)$ 的原点是稳定而不是渐近稳定时，该假设仍可能成立，如当 $\xi = 0$ 时，系统

$$\dot{\eta} = -\frac{|\xi|}{|\xi| + 1}\eta + \xi$$

中，$\dot{\eta} = 0$ 的原点是稳定而非渐近稳定。但因为 $V_0 = \frac{1}{2}\eta^2$ 的导数对于 $|\eta| \geqslant |\xi| + 1$ 满足 $\dot{V}_0 \leqslant 0$，所以假设 13.2 成立。

参考信号 $r(t)$ 及其导数可以是时间的函数，也可以是当输入为 $u_c(t)$ 时某个参考模型的输出。在后面的例子中，总可以通过选择适当的参考模型来产生需要的 r。例如，对于一个相对阶为 2 的系统，参考模型可以是一个二阶线性时不变系统，其传递函数为

$$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

⊖ 原文误为 R^n。——译者注

可以通过选取正常数 ζ、ω_n 和输入 $u_c(t)$来产生参考信号 $r(t)$，即信号 $r(t)$可由下列状态模型产生：

$$\dot{y}_1 = y_2, \quad \dot{y}_2 = -\omega_n^2 y_1 - 2\zeta\omega_n y_2 + \omega_n^2 u_c, \quad r = y_1$$

进而可计算出 $\dot{r} = y_2, \ddot{r} = \dot{y}_2$。如果 $u_c(t)$分段连续且有界，那么函数 $r(t), \dot{r}(t), \ddot{r}(t)$ 将满足假设 13.3。

做变量替换

$$e_1 = \xi_1 - r, \quad e_2 = \xi_2 - r^{(1)}, \quad \cdots, \quad e_\rho = \xi_\rho - r^{(\rho-1)} \tag{13.5}$$

则系统式(13.1)～(13.4)成为

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, \xi) \tag{13.6}$$

$$\dot{e}_i = e_{i+1}, \quad 1 \leqslant i \leqslant \rho - 1 \tag{13.7}$$

$$\dot{e}_\rho = a(\eta, \xi) + b(\eta, \xi)u - r^{(\rho)} \tag{13.8}$$

在这个坐标系中，设计的目标是确保对于所有 $t \geqslant 0$，向量 $e = \text{col}(e_1, \cdots, e_\rho) = \xi - \mathcal{R}$有界，且当 t 趋向于无穷大时，它收敛到 0。因为$\mathcal{R}$有界，所以 e 有界蕴含了 ξ 有界，进而由假设 13.2 可推出 η 有界。一个能够实现这个目的的状态反馈控制需要用到误差向量 e，还要用到以下假设。

假设 13.4 对于设计的控制器来讲信号 r，$r^{(1)}$，$\cdots$，$r^{(\rho)}$ 是可以获取的。 308

在许多控制问题中，设计者在选择参考信号 r 时有一定的自由。比如，在机器人的控制中，一个典型问题是在一定时间内将机械手从初始点移动到目标点。解决该问题的首要任务是两点之间的路径规划问题，由于障碍物的存在，所以设计必须满足一些物理约束。其次，运动轨迹的规划可由速度和加速度确定，它们是时间的函数。经过轨迹规划得到输出变量要跟踪的参考信号[⊖]。自由地选择参考信号可以提高系统的性能，特别是在控制受到限制的情况下。

用于处理跟踪与调节问题的反馈控制器可以与镇定控制器分在同一类。x 是可以测到的，则称该反馈控制为状态反馈，否则称为输出反馈。另外，反馈控制器既可以是静态的也可以是动态的。它能够实现局部、区域、半全局或者全局跟踪。这些修饰词“局部”、“区域”、“半全局”和“全局”不仅限制了初始状态的变动范围，还限制了参考信号和干扰信号的变动范围。举个例子，在典型问题中局部跟踪意味着对于充分小的初始状态和充分小的$\|\mathcal{R}\|$能够实现跟踪，而全局跟踪意味着对于任何初始状态和有界$\mathcal{R}$都能实现跟踪。当我们实现了终极有界，并且终极边界的值可通过选择设计参数而任意小时，我们就说实现了实用跟踪。它可以是局部的实用跟踪，区域的实用跟踪，半全局的实用跟踪和全局的实用跟踪，这取决于初始状态、参考信号和扰动信号的大小。

本章前三节给出了跟踪问题的状态反馈控制。13.1 节用到了反馈线性化，13.2 节使用滑模控制处理不确定模型和匹配的时变干扰。13.3 节处理一种特殊情况，将系统的状态渐近地或在有限时间内从初始的平衡点移动到最后的平衡点，该设计把控制任务分为了两部分：在前向环节中，通过对参考输入进行补偿来改善暂态响应；在反馈环节设计中，在考虑了模型的不确定性和存在干扰的情况下，继续保证系统的稳定性。13.4 节讨论当参数不确定、常值参考信号和干扰信号存在时，积分器在实现鲁棒调节中的作用。13.5 节考虑输出反馈控制，这时能测量到的信号只有输出 y。我们使用高增益观测器来实现 13.2 节和 13.4 节中的滑模控制。 309

⊖ 关于机械臂的轨迹规划，可参阅文献[119, 135]。

13.1 跟踪控制

将系统式(13.6)～(13.8)重写于下：

$$\dot{\eta}=f_0(\eta,\xi),\quad \dot{e}=A_c e+B_c[a(\eta,\xi)+b(\eta,\xi)u-r^{(\rho)}]$$

其中，$\xi=e+\mathcal{R}$，$(A_c,\ B_c)$代表一系列的ρ积分器串联。由反馈线性化

$$u=\frac{-a(\eta,\xi)+r^{(\rho)}+v}{b(\eta,\xi)}$$

可将系统化简为串联系统

$$\dot{\eta}=f_0(\eta,\xi),\quad \dot{e}=A_c e+B_c v$$

$\dot{e}$-方程可用$v=-Ke$使得A_c-B_cK为 Hurwitz 阵来达到镇定。这样，状态反馈控制的完整表达式为

$$u=\frac{-a(\eta,\xi)+r^{(\rho)}-Ke}{b(\eta,\xi)} \tag{13.9}$$

闭环系统为

$$\dot{\eta}=f_0(\eta,\xi),\quad \dot{e}=(A_c-B_cK)e \tag{13.10}$$

因为A_c-B_cK为 Hurwitz 阵，所以$e(t)$有界，且$\lim\limits_{t\to\infty}e(t)=0$，进而$\xi=e+\mathcal{R}$有界，根据假设 13.2，$\eta$有界。

例 13.1 考虑单摆方程式(A.2)

$$\dot{x}_1=x_2,\quad \dot{x}_2=-\sin x_1-bx_2+cu,\quad y=x_1$$

该系统在R^2上相对阶为 2，并具有规范型，没有零动态。我们想要用输出y去跟踪参考信号$r(t)$，已知它的一阶导数$\dot{r}(t)$和二阶导数$\ddot{r}(t)$有界。取

$$e_1=x_1-r,\quad e_2=x_2-\dot{r}$$

可得

$$\dot{e}_1=e_2,\quad \dot{e}_2=-\sin x_1-bx_2+cu-\ddot{r}$$

状态反馈控制式(13.9)具体为

$$u=\frac{1}{c}[\sin x_1+bx_2+\ddot{r}-k_1e_1-k_2e_2]$$

其中，$K=[k_1,\ k_2]$，它将A_c-B_cK的特征值配置到左半复平面的理想位置上。因为所有假设全局成立，因此该控制器实现了全局跟踪。图 13.1 是当$r=\sin\left(\frac{t}{3}\right)$，$x(0)=\mathrm{col}\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)$时，标称参数$b=0.03$，$c=1$时的系统响应。为了说明反馈增益$K$的作用，我们考虑两种不同的设计。第一种，让$K=[1\quad 1]$，$A_c-B_cK$的特征值在$-0.5\pm \mathrm{j}0.5\sqrt{3}$处，第二种，让$K=[9\quad 3]$，特征值在$-1.5\pm \mathrm{j}1.5\sqrt{3}$处。图 13.1a 显示了第一种设计的响应，图 13.1b显示了第二种设计的响应，虚线表示参考信号r，实线表示输出信号y。可以看出，反馈增益越大，暂态过程的时间越短。图 13.1c 揭示了一个更重要的事实，其中因为质量加倍，b和c分别变成$b=0.015$，$c=0.5$。图 13.1c 中，实线表示第一种设计的输出信号，点划线表示第二种设计的输出信号。第一种设计在在干扰下明显恶化，此图说明较大的反馈增益能对扰动具有更好的鲁棒性。图 13.1d 给出了控制输入的图像，该图说明增强鲁棒性是以增大控制信号为代价的，其中的实线和点划线分别代表第一种设计和第二种设计。◀

310
311

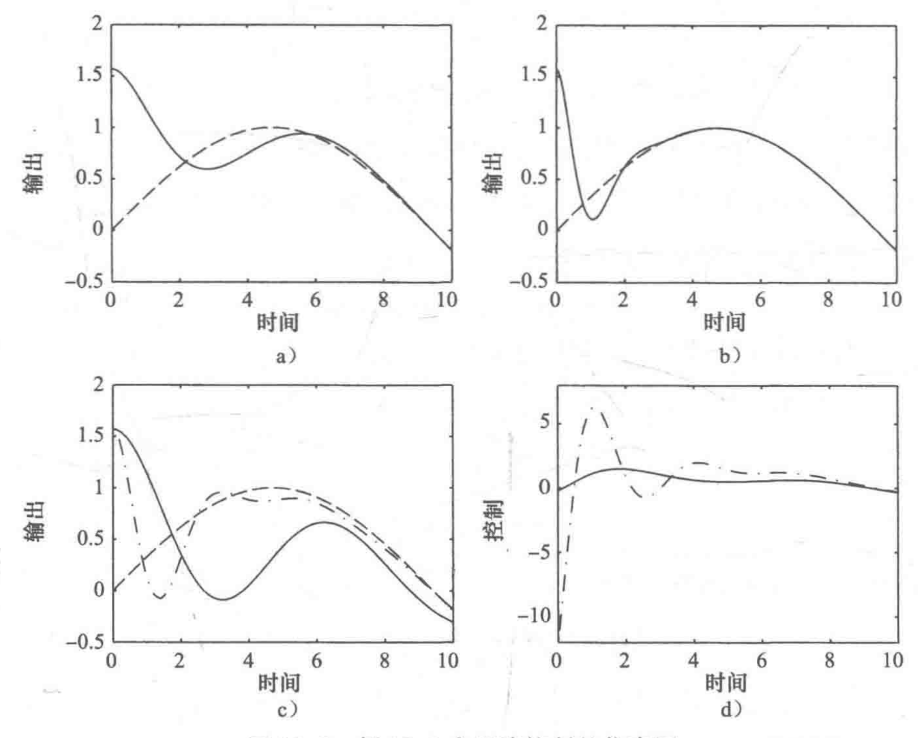


图 13.1 例 13.1 中跟踪控制的仿真图

13.2 鲁棒跟踪控制

系统

$$\dot{\eta}=f_0(\eta,\xi)$$
$$\dot{e}_i=e_{i+1},\quad 1\leqslant i\leqslant\rho-1$$
$$\dot{e}_\rho=a(\eta,\xi)+b(\eta,\xi)u+\delta(t,\eta,\xi,u)-r^{(\rho)}(t)$$

是式(13.6)～(13.8)受到扰动的模型，其中增加了匹配的时变扰动信号 δ，假设 δ 关于时间 t 分段连续，关于(η，ξ，u)是局部 Lipschitz 的。这里要求假设 13.1 和假设 13.2 成立，而允许函数 f_0、a、b 包含不确定项。我们欲用滑模控制设计一个状态反馈控制。$\dot{e}$-方程具有式(10.4)给出的规范型。为了设计滑动流形，我们从下面系统开始

$$\dot{e}_i=e_{i+1},\quad 1\leqslant i\leqslant\rho-1$$

其中，e_ρ 可看作控制输入，通过设计 e_ρ 来稳定原点。对于线性(可控标准型)系统，我们可以通过线性控制

$$e_\rho=-(k_1e_1+\cdots+k_{\rho-1}e_{\rho-1})$$

来实现目标，其中选取 k_1，…，$k_{\rho-1}$，使得多项式

$$\lambda^{\rho-1}+k_{\rho-1}\lambda^{\rho-2}+\cdots+k_1$$

是 Hurwitz 的。滑动流形取为

$$s=(k_1e_1+\cdots+k_{\rho-1}e_{\rho-1})+e_\rho=0$$

那么

$$\dot{s}=\sum_{i=1}^{\rho-1}k_ie_{i+1}+a(\eta,\xi)+b(\eta,\xi)u+\delta(t,\eta,\xi,u)-r^{(\rho)}(t)$$

而，控制 u 可取为

$$u = v \text{ 或者 } u = -\frac{1}{\hat{b}(\eta,\xi)}\left[\sum_{i=1}^{\rho-1} k_i e_{i+1} + \hat{a}(\eta,\xi) - r^{(\rho)}(t)\right] + v \tag{13.11}$$

在第二种情况中，我们消去了 $\dot{s}$-方程右边的已知项。函数$\hat{a}$和$\hat{b}$分别是函数 a 和 b 的标称模型。当$\hat{a}=a$，$\hat{b}=b$ 时，$-\frac{a(\eta,\xi)-r^{(\rho)}(t)}{b(\eta,\xi)}$ 就是我们在前一小节中用到的反馈线性化项。无论哪种情况，$\dot{s}$-方程能表示为

312

$$\dot{s} = b(\eta,\xi)v + \Delta(t,\eta,\xi,v)$$

假设对于所有的 $t\geqslant 0$，$v\in R$，$(\eta,\ \xi)\in D_\eta \times D_\xi$，且有

$$\left|\frac{\Delta(t,\eta,\xi,v)}{b(\eta,\xi)}\right| \leqslant \varrho(\eta,\xi) + \kappa_0 |v|,\quad 0\leqslant \kappa_0 < 1$$

其中，ϱ和 κ_0 已知，则

$$v = -\beta(\eta,\xi)\operatorname{sat}\left(\frac{s}{\mu}\right), \tag{13.12}$$

$\beta(\eta,\ \xi)$为局部 Lipschitz 函数，它满足

$$\beta(\eta,\xi) \geqslant \frac{\varrho(\eta,\xi)}{(1-\kappa_0)} + \beta_0,\quad \beta_0 > 0$$

对于$|s|\geqslant\mu$，确保 $s\dot{s}\leqslant -\beta_0 b_0(1-\kappa_0)|s|$。根据假设 13.2，我们可以将注意力集中在$e(t)$的性能上。设 $\zeta=\operatorname{col}(e_1,\ \cdots,\ e_{\rho-1})$，可以看出 ζ 满足方程

$$\dot{\zeta} = (A_c - B_c K)\zeta + B_c s$$

其中，$K=[k_1\quad k_2\quad \cdots\quad k_{\rho-1}]$，$(A_c,\ B_c)$代表 $\rho-1$ 个积分器的串联。矩阵 A_c-B_cK 是 Hurwitz 矩阵。设 P 是 Lyapunov 方程 $P(A_c-B_cK)+(A_c-B_cK)^{\mathrm{T}}P=-I$ 的解，那么$V_0=\zeta^{\mathrm{T}}P\zeta$ 的导数满足不等式

$$\dot{V}_0 = -\zeta^{\mathrm{T}}\zeta + 2\zeta^{\mathrm{T}}PB_c s \leqslant -(1-\theta)\|\zeta\|^2,\quad \forall \|\zeta\| \geqslant \frac{2\|PB_c\||s|}{\theta}$$

其中，$0<\theta<1$。因为 $\zeta^{\mathrm{T}}P\zeta\leqslant\lambda_{\max}(P)\|\zeta\|^2$，对于任意的 $\sigma\geqslant\mu$，有

$$\left\{\|\zeta\| \leqslant \frac{2\|PB_c\|\sigma}{\theta}\right\} \subset \left\{\zeta^{\mathrm{T}}P\zeta \leqslant \lambda_{\max}(P)\left(\frac{2\|PB_c\|}{\theta}\right)^2\sigma^2\right\}$$

设 $\rho_1=\lambda_{\max}(P)\left(\frac{2\|PB_c\|}{\theta}\right)^2$，并选择 $c>\mu$，使得 $\Omega=\{\zeta^{\mathrm{T}}P\zeta\leqslant\rho_1 c^2\}\times\{|s|\leqslant c\}$覆盖我们讨论的区域。因为在边界$\{|s|=c\}$和$\{V_0=\rho_1 c^2\}$上分别有 $s\dot{s}<0$ 和 $\dot{V}_0<0$，所以集合 Ω 是正不变集。若 $e(0)\in\Omega$，则 $e(t)$在有限时间内进入集合 $\Omega_\mu=\{\zeta^{\mathrm{T}}P\zeta\leqslant\rho_1\mu^2\}\times\{|s|\leqslant\mu\}$，它也是正不变集。在集合 Ω_μ 内，可利用式(B.4)证明 $\max_{\zeta^{\mathrm{T}}P\zeta\leqslant\rho_1\mu^2}|e_1|=\sqrt{\rho_1\mu^2}\|LP^{-\frac{1}{2}}\|$，其中 $L=[1\quad 0\quad \cdots\quad 0]$。取 $k=\|LP^{-\frac{1}{2}}\|\sqrt{\rho_1}$，则可证明$|e_1|$的终极边界是 $k\mu$。

例 13.2 再次考虑例 13.1 的单摆跟踪问题。

$$\dot{e}_1 = e_2,\quad \dot{e}_2 = -\sin x_1 - bx_2 + cu - \ddot{r}$$

其中，$r(t)=\sin\left(\frac{t}{3}\right)$，假设 b 和 c 为不确定参数，满足 $0\leqslant b\leqslant 0.1$，$0.5\leqslant c\leqslant 2$。取 $s=e_1+e_2$，则有

313

$$\dot{s} = e_2 - \sin x_1 - bx_2 + cu - \ddot{r} = (1-b)e_2 - \sin x_1 - b\dot{r} - \ddot{r}$$

可以证明

$$\left|\frac{(1-b)e_2-\sin x_1-b\dot{r}-\ddot{r}}{c}\right|\leqslant\frac{|e_2|+1+\dfrac{0.1}{3}+\dfrac{1}{9}}{0.5}\leqslant 2|e_2|+2.3$$

取 $\beta=2|e_2|+3$，得控制律

$$u=-(2|e_2|+3)\operatorname{sat}\left(\frac{e_1+e_2}{\mu}\right)$$

图 13.2 是当 $\mu=0.1$，$x(0)=\operatorname{col}\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)$时的仿真结果，其中 $b=0.03$，$c=1$ 的情况表示为实线，$b=0.015$，$c=0.5$ 的情况表示为点划线，虚线为参考信号。从图 13.2a 可看出输出响应几乎不能区分；从图 13.2b可看出在时间段[0，0.3]内，轨线进入边界层$\{|s|\leqslant\mu\}$。此图用到的参数值与图 13.1c 的相同，显示了滑模控制器的鲁棒性。

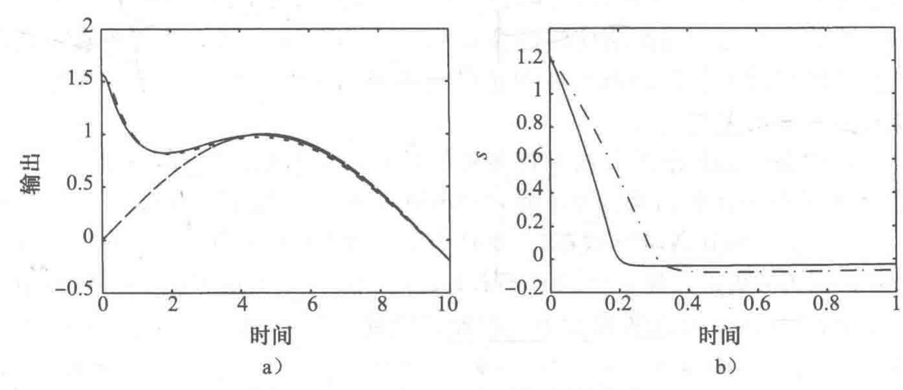


图 13.2　例 13.2 跟踪控制的仿真

13.3　设定点间的转移

考虑系统式(13.1)～式(13.4)

$$\begin{aligned}\dot{\eta}&=f_0(\eta,\xi),\\ \dot{\xi}_i&=\xi_{i+1},\quad 1\leqslant i\leqslant\rho-1,\\ \dot{\xi}_\rho&=a(\eta,\xi)+b(\eta,\xi)u,\\ y&=\xi_1\end{aligned}$$

314

设对于上述系统，在研究的区域内假设 13.1 和 13.2 成立。对于常数输入 $\bar{u}$，平衡点$(\bar{\eta},\ \bar{\xi})$满足方程

$$\begin{aligned}0&=f_0(\bar{\eta},\bar{\xi}),\\ 0&=\bar{\xi}_{i+1},\quad 1\leqslant i\leqslant\rho-1,\\ 0&=a(\bar{\eta},\bar{\xi})+b(\bar{\eta},\bar{\xi})\bar{u},\\ \bar{y}&=\bar{\xi}_1\end{aligned}$$

因此，$\bar{\xi}=\operatorname{col}(\bar{y},\ 0,\ \cdots,\ 0)$。假设方程

$$0=f_0(\bar{\eta},\bar{\xi})$$

在研究的区域内有唯一解 $\bar{\eta}$，记解为 $\bar{\eta}=\phi_\eta(\bar{y})$。进一步，假设 $\bar{\eta}$ 是 $\dot{\eta}=f_0(\eta,\ \bar{\xi})$的一个渐近稳定平衡点(最小相位特性)。因为 $b(\eta,\ \xi)\neq 0$，取 $\bar{u}$ 为

$$\bar{u}=-\frac{a(\bar{\eta},\bar{\xi})}{b(\bar{\eta},\bar{\xi})}\stackrel{\text{def}}{=}\phi_u(\bar{y})$$

这样，为保证输出为常值 $\bar{y}$，我们需要通过常值控制 $\bar{u}=\phi_u(\bar{y})$，将系统保持在平衡点 $\bar{\eta}=\phi_\eta(\bar{y})$ 和 $\bar{\xi}=\text{col}(\bar{y},0,\cdots,0)$，就是说对于每一个 $\bar{y}$，对应唯一的 $(\bar{\eta},\bar{\xi},\bar{u})$。假设 $\phi_\eta(0)=0$，$\phi_u(0)=0$，也不失一般性。

假设我们需要把系统的平衡点从 $y=0$ 移到 $y=y^*$，这个任务可以被转化为一个跟踪问题，其参考信号为

$$r=y^* \text{ 和 } r^{(i)}=0, i\geqslant 1$$

初始条件为 $e(0)=\text{col}(-y^*,0,\cdots,0)$。如果 a 和 b 已知，对 $e(t)$ 的暂态特性的要求较容易满足，因暂态特性可通过极点来刻画，只要使用线性反馈控制

$$u=\frac{-a(\eta,\xi)-Ke}{b(\eta,\xi)}$$

那么 $e(t)$ 满足方程 $\dot{e}=(A_c-B_cK)e$，其暂态性能由极点决定，而极点可以通过 K 任意配置。当 a 和 b 受到干扰时，暂态响应将偏离 $\dot{e}=(A_c-B_cK)e$ 的解。为了处理不确定项，我们可用前面提及的滑模控制，但因为在到达滑模流形前 s 的变化受控于非线性方程，因此其暂态性能需要更多的关注。

另一种满足暂态性能要求的方法是将参考信号 $r(t)$ 取为光滑信号，r 以及它的从 $r^{(1)}$ 到 $r^{(\rho-1)}$ 的导数在 0 时刻的初始值都为 0，则 $r(t)$ 渐近地或在有限时间内趋近于 y^*，而它的导数则趋近于 0。因为 r 和其各阶导数在 $t=0$ 时为 0，则初始值 $e(0)=0$。在无不确定项的线性反馈情形下，因为 e 满足方程 $\dot{e}=(A_c-B_cK)e$，由 $e(0)=0$ 可推出 $e(t)\equiv 0$。因此，对于所有的 $t\geqslant 0$，有 $y(t)\equiv r(t)$。在滑模控制下，前面已经证明集合 $\Omega_\mu=\{\zeta^{\mathrm{T}}P\zeta\leqslant\rho_1\mu^2\}\times\{|s|\leqslant\mu\}$ 是正不变集，其中 $\zeta=\text{col}(e_1,\cdots,e_{\rho-1})$，$s=k_1e_1+\cdots+k_{\rho-1}e_{\rho-1}+e_\rho$。因为 $0\in\Omega_\mu$，

315

$$e(0)=0 \ \Rightarrow\ e(0)\in\Omega_\mu \ \Rightarrow\ e(t)\in\Omega_\mu,\quad \forall\, t\geqslant 0$$

所以，对于所有的 $t\geqslant 0$，$y(t)$ 属于 $r(t)$ 的 $O(\mu)$ 邻域。

可以通过构造参考信号 $r(t)$ 来取得期望的暂态特性。举个例子，$r(t)$ 可看作是下列 Hurwitz 传递函数

$$\frac{a_\rho}{s^\rho+a_1s^{\rho-1}+\cdots+a_{\rho-1}s+a_\rho}$$

的零状态响应，其输入为幅值为 y^* 的阶跃函数。选取正常数 $a_1,\cdots,a_\rho$ 构造所需要的 r。这个传递函数的一个状态空间实现是

$$\dot{z}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 1 \\ -a_\rho & & & -a_1 \end{bmatrix} z+\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_\rho \end{bmatrix} y^*$$

$$r=\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} z$$

由于 r 以及其从 $1\sim\rho-1$ 阶导数的初始值都为 0，所以取 $z(0)=0$。当时间趋向无穷大时，$r(t)$ 接近于 y^*，而它的各阶导数都趋近于 0。

另外一种方法是使轨线 $(r(t),\dot{r}(t),\cdots,r^{(\rho-1)}(t))$ 在有限时间 T 内从点 $(0,0,\cdots,0)$ 移动到点 $(y^*,0,\cdots,0)$。图 13.3 显示了 $\rho=2$ 时的一个例子，其中，

$$r(t)=\begin{cases} \dfrac{at^2}{2}, & 0\leqslant t\leqslant \dfrac{T}{2} \\ -\dfrac{aT^2}{4}+aTt-\dfrac{at^2}{2}, & \dfrac{T}{2}\leqslant t\leqslant T \\ \dfrac{aT^2}{4}, & t\geqslant T \end{cases}$$

取 $a=\frac{4y^*}{T^2}$，以保证 $t\geqslant T$ 时，有 $r(t)=y^*$。这种情况下，没有零动态和有渐近稳定的零动态之间的区别很大。没有零动态时，输入 u 在有限时间 T 内将达到 $\phi_u(y^*)$。当有零动态时，变量 η 在过了 T 时刻后将继续移动，此时 $\eta(t)$ 和 $u(t)$ 将分别渐近地到达平衡值 $\phi_\eta(y^*)$ 和 $\phi_u(y^*)$。

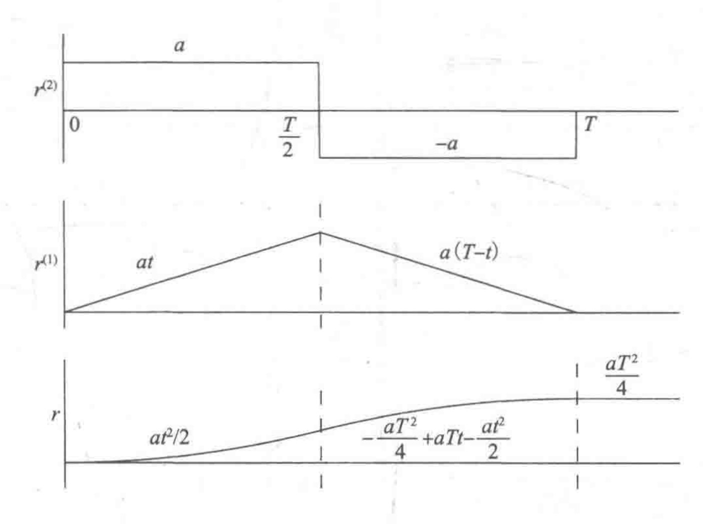


图 13.3 $\rho=2$ 时的轨迹规划图

可以选取不同的参考信号 r，将 y 从 0 移动到 y^*，这种选取的自由能用来解决控制受到约束的问题[⊖]。很明显，在短时期内完成移动输出需要较大的控制。选择合适的参考信号可以使我们避免控制饱和引起的响应恶化。下面的例子将说明了这一点。 316

例 13.3 重新考虑例 13.1 的单摆方程，标称参数值为 $b=0.03$，$c=1$。假设单摆在开环平衡点 $x=0$ 处静止，我们想要将它移动到新的平衡点 $x=\text{col}\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)$处。可以取二阶传递函数$\frac{1}{(\tau s+1)^2}$的输出作为参考信号 r，其有一个幅度为$\frac{\pi}{2}$的阶跃输入。跟踪控制器为

$$u=\sin x_1+0.03x_2+\ddot{r}-9e_1-3e_2$$

取参考模型的初始值为 0，可发现跟踪误差 $e(t)=x(t)-\mathcal{R}(t)$ 将恒等于 0，且对于所有的 t，单摆能够跟踪期望的参考信号。时间常数 τ 的取值决定了从初始位置到终点位置的运动速度。如果对控制信号 u 的大小没有要求，那么我们可以取 τ 任意小，实现从 $x_1=0$ 到 $x_1=\frac{\pi}{2}$ 两点之间的任意快的转换。但是控制输入 u 为电动机的转矩，而电动机能够提供的最大的转矩是有限的，这将限制摆的移动速度。通过选取 τ 值时兼顾转矩的限制，可以避免控制饱和。图 13.4 显示的是当控制 u 限制在 $|u|\leqslant 2$ 时 τ 取两种不同值的图像。当 $\tau=0.2$ 时，控制信号在初始瞬间的饱和现象引起了输出 $y(t)$ 偏离参考信号 $r(t)$，这表明参考信号需要一个电动机产生不了的力矩。另一种是当 $\tau=0.8$ 时，可看出输出信号准确地跟踪了参考信号。这两种情况下，我们都不能取得一个比 4 更好的稳定时间，但是通过取 $\tau=0.8$，可以避免 $\tau=0.2$ 时的超调现象。 317

⊖ 请参阅文献[24, 50, 64]中考虑控制受限的技术方法。

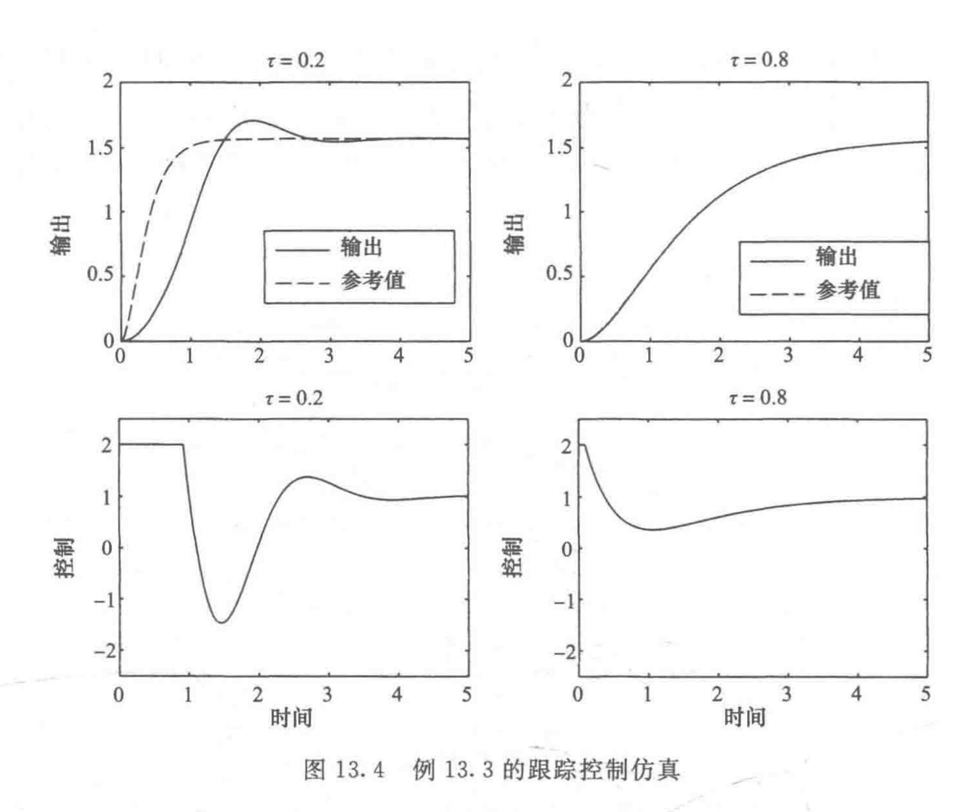


图 13.4　例 13.3 的跟踪控制仿真

13.4　通过积分控制的鲁棒调节

系统

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, \xi, \omega), \tag{13.13}$$

$$\dot{\xi}_i = \xi_{i+1}, \quad 1 \leqslant i \leqslant \rho - 1, \tag{13.14}$$

$$\dot{\xi}_\rho = a(\eta, \xi, \omega) + b(\eta, \xi, \omega)u, \tag{13.15}$$

318

$$y = \xi_1 \tag{13.16}$$

可以看成式(13.1)～(13.4)的扰动模型，其中 $\omega \in D_\omega \subset R^\ell$ 是一个未知常数的向量，D_ω 是扰动 ω 的变动区域。假设 13.1 和 13.2 对于所有 $\omega \in D_\omega$ 都成立，且 b_0 独立于 ω。我们的目标是设计一个状态反馈控制器，使得所有状态变量有界，输出 y 能够渐近调节到常量 $r \in D_r \subset R$。这是 13.2 节所述跟踪问题的一种特殊情形，其中，参考信号为常量，不确定项具有参数 ω。13.2 节中的滑模控制器可确保调节误差 $y-r$ 终极有界，其界为 $k\mu$，$k>0$。通过积分作用，我们能够保证当时间 t 趋向于无穷大时，误差收敛到 0。该控制器将驱动轨迹到平衡点$(\bar{\eta}, \bar{\xi})$，其满足方程

$$0 = f_0(\bar{\eta}, \bar{\xi}, \omega)$$

$$0 = \bar{\xi}_{i+1}, \quad 1 \leqslant i \leqslant \rho - 1$$

$$0 = a(\bar{\eta}, \bar{\xi}, \omega) + b(\bar{\eta}, \bar{\xi}, \omega)\bar{u}$$

$$r = \bar{\xi}_1$$

因此，$\bar{\xi} = \mathrm{col}(r, 0, \cdots, 0)$。

假设 13.5　对于所有的$(r, \omega) \in D_r \times D_\omega$，方程 $0 = f_0(\bar{\eta}, \bar{\xi}, \omega)$ 有唯一解 $\bar{\eta} \in D_\eta$，记为

$\bar{\eta}=\phi_{\eta}(r, \omega)$。

因为 $b\neq 0$，为保持这个平衡点的稳态控制为

$$\bar{u}=-\frac{a(\bar{\eta},\bar{\xi},\omega)}{b(\bar{\eta},\bar{\xi},\omega)} \stackrel{\text{def}}{=} \phi_u(r,\omega)$$

在系统中增加积分器

$$\dot{e}_0 = y - r \tag{13.17}$$

并做变量替换

$$z=\eta-\bar{\eta}, \quad e=\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_\rho \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \xi_1 - r \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_\rho \end{bmatrix}$$

得增广系统

$$\begin{aligned} \dot{z} &= f_0(z+\bar{\eta},\xi,\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{f}_0(z,e,r,\omega) \\ \dot{e}_i &= e_{i+1}, \quad 0\leqslant i\leqslant \rho-1 \\ \dot{e}_\rho &= a(\eta,\xi,\omega)+b(\eta,\xi,\omega)u \end{aligned}$$

它保持了规范型结构，含有 $\rho+1$ 积分器串联。因此，滑模控制器的设计和 13.2 节一样，取

$$s=k_0e_0+k_1e_1+\cdots+k_{\rho-1}e_{\rho-1}+e_\rho$$

319

其中，可通过选取 k_0，…，$k_{\rho-1}$，使多项式

$$\lambda^\rho+k_{\rho-1}\lambda^{\rho-1}+\cdots+k_1\lambda+k_0$$

为 Hurwitz 的。则

$$\dot{s}=\sum_{i=0}^{\rho-1}k_ie_{i+1}+a(\eta,\xi,\omega)+b(\eta,\xi,\omega)u$$

控制器 u 可取为

$$u=v \text{ 或者 } u=-\frac{1}{\hat{b}(\eta,\xi)}\Big[\sum_{i=0}^{\rho-1}k_ie_{i+1}+\hat{a}(\eta,\xi)\Big]+v \tag{13.18}$$

其中，$\hat{a}$和$\hat{b}$分别是 a 和 b 的标称模型，则，

$$\dot{s}=b(\eta,\xi,\omega)v+\Delta(\eta,\xi,r,\omega)$$

如果对所有的$(\eta, \xi, r, \omega)\in D_\eta\times D_\xi\times D_r\times D_\omega$，有

$$\left|\frac{\Delta(\eta,\xi,r,\omega)}{b(\eta,\xi,\omega)}\right|\leqslant \varrho(\eta,\xi)$$

其中，ϱ为一个已知的局部 Lipschitz 函数。取

$$v=-\beta(\eta,\xi)\,\mathrm{sat}\left(\frac{s}{\mu}\right) \tag{13.19}$$

其中，$\beta(\eta, \xi)$是一个局部 Lipschitz 函数，满足$\beta(\eta, \xi)\geqslant\varrho(\eta, \xi)+\beta_0$，$\beta_0>0$。该闭环系统有一个平衡点$(z, e_0, e)=(0, \bar{e}_0, 0)$。如果下面两个假设满足，那么平衡点的收敛性分析与 10.1 节类似。

假设 13.6　对于所有的$(r, \omega)\in D_r\times D_\omega$，系统 $\dot{z}=\tilde{f}_0(z, e, r, \omega)$存在一个 Lyapunov 函数 $V_1(z, r, \omega)$，满足以下不等式

$$\alpha_1(\|z\|)\leqslant V_1(z,r,\omega)\leqslant \alpha_2(\|z\|)$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial z}\tilde{f}_0(z,e,r,\omega) \leqslant -\alpha_3(\|z\|), \quad \forall \|z\| \geqslant \alpha_4(\|e\|)$$

其中，α_1、α_2、α_3、α_4 都为$\mathcal{K}$类函数。

假设 13.7 $z=0$ 是系统 $\dot{z}=\tilde{f}_0(z,\ 0,\ r,\ \omega)$的一个指数稳定平衡点。

320

下面的定理给出了误差收敛于 0 的条件，它的证明见附录 D。

定理 13.1 若系统式(13.13)～(13.16)满足假设 13.1、假设 13.2、假设 13.5、假设 13.6 和假设 13.7，考虑控制器式(13.17)～(13.19)。那么，存在正常数 c、ρ_1、ρ_2 和正定矩阵 P 使得集合

$$\Omega = \{V_1(z) \leqslant \alpha_2(\alpha_4(c\rho_2))\} \times \{\zeta^{\mathrm{T}}P\zeta \leqslant \rho_1 c^2\} \times \{|s| \leqslant c\}$$

为紧集且正不变，其中 $\zeta=\mathrm{col}(e_0,\ e_1,\ \cdots,\ e_{\rho-1})$，且对于所有在 Ω 内的初始状态，有 $\lim\limits_{t\to 0}|y(t)-r|=0$。

在特殊情况 $\beta=k$(常数)，$u=v$ 下，控制器为

$$u=-k\mathrm{sat}\left(\frac{k_0e_0+k_1e_1+\cdots+k_{\rho-1}e_{\rho-1}+e_\rho}{\mu}\right) \tag{13.20}$$

当 $\rho=1$ 时，控制器式(13.20)就是典型的 PI(比例-积分)控制器加饱和控制；当 $\rho=2$ 时，它是经典的饱和 PID(比例-积分-微分)控制器。

例 13.4 考虑单摆方程式(A.2)，假设悬挂点受到一个恒定的水平加速度干扰，状态模型为

$$\dot{x}_1=x_2, \quad \dot{x}_2=-\sin x_1-bx_2+cu+d\cos x_1, \quad y=x_1$$

要求将 y 调节到常数参考信号 r。设 b、c、d 是不确定参数，且满足 $0\leqslant b\leqslant 0.1$，$0.5\leqslant c\leqslant 2$，$0\leqslant d\leqslant 0.5$。定义 $e_1=x_1-r$，$e_2=x_2$，对系统增加积分环节 $\dot{e}_0=e_1$，可得

$$\dot{e}_0=e_1, \quad \dot{e}_1=e_2, \quad \dot{e}_2=-\sin x_1-bx_2+cu+d\cos x_1$$

取 $s=e_0+2e_1+e_2$，使得 $\lambda^2+2\lambda+1$ 的特征值为-1，-1，可得 $\dot{s}$：

$$\dot{s}=e_1+(2-b)e_2-\sin x_1+cu+d\cos x_1$$

可以证明

$$\left|\frac{e_1+(2-b)e_2-\sin x_1+d\cos x_1}{c}\right| \leqslant \frac{|e_1|+2|e_2|+1+0.5}{0.5}=2|e_1|+4|e_2|+3$$

取 $\beta=2|e_1|+4|e_2|+4$，可得控制器

$$u=-(2|e_1|+4|e_2|+4)\mathrm{sat}\left(\frac{e_0+2e_1+e_2}{\mu}\right)$$

为了对比，我们还设计了一个没有积分环节的滑模控制器，其中 $s=e_1+e_2$，则

321

$$\dot{s}=(1-b)e_2-\sin x_1+cu+d\cos x_1$$

由于

$$\left|\frac{(1-b)e_2-\sin x_1+d\cos x_1}{c}\right| \leqslant \frac{|e_2|+1+0.5}{0.5}=2|e_2|+3$$

取 $\beta=2|e_2|+4$，可得到控制器

$$u=-(2|e_2|+4)\mathrm{sat}\left(\frac{e_1+e_2}{\mu}\right)$$

图 13.5 是 $\mu=0.1$，$x(0)=0$，$r=\frac{\pi}{2}$，$b=0.03$，$c=1$，$d=0.3$ 时的仿真结果。实线是没有积分环节的响应，虚线表示有积分环节的响应。由于存在非零干扰 $d\cos x_1$，所以没有积分

环节的控制器有一个稳态误差，而有积分环节的控制器可将误差调节到0。包含积分环节的控制器是以牺牲暂态特性为代价，出现了超调现象，而不带积分环节的控制器是不会产生超调现象的。

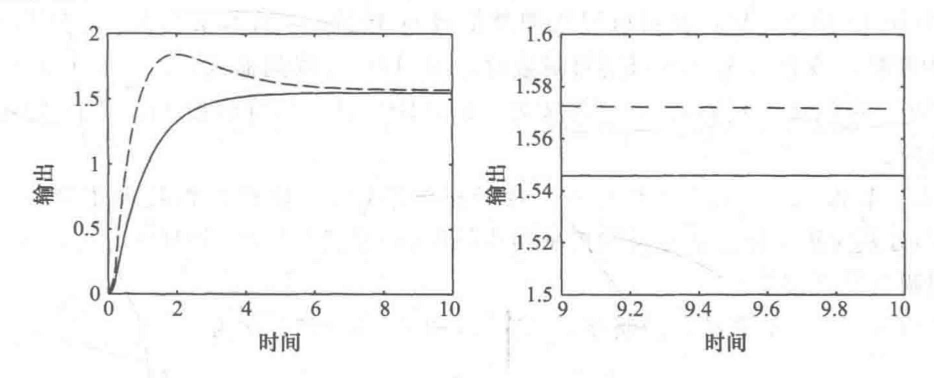


图13.5 例13.4中的调节控制器仿真(虚线表示有积分环节，实线表示没有积分环节) ◀

13.5 输出反馈

13.1节～13.4节给出的跟踪和调节控制器要求测量所有的状态向量，而在本节中，考虑在只能测量到输出 y 的情况下如何设计输出反馈控制器。与12.4节和12.5节一样，我们使用高增益观测器完成设计。首先，通过向量 ξ 设计部分状态反馈控制器，其中 ξ 由输出 y 以及它的导数 $y^{(1)}$，…，$y^{(\rho-1)}$ 构成。因为反馈线性化需要用所有的状态量，所以我们仅将讨论局限于13.2节和13.4节的滑模控制器。将滑模跟踪控制器式(13.11)改为

$$u=-\beta(\xi)\operatorname{sat}\left(\frac{k_1e_1+\cdots+k_{\rho-1}e_{\rho-1}+e_\rho}{\mu}\right) \tag{13.21}$$

322

将滑模调节控制器式(13.18)改为

$$u=-\beta(\xi)\operatorname{sat}\left(\frac{k_0e_0+k_1e_1\cdots+k_{\rho-1}e_{\rho-1}+e_\rho}{\mu}\right) \tag{13.22}$$

其中，$\dot{e}_0=e_1=y-r$。这里的主要的限制是：β 仅依赖于 ξ 而非所有状态向量。因为需要选择 β 来管控函数 $\varrho(\eta,\xi)$，这种限制迫使我们将分析局限在一个紧集中，此紧集中 $\varrho(\eta,\xi)$ 依赖 η 的部分能被一个常数所界定。在输出反馈下，我们通过高增益观测器

$$\dot{\hat{e}}_i=\hat{e}_{i+1}+\frac{\alpha_i}{\varepsilon^i}(y-r-\hat{e}_1),\quad 1\leqslant i\leqslant\rho-1 \tag{13.23}$$

$$\dot{\hat{e}}_\rho=\frac{\alpha_\rho}{\varepsilon^\rho}(y-r-\hat{e}_1) \tag{13.24}$$

并用 $\hat{e}$ 来估计 e，其中 ε 为一足够小的正常数，选取 α_1，…，α_ρ 的值，使多项式

$$\lambda^\rho+\alpha_1\lambda^{\rho-1}+\cdots+\alpha_{\rho-1}\lambda+\alpha_\rho \tag{13.25}$$

为Hurwitz的。估计值 $\hat{\xi}$ 为 $\hat{\xi}=\hat{e}+\mathcal{R}$。为了克服高增益观测器的峰值现象，控制器应该是一个关于 $\hat{e}$ 的全局有界函数。因为饱和函数有界，所以我们只需在研究的紧集外使 $\beta(\hat{\xi})$ 饱和，将饱和函数记为 $\beta_s(\hat{\xi})$，那么输出反馈跟踪控制器为

$$u=-\beta_s(\hat{\xi})\operatorname{sat}\left(\frac{k_1\hat{e}_1+\cdots+k_{\rho-1}\hat{e}_{\rho-1}+\hat{e}_\rho}{\mu}\right) \tag{13.26}$$

而输出反馈调节控制器可写成

$$u = -\beta_s(\hat{\xi})\,\mathrm{sat}\left(\frac{k_0 e_0 + k_1\hat{e}_1 + \cdots + k_{\rho-1}\hat{e}_{\rho-1} + \hat{e}_\rho}{\mu}\right) \tag{13.27}$$

注意，积分器状态 e_0 是可得到的，因为它可以通过对调节误差 $e_1 = y - r$ 积分得到。在式(13.26)和式(13.27)中，我们可以用测量信号 e_1 代替 $\hat{e}_1$。特殊情况是，当式(13.26)给出的 β_s 为常数，或者其为 $\hat{e}$ 而不是 $\hat{\xi}$ 的函数时，因为 $\hat{e}$ 可由观测器式(13.23)～(13.24)输入 $y-r$ 后产生，所以我们只需要 r，而不需要 r 的各阶导数，尽管假设 13.4 说 r 的各阶导数都是已知的。

与 12.4 节和 12.5 节的结果类似，对于充分小的 ε，输出反馈控制器式(13.26)和式(13.27)分别实现了部分状态反馈控制器式(13.21)和式(13.22)的性能。在调节情形下，323 可以看到调节误差收敛到 0 [⊖]。

对于相对阶为 1 的系统，控制器式(13.21)和式(13.22)分别为

$$u = -\beta(y)\,\mathrm{sat}\left(\frac{y-r}{\mu}\right) \text{和} \ u = -\beta(y)\,\mathrm{sat}\left(\frac{k_0 e_0 + y - r}{\mu}\right)$$

其中，$\dot{e}_0 = y - r$。这些控制器仅依赖于可测输出 y，因此不需要用到观测器。

例 13.5 用高增益观测器

$$\dot{\hat{e}}_1 = \hat{e}_2 + \frac{2}{\varepsilon}(e_1 - \hat{e}_1), \quad \dot{\hat{e}}_2 = \frac{1}{\varepsilon^2}(e_1 - \hat{e}_1)$$

来实现例 13.2 中的跟踪控制器

$$u = -(2|e_2| + 3)\,\mathrm{sat}\left(\frac{e_1 + e_2}{\mu}\right)$$

和例 13.4 中的调节控制器

$$u = -(2|e_1| + 4|e_2| + 4)\,\mathrm{sat}\left(\frac{e_0 + 2e_1 + e_2}{\mu}\right)$$

这里，我们用观测器得到的 $\hat{e}_2$ 去代替 e_2，因为 e_1 是一个可测信号，可保持 e_1 不变。为了克服观测器的峰值现象，我们在研究的紧集外对 β 函数中的 $|\hat{e}_2|$ 进行饱和处理。由于饱和函数全局有界，所以不再需要对饱和函数内部的 $\hat{e}_2$ 进行饱和处理。我们通过对状态反馈控制器的分析决定研究的紧集。对于例 13.2 的跟踪控制器，13.2 节的分析表明，集合 $\Omega = \left\{|e_1| \leqslant \frac{c}{\theta}\right\} \times \{|s| \leqslant c\}$ 是正不变集，其中 $c > 0$，$0 < \theta < 1$。取 $c = 2$，$\frac{1}{\theta} = 1.1$，可得 $\Omega = \{|e_1| \leqslant 2.2\} \times \{|s| \leqslant 2\}$。在 Ω 上，$|e_2| \leqslant |e_1| + |s| \leqslant 4.2$。我们在 4.5 处对 $|\hat{e}_2|$ 做饱和处理，可得输出反馈控制器为

$$u = -\left(2 \times 4.5\,\mathrm{sat}\left(\frac{|\hat{e}_2|}{4.5}\right) + 3\right)\mathrm{sat}\left(\frac{e_1 + \hat{e}_2}{\mu}\right)$$

对于例 13.4 中的调节控制器，$\zeta = \mathrm{col}(e_0, e_1)$ 满足方程

$$\dot{\zeta} = A\zeta + Bs, \quad \text{其中}\ A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

从附录 D 关于定理 13.1 的证明可看出，集合 $\Omega = \{\zeta^{\mathrm{T}} P \zeta \leqslant \rho_1 c^2\} \times \{|s| \leqslant c\}$ 是正不变集，其中 $c > 0$，P 是 Lyapunov 方程 $PA + A^{\mathrm{T}}P = -I$ 的解，$\rho_1 = \lambda_{\max}(P)\left(\frac{2\|PB\|}{\theta}\right)^2$，$0 < \theta < 1$。取

⊖ 可以在文献[73]中查阅到一个稍有变动的相关问题的证明。

$c=4$，$\frac{1}{\theta}=1.003$，可得 $\Omega=\{\zeta^{\mathrm{T}}P\zeta\leqslant 55\}\times\{|s|\leqslant 4\}$。运用式(B.4)可证明，在集合 Ω 上，有 $|e_0+2e_1|\leqslant\sqrt{55}\|[1\quad 2]P^{-\frac{1}{2}}\|=22.25$，因此，$|e_2|\leqslant|e_0+2e_1|+|s|\leqslant 26.25$。让 $|\hat{e}_2|$ 在值 27 处饱和，可得输出反馈控制器

324

$$u=-\left(2|e_1|+4\times 27\mathrm{sat}\left(\frac{|\hat{e}_2|}{27}\right)+4\right)\mathrm{sat}\left(\frac{e_0+2e_1+\hat{e}_2}{\mu}\right)$$

图 13.6 是在 ε 取两种不同的值，即 $\varepsilon=0.05$ 和 0.01 时，使用与例 13.2 和例 13.4 相同数据时的仿真结果。图 13.6a 是例 13.2 的跟踪控制，图 13.6b 是例 13.4 的调节控制。在这两幅图中，实线表示状态反馈，虚线表示 $\varepsilon=0.05$ 时的输出反馈曲线，点划线表示 $\varepsilon=0.01$ 时的输出反馈曲线。从图 13.6 中还可以看出，和前面高增益观测器类似，随着 ε 的减小，输出反馈下的响应接近状态反馈下的响应。

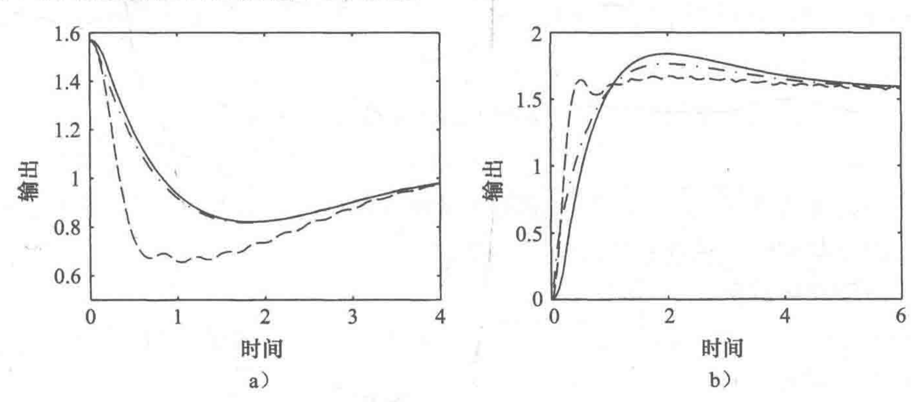


图 13.6 例 13.5 中的输出反馈控制仿真，当 $\varepsilon=0.05$(虚线)和 $\varepsilon=0.01$(点划线)时，相应的输出反馈曲线与状态反馈曲线比较 ◀

13.6 练习

13.1 考虑式(A.30)～(A.32)给出的磁悬浮系统的跟踪问题，其中

$$y=x_1,\quad r(t)=0.5\sin\omega t,\quad \alpha=1.5,\quad \beta=2,\quad b=0,\quad c=1$$

(1) 用反馈线性化设计状态反馈控制器。在 $\omega=1$ 时，通过仿真选择控制器参数，使得调节时间少于 20 个时间单位。

(2) 假设能测量到的是 x_1 和 x_3，设计观测器实现(1)给出的控制器。在 $\omega=1$，$x(0)=\mathrm{col}(1,0,1)$，$\hat{x}(0)=0$ 时，通过仿真比较状态反馈控制器和输出反馈控制器之间的性能。

325

(3) 假设只能测得 x_1，重做(2)。

13.2 当参考信号为 $r(t)=r_0+(r_1-r_0)q(t)$ 时，重做前面的练习，其中，

$$q^{(3)}(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0\leqslant t<1\\ -\frac{1}{2}, & 1\leqslant t<3\\ \frac{1}{2}, & 3\leqslant t<4\\ 0, & t\geqslant 4\end{cases}$$

且 $q(0)=\dot{q}(0)=\ddot{q}(0)=0$，这样的设置可使系统在 4 个时间单位内能从平衡点$x_1=r_0$ 移动到平衡点 $x_1=r_1$ 处。在仿真中，取 $r_0=1$，$r_1=2$，$x(0)=\text{col}(1，0，1)$。

13.3　重做前面的练习，其中 $c\in[0.5，1.5]$为不确定参数，且唯一可利用的信号是跟踪误差(x_1-r)。利用滑模控制器和高增益观测器设计局部 Lipschitz 的反馈控制器。稳态跟踪误差是什么？对 c 取不同值进行仿真。提示：可取控制器为 $u=K\text{sat}\left(\dfrac{K_1\hat{e}_1+K_2\hat{e}_2+\hat{e}_3}{\mu}\right)$，其中$\hat{e}_1$、$\hat{e}_2$、$\hat{e}_3$ 分别是跟踪误差 $e_1=x_1-r$ 及其导数$e_2=\dot{e}_1$，$e_3=\ddot{e}_1$ 的估计值。

13.4　采用积分控制的情况下重做前面的练习。

13.5　考虑微静电执行器式(A.33)的跟踪问题，其中 $r(t)=r_0+(r_1-r_0)q(t)$，$q(t)$是单位阶跃输入下传递函数$\dfrac{1}{(s+1)^3}$的输出。选取参考信号 $r(t)$是为了引导 x_1 从平衡点 $r_0>0$ 处转移到另一个平衡点 $r_1>0$ 处。

(1) 利用反馈线性化设计局部 Lipschitz 的状态反馈控制器，应用参数 $\zeta=0.1$，$T=0.2$，$r_0=0.1$，$r_1=0.5$ 和 $x(0)=\text{col}(0.1，0，\sqrt{0.3})$，对闭环系统进行仿真。

(2) 假设能测量 x_1 和 x_3，设计观测器实现(1)设计的控制器，利用仿真比较状态反馈控制和输出反馈控制之间的性能差别。

(3) 假设只能测量 x_1，重做(2)。

13.6　当参数 $\zeta\in(0，0.5]$和 $T\in[0.1，0.5]$不确定时，利用滑模控制器重做前面的练习。稳态跟踪误差是什么？

13.7　利用积分控制重做前面的练习。

13.8　考虑机械臂式(A.34)、$\hat{M}$、$\hat{C}$、$\hat{g}$分别是 M、C、g 的标称模型。我们想要设计一个反馈控制器，以使信号 $q(t)$能够渐近跟踪参考信号 $q_r(t)$，其中 $q_r(t)$、$\dot{q}_r(t)$、$\ddot{q}_r(t)$ 均连续且有界。

326

(1) 设计局部 Lipschitz 的状态反馈控制器，实现全局实用跟踪。

(2) 假设 q 可测，而 $\dot{q}$ 不可测，设计局部 Lipschitz 的输出反馈控制器，实现半全局实用跟踪。

提示：对模型不确定项假设适当的界。

13.9　练习 1.9 的水箱系统模型为

$$\dot{h}=\frac{u-k\sqrt{\rho g h}}{A(h)}$$

假设 $A(h)\leqslant c_1$，$k\sqrt{\rho g}\leqslant c_2$，$c_1$ 和 c_2 为已知的正常数。试利用滑模控制器，设计一个局部 Lipschitz 的输出反馈控制器，调节 h 到 r，且稳态误差为零。

13.10　考虑 DC 电动机式(A.24)，其中 $\vartheta=0$，非线性摩擦 $\eta(\omega)=k_1\omega+k_2\text{sgn}(\omega)$，$a$、$k_1$、$k_2$ 为未知正常数，假设 $a\in[0.5，1.5]$，$k_1\leqslant 0.1$，$k_2\leqslant 0.2$。设计一个局部 Lipschitz的输出反馈控制器，将 ω 调节到 ω^*，且稳态误差为零。

13.11　悬挂点受恒定水平加速度扰动的单摆的标称模型是

$$\dot{x}_1=x_2,\quad \dot{x}_2=-\sin x_1-bx_2+cu+h$$

其中，$0\leqslant b\leqslant 0.4$，$0.5\leqslant c\leqslant 1.5$，$|h|\leqslant 1$。

(1) 设计一个局部状态反馈控制器，将 x_1 调节到 0，且稳态误差为零。

(2) 假设只能测得 x_1，重做(1)。

13.12　考虑磁悬浮系统，见式(A.29)，其中含有不确定参数 $b\in[0, 0.1]$，$c\in[0.8, 1.2]$。当限制 $-2\leqslant u\leqslant 0$ 时，要求调节 x_1 到 $r\in[0.5, 1.5]$，且稳态误差为零。

(1) 设计一个局部 Lipschitz 状态反馈控制器。

(2) 假设只能测得 x_1，重做(1)。

13.13　考虑系统 $\ddot{y}=f(y,\dot{y})+u$，其中 f 是未知的局部 Lipschitz 函数，且 $f(0, 0)=0$，控制信号 u 的受限范围为 $|u|\leqslant U$，U 为给定常数。假设系统初始在平衡点(0, 0)，我们希望 y 能跟踪一个参考信号 $r(t)$，$r(t)$ 具有性质：①$r(t)$ 有连续且有界的一阶和二阶导数；② $\max_{t\geqslant 0}|\ddot{r}-f(r,\dot{r})|<U$；③$r(0)=\dot{r}(0)=0$。 327

(1) 如果 y、$\dot{y}$、r、$\dot{r}$、$\ddot{r}$ 都可量测，设计一个局部 Lipschitz 反馈控制器，使得对于给定 δ，有 $|y(t)-r(t)|\leqslant\delta$，$\forall\, t\geqslant 0$。

(2) 若只有 y 和 r 可测得，重做(1)。

13.14　拖曳的水下航行器的简化模型为

$$\ddot{\psi}+a\dot{\psi}|\dot{\psi}|=u$$

其中，ψ 是航向角，u 是规范化的转矩，a 是正常数。要求将 ψ 从设定点 0 移动到设定点 ψ^*，参考信号取为 $\psi_r(t)=\psi^*[1-e^{-t}(1+t)]$。

(1) 当 $a=1$，使用反馈线性化设计状态反馈控制器，使得对于所有 $t\geqslant 0$，有 $\psi(t)\equiv\psi_r(t)$。

(2) 设 $a\neq 1$，找到 $|a-1|$ 的上界，使得在(1)中的控制器作用下，跟踪误差随时间 t 趋向于无穷大时，误差收敛于 0。

(3) 假设 $|a-1|\leqslant 0.5$，设计一个局部 Lipschitz 的状态反馈控制器，以实现全局渐近跟踪。

(4) 假设 $|a-1|\leqslant 0.5$，只有 ψ 可测得，设计一个局部 Lipschitz 输出反馈控制器，以实现半全局渐近跟踪。 328

附录 A

示　　例

A.1　单摆

考虑图 A.1 所示单摆，设摆杆长为 l，摆锤质量为 m。假定摆杆为零质量刚体。用 θ 表示以转枢处为顶点的杆和垂直线之间的夹角。当单摆在垂直面内摆动时，摆锤则沿一个半径为 l 的圆弧摆动。为了写出单摆的运动方程，先分析它的受力情况。它受到一个垂直向下的重力 mg 的作用，其中 g 为重力加速度。另外还受到阻碍其运动的摩擦力，我们假定摩擦力的大小和摆球的速度成正比，摩擦系数为 k。假定以转枢为中心沿着 θ 角方向的外加力矩为 T。考虑到转枢处的力矩平衡，可以得到如下运动方程

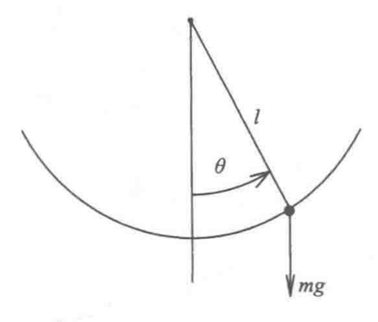


图 A.1　单摆

$$ml^2\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+mgl\sin\theta+kl^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=T$$

当 $T=0$，通过假设$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}=0$，可获得系统平衡点。此时的平衡点个数为无穷多个，即为点$\left(\theta,\ \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)=(n\pi,\ 0)$，其中 $n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$。但从实际位置来看，单摆的平衡点只有两个，即$(0,\ 0)$和$(\pi,\ 0)$，其余的平衡点都是这两个点的重复，重复次数取决于单摆停在这两个位置之前转动的圈数。例如，如果单摆转圈 m 次后停在下方的平衡点$(0,\ 0)$处，那么数学上认为单摆达到的平衡点为$(2m\pi,\ 0)$。在这里，我们仅将注意力集中在$(0,\ 0)$和$(\pi,\ 0)$这两个实际位置的平衡点上。实际上这两个平衡点是很不同的。单摆可以停在$(0,\ 0)$点处，但是很难停在$(\pi,\ 0)$处。因为$(\pi,\ 0)$处的任何微小扰动都会使得单摆离开该点。我们称这两个平衡点的本质区别在于它们的稳定性不同。

我们将单摆运动方程归一化，使得所有的变量都成为无量纲形式。在$(0,\ 0)$点处线性化，这时如果没有摩擦($k=0$)，并且外加力矩为零($T=0$)，单摆会在垂直最下方的位置振荡，其振荡频率为 Ω，$\Omega^2=\frac{g}{l}$。我们可定义无量纲化的时间 $\tau=\Omega t$，则

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\Omega\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau}\quad 且 \quad\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}=\Omega^2\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}\tau^2}$$

定义无量纲力矩 $u=\frac{T}{(m_o gl)}$，其中 m_o是标称质量。用变量上加一点$\left(\dot{}\right)$和变量上加两点$\left(\ddot{}\right)$分别表示变量对于 τ 的一阶导数和二阶导数，得到归一化方程

$$\ddot{\theta}+\sin\theta+b\dot{\theta}=cu \tag{A.1}$$

其中，$b=\frac{k}{(m\Omega)}$，$c=\frac{m_o}{m}$。在研究单摆方程时，有时会将 m 看成不确定的参数，那么就会

导致式(A.1)中的参数 b 和 c 是不确定的。为了获得单摆的状态模型，我们选取状态变量 $x_1=\theta$，$x_2=\dot{\theta}$，那么系统状态方程可写成如下形式：

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\sin x_1 - bx_2 + cu \tag{A.2}$$

当 $u=0$，则得到未加控制输入的状态方程如下：

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\sin x_1 - bx_2 \tag{A.3}$$

令 $b=0$ 以忽略摩擦力作用，这时的状态方程为：

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\sin x_1 \tag{A.4}$$

此时的系统为一个保守系统。也就是说，如果单摆受到一个初始的推动，那么它会一直振荡下去，不断进行势能和动能间的无损耗转换。当然在现实中是不可能出现这种情况，这里的假设仅仅为了使我们更好地理解单摆运动。 330

A.2 质量-弹簧系统

考虑图 A.2 所示的质量-弹簧系统，水平面上有一个质量为 m 的物体，通过弹簧系在一个垂直面上。该物体受到大小为 F 的外力作用。选定一个参考点，然后定义该物体在外力作用下位移为 y，根据牛顿运动定律可写出相应的方程：

$$m\ddot{y} + F_f + F_{sp} = F$$

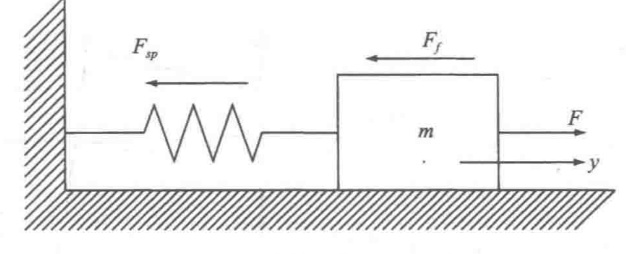


图 A.2 质量-弹簧机械系统

其中，F_f 为摩擦阻力，F_{sp} 为弹性力。我们假定 F_{sp} 仅仅为位移 y 的函数，将它写成 $F_{sp}=g(y)$。同时假定总可通过选择适当的参考点，使得 $g(0)=0$。外力可根据实际情况设定。根据 F，F_f 和 g 的不同，可获得几个有趣的时不变和时变的模型。

如果位移相对较小，弹簧的弹力可以看做是一个线性函数，用方程 $g(y)=ky$ 表示，其中 k 是弹簧弹性系数。如果位移相对较大，弹簧的弹力则是 y 的非线性方程，例如，可以用如下方程表示

$$g(y) = k(1-a^2y^2)y, \quad |ay| < 1$$

此方程给出了所谓的软弹簧模型。在此模型中，位移大于某位移值后，位移量的大幅增加只会引起弹力的小幅增加。与此相对，用如下方程描述的弹簧模型

$$g(y) = k(1+a^2y^2)y$$

称为硬弹簧模型，即，在位移大于某位移值之后，位移量的小幅增加会引起弹簧抗力的大幅增加。

考虑弹簧遭受到的摩擦力 F_f 的作用，摩擦有静摩擦、Coulumb 摩擦和粘性摩擦这几种。当物体处于静止状态，受到水平的静摩擦力，静摩擦力的上下限分别为 $\pm\mu_s mg$，其中 $0<\mu_s<1$ 为静摩擦系数。该摩擦力可取此上下限范围内的任何值来保持该物体的静止状态。要想使得该物体运动起来，必须有一个外力来克服这种静摩擦力。如果没有外力，即 $F=0$，静摩擦力将和弹簧的弹力保持平衡，并在 $|g(y)|\leqslant\mu_s mg$ 条件下一直处于平衡状态。一旦该物体开始运动，F_f 作为阻力和运动方向相反，可认为它是滑动速度 $v=\dot{y}$ 的函数。此时的阻力称 Coulomb 摩擦 F_c，大小为 $\mu_k mg$，其中 μ_k 为 Coulumb 摩擦系数 331

$$F_c = \begin{cases} -\mu_k mg, & 当\ v < 0 \\ \mu_k mg, & 当\ v > 0 \end{cases}$$

当物体在黏性介质中运动，如在空气或润滑油中，此时由于黏滞而产生摩擦力。此摩擦力通常是速度的非线性方程，即，$F_v = h(v)$，其中 $h(0)=0$。当速度较小时，我们可以假定 $F_v = cv$。图 A.3 描述的是不同类型摩擦力的例子。在图 A.3c 中，静摩擦力比 Coulumb 摩擦力大。图 A.3d 和 A.3c 类似，但摩擦力随着速度增大连续减小，也就是所谓的 Stribeck 现象。

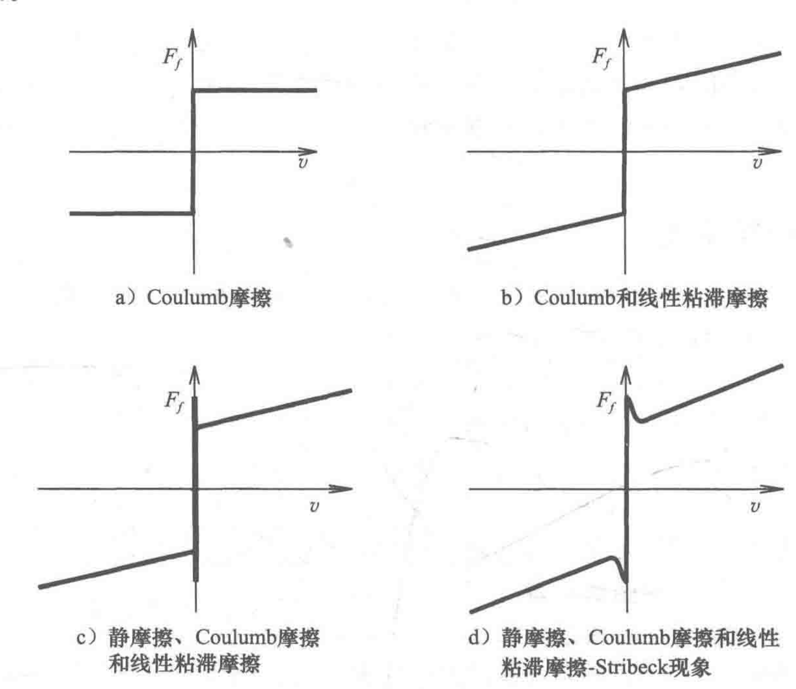


图 A.3 摩擦力模型举例

考虑一个由硬化弹簧、线性粘滞摩擦和周期性外力 $F = A\cos\omega t$ 构成的质量-弹簧系统，由上述分析得到如下的 Duffing 方程

332

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky + ka^2y^3 = A\cos\omega t \tag{A.5}$$

该系统可以看成一个周期外力激励下的经典非线性系统。

考虑具有线性弹簧、静摩擦力、Coulumb 摩擦、线性粘性摩擦和外力 F 的质量-弹簧系统，我们得到

$$m\ddot{y} + ky + c\dot{y} + \eta(y, \dot{y}) = F$$

其中

$$\eta(y, \dot{y}) = \begin{cases} \mu_k mg\,\mathrm{sign}(\dot{y}), & |\dot{y}| > 0 \\ -ky, & \dot{y} = 0\ 且\ |y| \leqslant \dfrac{\mu_s mg}{k} \\ -\mu_s mg\,\mathrm{sign}(y), & \dot{y} = 0\ 且\ |y| > \dfrac{\mu_s mg}{k} \end{cases}$$

当 $\dot{y}=0$ 且 $|y| \leqslant \frac{\mu_s mg}{k}$ 时，$\eta(y, \dot{y})$的值可以从平衡点条件 $\dot{y} = \ddot{y} = 0$ 获得。选取状态 $x_1 = y$，$x_2 = \dot{y}$，控制量 $u = F$，系统的状态空间模型可以写成

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = \frac{-kx_1 - cx_2 - \eta(x_1, x_2) + u}{m} \tag{A.6}$$

我们来看一下这个模型的两个特点。首先，当$u=0$的时候，系统有一个平衡点集，而不是几个孤立的平衡点。其次，等式的右边是一个状态的非连续函数。这里的非连续性来源于理想化的摩擦力模型。我们常常会期望由静摩擦力转变到滑动摩擦力的过程是连续的，而不像我们模型中那样有跳变[⊖]。然而，这种不连续性可以分段处理成线性，因为在$\{x_2>0\}$和$\{x_2<0\}$这两段上，我们可以通过如下模型

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = \frac{-kx_1 - cx_2 - \mu_k mg\,\mathrm{sign}(x_2) + u}{m}$$

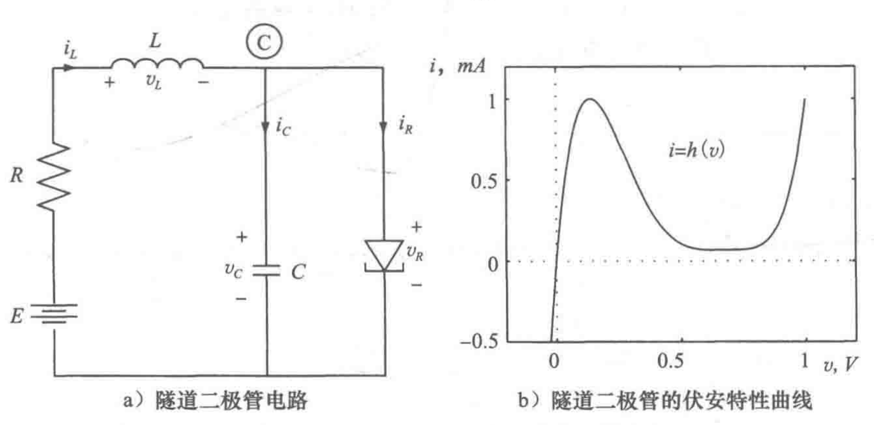
用线性分析方法来预测系统行为。

A.3 隧道二极管电路

考虑如图A.4所示的隧道二极管电路。其中二极管的伏安特性用$i_R=h(v_R)$[25]来描述。该电路中的储能元件为电容C和电感L。假定这些储能元件都是线性时不变的，我们可以用如下方程来描述他们：

$$i_C = C\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t}$$

$$v_L = L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$$



a）隧道二极管电路　　b）隧道二极管的伏安特性曲线

图 A.4　隧道二极管电路及隧道二极管的伏安特性曲线

其中，i和v分别表示通过一个元件的电流和电压，变量的下标表明该元件名称。选取状态$x_1=v_C$，$x_2=i_L$，$u=E$为一个常数输入。为了列出状态空间模型，我们需要将i_C表示成状态x_1、x_2和输入u的函数。根据节点Ⓒ处的Kirchhoff电流定律，得到

333

$$i_C + i_R - i_L = 0$$

因此，$i_C=-h(x_1)+x_2$。类似地，我们需要将v_L表示成状态x_1、x_2和输入u的函数。据左侧环路的Kirchhoff电压定律

$$v_C - E + Ri_L + v_L = 0$$

因此，$v_L=-x_1-Rx_2+u$。可以将该电路的状态空间模型写成

⊖ 从静摩擦力到动摩擦力的平滑过渡可用动态摩擦力模型来描述，具体可参见文献[6]或[100]。

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{C}[-h(x_1) + x_2], \quad \dot{x}_2 = \frac{1}{L}[-x_1 - Rx_2 + u] \tag{A.7}$$

通过令 $\dot{x}_1=\dot{x}_2=0$，解出 x_1 和 x_2，可以获得系统的平衡点

$$0 = -h(x_1) + x_2, \quad 0 = -x_1 - Rx_2 + u$$

因此，该系统的静态平衡点为下列方程的解

$$h(x_1) = \frac{(E - x_1)}{R}$$

从图 A.5 可以看出，对某些给定 E 和 R，这个方程有三个不同根，分别代表了系统的三个孤立平衡点。平衡点的个数可能会随着 E 和 R 的不同而产生变化。例如，如果我们保持 R 不变，增大 E，最终会导致只有平衡点 Q_3。反过来，如果我们保持 R 不变，减小 E，最终会只有一个平衡点 Q_1。

334

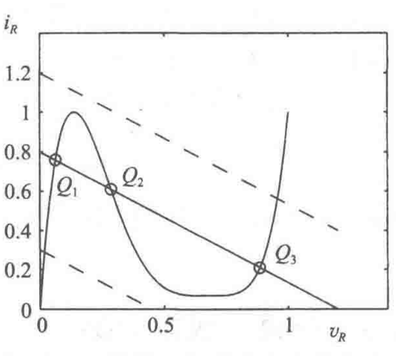


图 A.5 隧道二极管电路的平衡点

A.4 负阻振荡器

图 A.6 给出一类重要的电子振荡器的基本电路[25]，其中假设电容和电感是线性时不变的无源元件，即 $L>0$ 和 $C>0$，阻性元件为有源元件，其伏安特性 v-i(即函数 $i=h(v)$)常用图像表示，其中函数 $h(\cdot)$满足：

$$h(0) = 0, \quad h'(0) < 0, \quad h(v)\text{sign}(v) \to \infty, \quad |v| \to \infty$$

其中，$h'(v)$是 $h(v)$关于 v 的一阶导数。

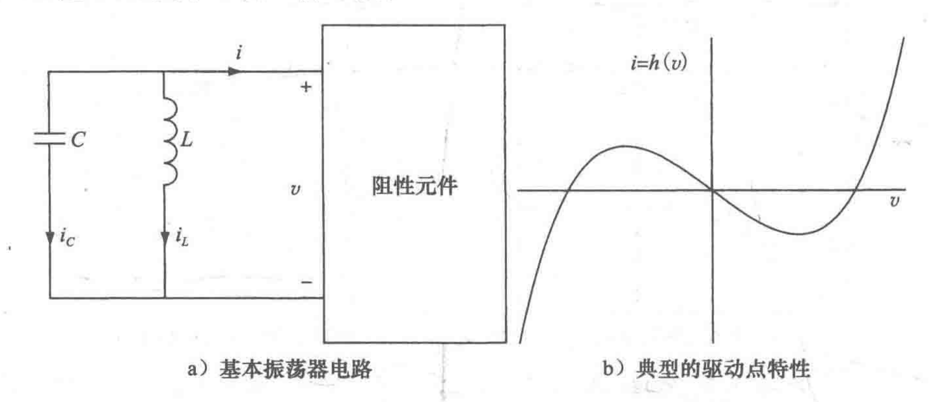


图 A.6 基本振荡器电路及典型的驱动点特性

根据 Kirchhoff 电流定律

$$i_C + i_L + i = 0$$

所以

$$C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v(s)\mathrm{d}s + h(v) = 0$$

对上式求时间的一阶导数，并乘以 L，得到

$$CL\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}t^2} + v + Lh'(v)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$$

令 $\tau=\frac{t}{\sqrt{CL}}$，通过变量替换，可将上式写成非线性控制理论中常用的形式。v 对时间 t 的

导数和对 τ 的导数之间有如下关系

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau}=\sqrt{CL}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \quad 和 \quad \frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}\tau^2}=CL\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}t^2}$$

将 v 对 τ 的导数表示成 $\dot{v}$，则电路方程可以写成

$$\ddot{v}+\varepsilon h'(v)\dot{v}+v=0$$

335

其中，$\varepsilon=\sqrt{\frac{L}{C}}$。该方程是如下 Lienard 方程一个特殊形式

$$\ddot{v}+f(v)\dot{v}+g(v)=0 \tag{A.8}$$

当 $h(v)=-v+\frac{1}{3}v^3$ 时，该电路方程变为

$$\ddot{v}-\varepsilon(1-v^2)\dot{v}+v=0 \tag{A.9}$$

该方程即为 van der Pol 方程，是 van der Pol 研究电子管电路时经常采用的方程，也是非线性振荡理论中最基本的例子。该方程有唯一的平衡点 $v=\dot{v}=0$，还有一个周期解，它会吸引除了平衡点外所有非零解。为了写出该方程的状态空间形式，选取状态变量 $x_1=v$，$x_2=\dot{v}$，则

$$\dot{x}_1=x_2, \quad \dot{x}_2=-x_1-\varepsilon h'(x_1)x_2 \tag{A.10}$$

或者，将状态变量选为 $z_1=i_L$，$z_2=v_C$，那么状态空间模型为

$$\dot{z}_1=\frac{z_2}{\varepsilon}, \quad \dot{z}_2=\varepsilon[-z_1-h(z_2)] \tag{A.11}$$

以 x 为坐标和以 z 为坐标给出的两个状态模型看上去不太一样，但它们都表示了同一个系统。通过坐标变换 $z=T(x)$，就可以实现两个模型间的转换。因为选取的变量 x 和 z 都是具体的物理量，所以容易得到变换 T，即为

336

$$x_1=v=z_2$$

$$x_2=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau}=\sqrt{CL}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\sqrt{\frac{L}{C}}[-i_L-h(v_C)]=\varepsilon[-z_1-h(z_2)]$$

所以

$$z=T(x)=\begin{bmatrix}-h(x_1)-\dfrac{x_2}{\varepsilon}\\ x_1\end{bmatrix} \quad 或 \quad x=T^{-1}(z)=\begin{bmatrix}z_2\\ -\varepsilon z_1-\varepsilon h(z_2)\end{bmatrix}$$

如果将一个大小为 u 的电流源和原电路并联，可得到具有输入的电路方程

$$\dot{z}_1=\frac{z_2}{\varepsilon}, \quad \dot{z}_2=\varepsilon[-z_1-h(z_2)+u] \tag{A.12}$$

其中一个特例就是受控的 van der Pol 方程

$$\dot{z}_1=\frac{z_2}{\varepsilon}, \quad \dot{z}_2=\varepsilon\left[-z_1+z_2-\frac{1}{3}z_2^3+u\right] \tag{A.13}$$

A.5 DC-DC 功率转换器

图 A.7 是一个 DC-DC 功率转换电路，也就是所谓的升压转换器，其中有理想开关、无源线性电容 C、电感 L 和电阻 R[128]。当开关在 $s=1$ 位置时，根据 Kirchhoff 定律，我们有如下方程

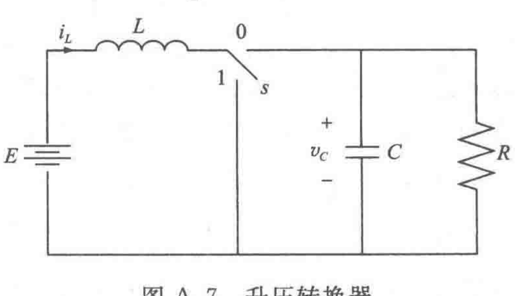


图 A.7 升压转换器

$$L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}=E,\quad C\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t}=-\frac{v_C}{R}$$

当开关在 $s=0$ 位置时，方程为

$$L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}=-v_C+E,\quad C\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t}=i_L-\frac{v_C}{R}$$

其中，i_L是流过电感的电流，v_C是电容两端的电压，E 是电压源提供的恒定电压。上述方程可以合并写成

$$L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}=-(1-s)v_C+E,\quad C\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t}=(1-s)i_L-\frac{v_C}{R} \tag{A.14}$$

其中，s 是一个离散变量，取值为 0 或者 1。当开关变量 $s(t)$是一个周期为 T 的高频方波，且有占空比 $\mu\in(0,1)$，即

$$s(t)=\begin{cases}1, & t_k\leqslant t<t_k+\mu T\\ 0, & t_k+\mu T\leqslant t<t_k+T\end{cases}$$

经平均可以用下列方程来近似式(A.14)，参见文献[11，第 2 章]

337

$$L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}=-(1-\mu)v_C+E,\quad C\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t}=(1-\mu)i_L-\frac{v_C}{R} \tag{A.15}$$

其中，μ 是一个无量纲的连续控制输入，满足 $0<\mu(t)<1$。该控制问题即为在 DC 增益 $k=\dfrac{V_d}{E}>1$ 的条件下，将 v_C调节到期望电压 V_d。该目标可在系统平衡点处实现。系统平衡点为

$$i_L=\bar{i}_L=\frac{V_d^2}{ER},\quad v_C=V_d,\quad \mu=\bar{\mu}=1-\frac{E}{V_d}$$

令 $\alpha=\dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$，做下列变量替换去除量纲

$$x_1=\frac{1}{E}\sqrt{\frac{L}{C}}(i_L-\bar{i}_L),\quad x_2=\frac{v_C-V_d}{E},\quad u=\mu-\bar{\mu},\quad \tau=\frac{t}{\sqrt{LC}}$$

则状态模型可写成如下形式

$$\dot{x}_1=-\frac{1}{k}x_2+(x_2+k)u,\quad \dot{x}_2=\frac{1}{k}x_1-\alpha x_2-(x_1+\alpha k^2)u \tag{A.16}$$

其中$(\dot{\ })$表示对 τ 的导数。

A.6 生化反应器

考虑生化反应器有两个分量——生物量和培养基量，它们的关系是生物细胞消耗培养基[16,57]，图 A.8 是反应器的示意图。假定反应器完全混合并且容量 V 是常值。假定 X 和 S 分别为生物量和培养基的密度(质量/体积)，S_F是原料流密度，F 为流速(体积/时间)。假设原料流中没有所考虑的生物，即生物只靠自身生长。令 $\mu(S)X$ 为生物量的生长速度(质量/体积/时间)，$\dfrac{\mu(S)X}{Y}$为培养基的消耗速度，其中，$\mu(S)$为给定的生长率，Y 为产量。动态模型可通过生物量和培养基量的物料平衡原理得到，即

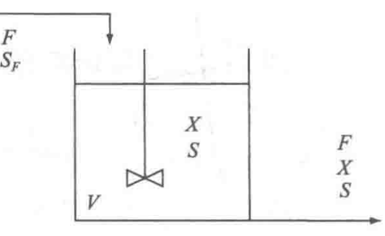


图 A.8 生化反应器

338

生物量的变动速度= 生长 — 流出

培养基量的变动速度= 流入 — 流出 — 消耗

考虑到 V 是常值，上述方程导出如下模型：

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}=\mu(s)X-\frac{XF}{V},\quad \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mu(s)X}{Y}+\frac{(S_F-S)F}{V} \tag{A.17}$$

当 S_F 为常值时，控制量即为稀释率 $\frac{F}{V}$。增长率的典型模型为 $\mu(S)=\frac{\mu_{\max}S}{(k_m+S+k_1S^2)}$，其中 $\mu_{\max}$，k_m 和 k_1 为正常数。当 F 为常数时，方程式(A.17)有一个平凡的平衡点 $X=0$，$S=S_F$。如果 $F\leqslant\max\limits_{S\geqslant 0}\mu(S)$，就会有两个(非平凡)平衡点，它们满足如下稳态条件：

$$X_s=(S_F-S_s)Y,\quad \mu(S_s)=\frac{F_s}{V} \tag{A.18}$$

通过线性化方法可以发现满足 $\mu'(S_s)>0$ 的平衡点是渐近稳定平衡点，而满足 $\mu'(S_s)<0$ 的平衡点是不稳定平衡点。当 $\mu'(S_s)=0$ 时，这两个平衡点重合。我们的目的是要将系统调节到其中一个非平凡的平衡点。

定义无量纲的状态、控制和时间变量如下：

$$x_1=\frac{X}{X_0},\quad x_2=\frac{S}{S_0},\quad u=\frac{F}{F_0},\quad \tau=\frac{tF_0}{V}$$

其中，X_0、S_0 和 F_0 是标称稳态值，对一个标称的成长率 $\mu_0(S)$，标称的稳态值满足方程式(A.18)。归一化的系统状态方程变成

$$\dot{x}_1=x_1[\nu(x_2)-u],\quad \dot{x}_2=-(\alpha-1)x_1\nu(x_2)+(\alpha-x_2)u \tag{A.19}$$

其中，$\alpha=\frac{S_F}{S_0}>1$ 而且 $v(x_2)=\frac{\mu x_2S_0}{\mu_0S_0}$。假设在标称模型中 $\mu_{\max}$，k_m 和 k_1 都已知，这时候 $\nu(x_2)$ 由下式给出

$$\nu(x_2)=\frac{x_2}{\beta+\gamma x_2+(1-\beta-\gamma)x_2^2} \tag{A.20}$$

其中，$\beta=\frac{k_m}{k_m+S_0+k_1S_0^2}$ 和 $\gamma=\frac{S_0}{k_m+S_0+k_1S_0^2}$。

339

A.7 DC 电动机

他励 DC 电动机运动方程如下[84]

$$T_a\frac{\mathrm{d}i_a}{\mathrm{d}t}=-i_a+v_a-\phi\omega \tag{A.21}$$

$$T_f\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}=-f_e(\phi)+v_f \tag{A.22}$$

$$T_m\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=i_a\phi-f_l(\omega)-\delta(t) \tag{A.23}$$

其中，i_a、v_a、ϕ、v_f 和 ω 分别是归一化(无量纲)的电枢电流、电枢电压、磁通、励磁电压和速度。$f_e(\phi)$ 是归一化的反磁场电压。$f_l(\omega)+\delta(t)$ 是归一化后的负载力矩，其中 $f_l(\omega)$ 和速度相关，$\delta(t)$ 是扰动项，T_a、T_f 和 T_m 都是时间常数。

最常见的 DC 电动机控制方式是电枢控制法。该方法中 ϕ 作为常值处理，v_a 是控制变量。此时，模型可简化成方程式(A.21)和式(A.23)。考虑到 T_a 通常比 T_m 小很多，可以进

一步对模型进行简化。通过令 $T_a=0$，忽略电枢电路动态因素，得到 $i_a=v_a-\phi\omega$，并将它代入式(A.23)，得到如下方程

$$T_m\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=-\phi^2\omega+\phi v_a-f_l(\omega)-\delta(t)$$

令 $u=\dfrac{v_a}{\phi}$，$\eta(\omega)=\dfrac{f_l(\omega)}{\phi^2}$，$\theta(t)=\dfrac{\delta(t)}{\phi^2}$，并定义无量纲时间变量 $\tau=\dfrac{t\phi^2}{T_{mo}}$，其中，$T_{mo}$是 T_m的标称值，我们获得如下归一化模型

$$\dot{\omega}=a[-\omega+u-\eta(\omega)-\theta(t)] \tag{A.24}$$

其中，$a=\dfrac{T_{mo}}{T_m}$，$\dot{\omega}=\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\tau}$。

在场控的 DC 电动机中，v_a保持常数，即 $v_a=V_a$，v_f为控制输入。选取 $x_1=i_a$，$x_2=\phi$，$x_3=\omega$ 为状态变量，$u=v_f$为控制输入，$\tau=\dfrac{t}{T_{mo}}$为无量纲时间，系统状态方程给出如下

$$\dot{x}=f(x)+gu+h\delta \tag{A.25}$$

其中，$\dot{x}=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}$，$f=D\alpha$，$g=D\beta$，$h=D\gamma$，且

340

$$D=\begin{bmatrix}\dfrac{T_{mo}}{T_a} & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{T_{mo}}{T_f} & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{T_{mo}}{T_m}\end{bmatrix},\quad \alpha=\begin{bmatrix}-x_1-x_2x_3+V_a\\ -f_e(x_2)\\ x_1x_2-f_l(x_3)\end{bmatrix},\quad \beta=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\quad \gamma=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

A.8 磁悬浮系统

图 A.9 是一个磁悬浮系统的原理图，其中一个球形磁体在电磁场作用下悬浮起来，电磁电流的控制是通过光学测量得到的球体位置做反馈完成的[149,192~200]。这个演示装置包含了构建一个物体悬浮系统的基本成分，磁悬浮系统目前应用在陀螺仪、加速计、及快速列车中。悬浮球体的运动方程如下：

$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=-k\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+mg+F(y,i) \tag{A.26}$$

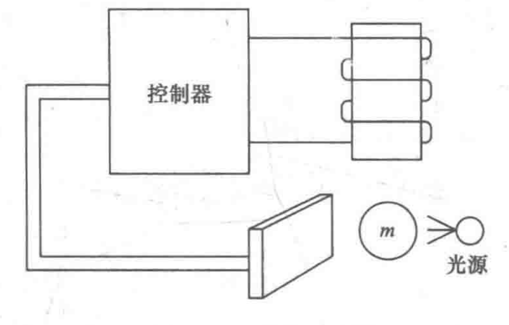


图 A.9 磁悬浮系统

其中，m 是球体的质量，$y\geqslant 0$ 是球体在垂直向下方向上的位置(当球在线圈旁边的时候 $y=0$)，k 是黏性摩擦系数，g 为重力加速度，$F(y,\ i)$为电磁场产生的磁力，i 为电流强度。电磁体感抗和球的位置有关，可用下面的式子来描述：

$$L(y)=L_0\left(\alpha+\frac{1}{1+\dfrac{y}{a}}\right)$$

其中，a、α 和 L_0都是正的常数。该式表明电感在球靠近线圈处取得最大值，在球移向 $y=\infty$的时候衰减到一个常数。用 $E(y,\ i)=\dfrac{1}{2}L(y)i^2$ 表示磁场强度，那么电磁力 $F(y,\ i)$

可写成

$$F(y,i) = \frac{\partial E}{\partial y} = -\frac{L_0 i^2}{2a\left(1+\frac{y}{a}\right)^2} \tag{A.27}$$

从 Kirchoff 电压定律可知，线圈电流为

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = -Ri + v \tag{A.28}$$

其中，$\phi = L(y)i$ 为电磁磁通，v 是加载的电压，R 是电路的串联电阻。 341

下面我们将建立该系统的两个归一化后的模型：其中一个为两维模型，电流 i 是控制输入；另一个为三维模型，电压 v 是控制输入。在电路时间常数远远小于机械运动时间的时候，或者电路中存在高增益的电流反馈环的时候，将电流作为输入量是可行的。在控制电流时，我们把式(A.27)代入式(A.26)，得到的式子是一个关于电流 i 的非线性表达式。所以最好将 F 看成控制输入，然后通过求解式(A.27)来获得电流。

对于这个用电流控制的系统，我们将时间、状态、控制变量做无量纲变换

$$\tau = \lambda t, \quad x_1 = \frac{y}{a}, \quad x_2 = \frac{1}{a\lambda}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \quad u = \frac{F}{m_o g}$$

其中，$\lambda^2 = \frac{g}{a}$，m_o是标称质量。这样，系统模型变为

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad \dot{x}_2 = -bx_2 + 1 + cu \tag{A.29}$$

其中，$\dot{x}_i$ 是 x_i关于 τ 的导数，$b = \frac{k}{\lambda m}$，$c = \frac{m_o}{m}$。根据定义，$x_1 \geqslant 0$，$u \leqslant 0$。有些时候，我们也会考虑约束条件 $|F| \leqslant F_{\max}$，这将导致 u 有一个下界。为了方便，我们认为 $F_{\max} = 2m_o g$，也就是 $-2 \leqslant u \leqslant 0$。

对于电压控制系统，电流 i 是一个状态变量并满足如下方程

$$L(y)\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -Ri + \frac{L_0 i}{\left(a+\frac{y}{a}\right)^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + v$$

上式通过对式(A.28)中的磁通 ϕ 求导而得。使用前面已经定义过的参数 τ、x_1、x_2、b、c，令 $x_3 = \frac{i}{I}$，$u = \frac{v}{V}$，其中基础电流 I 和电压 V 满足 $8am_o g = L_0 I^2$ 和 $V = RI$，相应的状态方程模型如下

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{A.30}$$

$$\dot{x}_2 = -bx_2 + 1 - \frac{4cx_3^2}{(1+x_1)^2} \tag{A.31}$$

$$\dot{x}_3 = \frac{1}{Tx_1}\left[-x_3 + u + \frac{\beta x_2 x_3}{(1+x_2)^2}\right] \tag{A.32}$$

其中，$\beta = \frac{\lambda L_0}{R}$，$T(x_1) = \beta\left[\alpha + \frac{1}{1+x_1}\right]$。

A.9 静电微执行器

图 A.10 是一个并行平板电压源驱动的静电微执行器电路图[120]。上方电极可移动，它的运动方程为

342

$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+k(y-y_0)=F$$

其中，m 是电极质量，b 是阻尼系数，k 是弹性常数，y 是空气间隙，y_0 为零电压空气间隙，F 是静电力。为了防止两个电极接触，在固定电极上有一层绝缘层，厚度为 δy_0，其中 $0<\delta<1$。相应地，y 就限定在$\delta y_0\leqslant y\leqslant y_0$范围内。两块电极间的电容为 $C=\frac{\varepsilon A}{y}$，其中 A 为电极面积，ε 为电容率。存储在电容里的电场能量为 $E=\frac{1}{2}Cv_a{}^2$，其中 v_a 为加载的电压，其与电压源 v_s 的关系为 $v_s=v_a+Ri_s$，i_s 为电流源输出电流，R 是等效电阻。力 F 可用下面的式子描述：

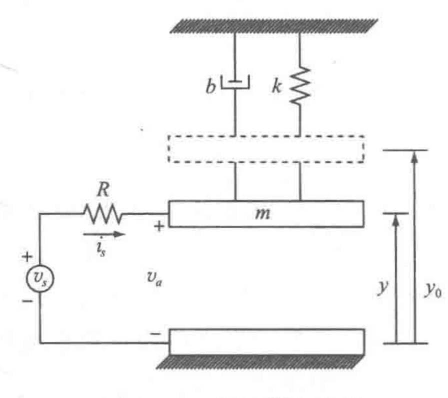


图 A.10 静电微执行器

$$F=\frac{\partial E}{\partial y}=\frac{v_a^2}{2}\frac{\partial C}{\partial y}=-\frac{\varepsilon A v_a^2}{2y^2}$$

令 $q=Cv_a$，为电容电量，它和电流间存在等式 $i_s=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$，因此系统可用如下方程来表示

$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+k(y-y_0)=-\frac{q^2}{2\varepsilon A},\quad R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=v_s-\frac{qy}{\varepsilon A}$$

对于常数输入 $v_s=V_s$，平衡点满足下面的等式

$$V_s=\frac{q}{C_0}-\frac{C_0}{2ky_0^2}\left(\frac{q}{C_0}\right)^3$$

其中，$C_0=\frac{\varepsilon A}{y_0}$为零电压时的电容值。通过对 V_s 求导，可以看出 V_s 先是 q 的单调递增函数，从 0 增大到 $V_p=\sqrt{\frac{8ky_0^2}{27C_0}}$，随后变成 q 的单调递减函数。因此，对于 $V_s<V_p$，存在两个平衡点；当 $V_s=V_p$的时候，两个点变成一个平衡点；而当 $V_s>V_p$的时候，没有平衡点。

343

使用常数电压 V_s的开环控制只能在一定空气间隙范围内使得系统稳定；此外，由于开环控制，系统的暂态响应不能调节。这两个不足均可以通过反馈控制来克服。反馈控制需要用到位置 y 和电量 q，而实际可以测量的值为电压 v_a 和电容 C，然而通过 $y=\frac{\varepsilon A}{C}$ 和$q=Cv_a$，我们可以计算出 y 和 q。

令 $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$，为无阻尼自然振荡频率。经无量纲变换，时间、状态和控制变量为

$$\tau=\omega_0 t,\quad x_1=1-\frac{y}{y_0},\quad x_2=\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}\tau},\quad x_3=\frac{q}{Q_p},\quad u=\frac{v_s}{V_p}$$

其中，$Q_p=\frac{3}{2}C_0V_p$。根据定义，x_1的取值范围为 $0\leqslant x_1\leqslant 1-\delta$。归一化后的状态模型如下：

$$\dot{x}_1=x_2,\quad \dot{x}_2=-x_1-2\zeta x_2+\frac{1}{3}x_3^2,\quad \dot{x}_3=\frac{1}{T}\left[-(1-x_1)x_3+\frac{2}{3}u\right]\qquad (\mathrm{A}.33)$$

其中，$\zeta=\frac{b}{2m\omega_0}$，$T=\omega_0C_0R$，$(\dot{\cdot})$表示对 τ 的导数。

A. 10 机械臂

具有 m 个关节的机械臂非线性动力模型[119,135]如下

$$M(q)\ddot{q}+C(q,\dot{q})\dot{q}+D\dot{q}+g(q)=u \tag{A.34}$$

其中，q 为 m 维向量，代表关节位置的广义坐标。u 是 m 维控制输入向量，$M(q)$是一个对称正定惯量矩阵。$C(q,\dot{q})\dot{q}$、$D\dot{q}$ 和 $g(q)$分别代表离心力、粘性阻尼和重力。对于所有的 $q,\dot{q}\in R^m$，$\dot{M}-2C$ 为斜对称矩阵，其中 $\dot{M}$ 是 $M(q)$对 t 的全导数，D 是半正定对称阵，$g(q)=\left[\dfrac{\partial P(q)}{\partial q}\right]^{\mathrm{T}}$，其中 $P(q)$为由于机械臂重力产生的总的势能。

取 $x=\mathrm{col}(x_1,x_2)$，其中 $x_1=q$，$x_2=\dot{q}$，得到的状态方程如下

$$\dot{x}_1=x_2,\quad \dot{x}_2=M^{-1}(x_1)[u-C(x_1,x_2)x_2-Dx_2-g(x_1)] \tag{A.35}$$

作为一个特例，在忽略阻尼作用下，双关节的机械臂如图 A.11所示，具体可以用以下方程来描述[119]：

$$M=\begin{bmatrix}a_1+4a_4\cos q_2 & a_2+a_4\cos q_2\\ a_2+a_4\cos q_2 & a_3\end{bmatrix},\quad D=0 \tag{A.36}$$

$$C=a_4\sin q_2\begin{bmatrix}-\dot{q}_2 & -(\dot{q}_1+\dot{q}_2)\\ \dot{q}_1 & 0\end{bmatrix},$$

$$g=\begin{bmatrix}b_1\cos q_1+b_2\cos(q_1+q_2)\\ b_2\cos(q_1+q_2)\end{bmatrix} \tag{A.37}$$

图 A.11 两关节机械臂

其中，a_1，…，a_4、b_1和 b_2是标称值，它们都是正数

$$a_1=200.01,\quad a_2=23.5,\quad a_3=122.5,\quad a_4=25$$
$$b_1=784.8,\quad b_2=245.25 \tag{A.38}$$

344

考虑到有未知负载，系统受到干扰，它们的参数变成

$$a_1=259.7,\quad a_2=58.19,\quad a_3=157.19,\quad a_4=56.25$$
$$b_1=1\,030.1,\quad b_2=551.812\,5 \tag{A.39}$$

A. 11 车载倒立摆

考虑图 A.12 所示的车载倒立摆，倒立摆的转枢被固定在一辆可以水平移动的小车上。小车由一个水平力 F 来驱动。该图也绘出了倒立摆的受力分析，包括重心处的重力 mg，在转枢处的一个水平的反作用力 H 和一个垂直反作用力 V。根据 Newton 运动定律，倒立摆重心处的水平和垂直力平衡方程为

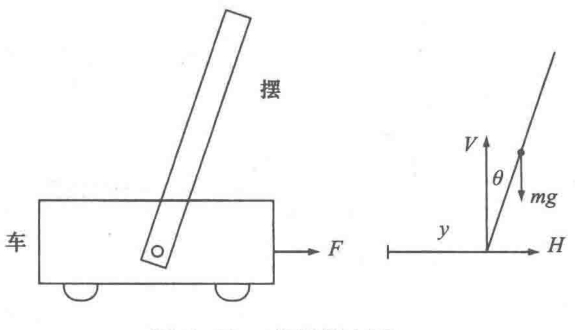


图 A.12 车载倒立摆

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(y+L\sin\theta)=H,\quad m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(L\cos\theta)=V-mg$$

选取重心处为转轴，得到相应的力矩平衡方程

$$J\ddot{\theta}=VL\sin\theta-HL\cos\theta$$

同时根据 Newton 定律，水平方向上小车的运动方程为

$$M\ddot{y} = F - H - k\dot{y}$$

这里 m 是倒立摆的质量，M 为车的质量，L 为从重心到转枢的长度，J 为倒立摆关于重心的转动惯量，k 为摩擦系数，y 为转枢的位移，θ 为倒立摆的角位移(顺时针方向测量)，g 为重力加速度。我们推导该系统的两个模型，一个将 F 看作控制输入，描述倒立摆和小车运动的四阶模型；一个将小车的加速度看成控制输入，描述倒立摆运动的二阶模型。

345

根据给出的 H 和 V 表达式，将求导运算展开，可得

$$H = m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(y + L\sin\theta) = m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{y} + L\dot{\theta}\cos\theta) = m(\ddot{y} + L\ddot{\theta}\cos\theta - L\dot{\theta}^2\sin\theta)$$

$$V = m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(L\cos\theta) + mg = m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-L\dot{\theta}\sin\theta) + mg = -mL\ddot{\theta}\sin\theta - mL\dot{\theta}^2\cos\theta + mg$$

将 H 和 V 代入 $\ddot{\theta}$ 和 $\ddot{y}$ 方程，得到

$$\begin{aligned} J\ddot{\theta} &= -mL^2\ddot{\theta}\,(\sin\theta)^2 - mL^2\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta + mgL\sin\theta - \\ &\quad mL\ddot{y}\cos\theta - mL^2\ddot{\theta}\,(\cos\theta)^2 + mL^2\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta \\ &= -mL^2\ddot{\theta} + mgL\sin\theta - mL\ddot{y}\cos\theta, \\ M\ddot{y} &= F - m(\ddot{y} + L\ddot{\theta}\cos\theta - L\dot{\theta}^2\sin\theta) - k\dot{y} \end{aligned}$$

上面两个方程用矩阵表示，可重新写成下式

$$\begin{bmatrix} J + mL^2 & mL\cos\theta \\ mL\cos\theta & m + M \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} mgL\sin\theta \\ F + mL\dot{\theta}^2\sin\theta - k\dot{y} \end{bmatrix}$$

因此有

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta(\theta)}\begin{bmatrix} m + M & -mL\cos\theta \\ -mL\cos\theta & J + mL^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} mgL\sin\theta \\ F + mL\dot{\theta}^2\sin\theta - k\dot{y} \end{bmatrix} \tag{A.40}$$

其中，

$$\Delta(\theta) = (J + mL^2)(m + M) - m^2L^2\cos^2\theta \geqslant (J + mL^2)M + mJ > 0$$

选取 $x_1 = \theta$，$x_2 = \dot{\theta}$，$x_3 = y$，$x_4 = \dot{y}$ 为状态变量，$u = F$ 为控制输入，状态方程可以写成如下形式

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{A.41}$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{\Delta(x_1)}[(m + M)mgL\sin x_1 - mL\cos x_1(u + mLx_2^2\sin x_1 - kx_4)] \tag{A.42}$$

$$\dot{x}_3 = x_4 \tag{A.43}$$

$$\dot{x}_4 = \frac{1}{\Delta(x_1)}[-m^2L^2g\sin x_1\cos x_1 + (J + mL^2)(u + mLx_2^2\sin x_1 - kx_4)] \tag{A.44}$$

在仿真中，我们可以使用如下的数值：

346

$$m = 0.1,\quad M = 1,\quad k = 0.1,\quad J = 0.008,\quad g = 9.81,\quad L = 0.5 \tag{A.45}$$

如果将小车加速度 $\ddot{y}$ 看作倒立摆的控制输入，我们可以将倒立摆的运动模型用下列二阶方程来描述

$$(J + mL^2)\ddot{\theta} = mgL\sin\theta - mL\ddot{y}\cos\theta$$

当 $\ddot{y}=0$，倒立摆在 $\theta=\pi$ 左右做频率为 ω 的自由振荡，其中振荡频率满足 $\omega^2=\frac{mgL}{(J+mL^2)}$。引入无量纲时间 $\tau=\Omega t$（其中 Ω 是频率 ω 的某个标称值），无量纲输入 $u=-\frac{\ddot{y}}{g}$，得到运动的归一化方程为

$$\ddot{\theta} = a(\sin\theta + u\cos\theta) \tag{A.46}$$

其中，$(\dot{\cdot})$ 表示求导是对 τ 进行的，$a=\left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^2$。将 $x_1=\theta$，$x_2=\dot{\theta}$ 选为状态变量，状态空间模型为

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = a(\sin x_1 + u\cos x_1) \tag{A.47}$$

我们将式(A.40)(或者式(A.41)～(A.44))作为车载倒立摆模型，将式(A.46)(或(A.47))作为倒立摆的模型。

A.12 平动振荡旋转执行器

图 A.13 是平动振荡旋转执行器(TORA)系统的结构示意图[145]，它包含一个质量为 M 的平台，平台通过线性弹簧和参考平面连接，弹簧弹性系数为 k。该平台仅能在水平平面内运动，即方向与弹簧轴平行。在该平台上，有一个直流电动机驱动的旋转检测摆，摆质量为 m，相对重心的转动惯量为 J，其重心和转枢的距离为 L。作用在检测摆上的控制力矩用 u 来表示。转动检测摆产生一个受控作用力来阻尼平台的左右平动。下面来推导系统不考虑摩擦的运动模型。图 A.13 表明检测摆受到力 F_x、F_y 和力矩 u 的作用。应用牛顿定律，以重心处为转轴，可得到如下方程

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x_c + L\sin\theta) = F_x,$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(L\cos\theta) = F_y,$$

$$J\ddot{\theta} = u + F_y L\sin\theta - F_x L\cos\theta$$

图 A.13　平动振荡旋转执行器

其中，θ 是检测摆的角位移(顺时针方向测量)。平台 M 受到作用力 F_x、F_y(方向与加速度方向相反)和弹簧弹力的作用，它的运动方程为

$$m\ddot{x}_c = -F_x - kx_c$$

其中，x_c 是平台 M 的平移位置。

从上面的方程可知，F_x 和 F_y 可由下面的式子给出

$$F_x = m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x_c + L\sin\theta) = m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{x}_c + L\dot{\theta}\cos\theta) = m(\ddot{x}_c + L\ddot{\theta}\cos\theta - L\dot{\theta}^2\sin\theta)$$

347

$$F_y = m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(L\cos\theta) = m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-L\dot{\theta}\sin\theta) = -mL\ddot{\theta}\sin\theta - mL\dot{\theta}^2\cos\theta$$

从 $\ddot{\theta}$ 和 $\ddot{x}_c$ 的方程中消去 F_x 和 F_y，得到下面的方程

$$\begin{bmatrix} J+mL^2 & mL\cos\theta \\ mL\cos\theta & m+M \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{x}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ mL\dot{\theta}^2\sin\theta - kx_c \end{bmatrix}$$

由此可得

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{x}_c \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta(\theta)} \begin{bmatrix} m+M & -mL\cos\theta \\ -mL\cos\theta & J+mL^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ mL\dot{\theta}^2\sin\theta - kx_c \end{bmatrix} \tag{A.48}$$

其中，

$$\Delta(\theta) = (J+mL^2)(m+M) - m^2L^2\cos^2\theta \geqslant (J+mL^2)M + mJ > 0$$

选定 $x_1=\theta$，$x_2=\dot{\theta}$，$x_3=x_c$，$x_4=\dot{x}_c$ 为状态变量，u 为控制输入，状态方程具有如下形式

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{A.49}$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{\Delta(x_1)}[(m+M)u - mL\cos x_1(mLx_2^2\sin x_1 - kx_3)] \tag{A.50}$$

$$\dot{x}_3 = x_4 \tag{A.51}$$

$$\dot{x}_4 = \frac{1}{\Delta(x_1)}[-mLu\cos x_1 + (J+mL^2)(mLx_2^2\sin x_1 - kx_3)] \tag{A.52}$$

在仿真中使用下面的数据

348

$$M = 1.360\,8, \quad m = 0.096, \quad J = 0.000\,217\,5, \quad k = 186.3 \tag{A.53}$$

附录 B
数学知识概述

B.1 Euclid 空间[⊖]

所有 n 维向量 $x=\mathrm{col}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为实数，组成的集合为 n 维 Euclid 空间，用 R^n 表示。一维 Euclid 空间就是所有的实数，用 R 来表示。R^n 空间中的向量可以通过对应分量的相加来进行向量加法运算。它们也可以通过将每个分量乘以一个标量来进行向量的标量乘法运算。向量 x 和 y 的内积定义为 $x^{\mathrm{T}}y=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$。

向量和矩阵范数

向量 x 的范数 $\|x\|$ 是一个具有如下性质的实函数：

- $\|x\|\geqslant 0$，$x\in R^n$，当且仅当 $x=0$，$\|x\|=0$。
- 对于所有的 $x, y\in R^n$，$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$。
- 对于任意的 $\alpha\in R$，$x\in R^n$，$\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$。

上面的第二个性质即为三角不等式。我们所使用的 Euclid(2-)范数的具体定义为

$$\|x\|=(|x_1|^2+\cdots+|x_n|^2)^{\frac{1}{2}}=(x^{\mathrm{T}}x)^{\frac{1}{2}}$$

一个 $m\times n$ 的实数矩阵 A 定义了一个从 Euclid 空间 R^n 到 Euclid 空间 R^m 向量的映射 $y=Ax$。矩阵 A 的诱导 2-范数定义如下：

$$\|A\|=\max_{\|x\|=1}\|Ax\|=\max_{\|x\|\leqslant 1}\|Ax\|=[\lambda_{\max}(A^{\mathrm{T}}A)]^{\frac{1}{2}}$$

其中，$\lambda_{\max}(A^{\mathrm{T}}A)$ 是 $A^{\mathrm{T}}A$ 的最大特征值。对于实数矩阵 A 和 B，其维数分别为 $m\times n$ 和 $n\times l$，则有 $\|AB\|\leqslant\|A\|\,\|B\|$。

二次型

P 是一个实对称的 $n\times n$ 矩阵，P 的二次型定义如下：

$$V(x)=x^{\mathrm{T}}Px=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}p_{ij}x_ix_j$$

如果对所有的 x，$V(x)\geqslant 0$，那么称该二次型是半正定的。如果对于所有的 $x\neq 0$，$V(x)>0$，那么该二次型为正定的。可证明，$V(x)$ 正定(半正定)的充要条件为矩阵 P 的所有特征值为正(非负)，即 P 的所有顺序主子式为正(非负)[⊜]。如果 $V(x)=x^{\mathrm{T}}Px$ 正定(半正定)，则称矩阵 P 正定(半正定)，写成 $P>0$ $(P\geqslant 0)$。本书中用到下列正定矩阵的性质：

$$\lambda_{\min}(P)\,\|x\|^2\leqslant x^{\mathrm{T}}Px\leqslant\lambda_{\max}(P)\,\|x\|^2 \tag{B.1}$$

其中，$\lambda_{\min}(P)$ 和 $\lambda_{\max}(P)$ 分别为 P 的最小特征值和最大特征值。

⊖ 这里的概述和文献[17]和[88]中的类似。读者如想详细阅读相关内容，可参见文献[3]，[112]或者[113]。

⊜ 这是矩阵理论中一个广为人知的结论，其证明可参见文献[15]或者[44]。

$$\min_{\|x\|=r} x^{\mathrm{T}} P x = \lambda_{\min}(P) r^2 \tag{B.2}$$

对于 $b \in R^n$⊖，

$$\min_{|b^{\mathrm{T}} x|=r} x^{\mathrm{T}} P x = \frac{r^2}{b^{\mathrm{T}} P^{-1} b} \tag{B.3}$$

对于对称正定矩阵 P，它的开方根 $P^{\frac{1}{2}}$ 为对称正定矩阵，即满足 $P^{\frac{1}{2}} P^{\frac{1}{2}} = P$，对于 $b \in R^n$，

$$\max_{x^{\mathrm{T}} P x \leqslant c} |b^{\mathrm{T}} x| = \max_{y^{\mathrm{T}} y \leqslant 1} \|\sqrt{c} b^{\mathrm{T}} P^{-\frac{1}{2}} y\| = \sqrt{c} \|b^{\mathrm{T}} P^{-\frac{1}{2}}\| \tag{B.4}$$

其中，$P^{-\frac{1}{2}}$ 为 $P^{\frac{1}{2}}$ 的逆。

B.2 R^n的拓扑

序列收敛性

考虑 n 维 Euclid 空间 R^n，用$\{x_k\}$来表示向量序列 x_0，x_1，…，x_k，…，如果

$$\|x_k - x\| \to 0, \quad 当 \ k \to \infty$$

则称$\{x_k\}$收敛到极限 x。

一个等价的说法是：对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，总存在一个整数 N 使得

350

$$\|x_k - x\| < \varepsilon, \ \forall k \geqslant N$$

其中，符号"$\forall$"读作"对于所有"或"对任意一个"。如果存在$\{x_k\}$的一个子序列收敛到 x，则向量 x 被称为序列$\{x_k\}$的聚点，即存在一个非负整数组成的无限子集 K，使得$\{x_k\}_{k \in K}$收敛到 x。一个 R^n 中的有界序列$\{x_k\}$至少有一个聚点。$\{r_k\}$是一个实数序列，如果 $r_k \leqslant r_{k+1}$，$\forall k$，则称序列$\{r_k\}$是递增的(单调增加或非递减)。如果进一步，$r_k < r_{k+1}$，则称该序列严格递增。类似地，递减(单调递减或非递增)和严格递减序列定义分别为 $r_k \geqslant r_{k+1}$ 和 $r_k > r_{k+1}$。一个递增有上界的实数序列必收敛于某个实数。类似地，一个有下界的递减实数序列必收敛于某个实数。

集合

如果对 S 中的每个向量 x，均能找到 x 的一个 ε 邻域

$$N(x, \varepsilon) = \{z \in R^n \mid \ \|z - x\| < \varepsilon\}$$

使得 $N(x, \varepsilon) \subset S$，则这个 R^n 中的子集 S 称为开集。一个集合 S 称为闭集当且仅当它在 R^n 中的补集为开集时，等价地，S 为闭集当且仅当任意 S 中元素组成的收敛序列$\{x_n\}$收敛到 S 中的某个点。如果有一个 $r > 0$ 使得对于集合 S 中的所有点 x 来说，$\|x\| \leqslant r$，那么称集合 S 有界。如果集合 S 为有界闭集，那么称 S 为紧集。如果 p 点的任意邻域均包含至少一个属于集合 S 的点和一个不属于集合 S 的点，那么 p 点为集合 S 的边界点。S 的所有边界点组成的集合称为 S 的边界，用 ∂S 表示。一个闭集包含所有它的边界点。一个开集不包含它的任意边界点。一个集合 S 的内部为 $S - \partial S$。任何开集等于它的内部。集合 S 的闭包用 $\overline{S}$ 表示，它为 S 和它的边界的并集。闭集总等于它的闭包。如果开集 S 中的任意两点可以用 S 内的弧线连接，那么该开集为连通开集。如果一个集合 S 的内部是连通的，则称其

⊖ 根据文献[89，10.3 节]，考虑有约束优化问题的 Lagrange 乘子法$\mathcal{L}(x, \lambda) = x^{\mathrm{T}} P x + \lambda[(b^{\mathrm{T}} x)^2 - r^2]$。其一阶必要条件为 $2Px + 2\lambda(b^{\mathrm{T}} x) b = 0$，$(b^{\mathrm{T}} x)^2 - r^2 = 0$。可证明当 $\lambda = -\frac{1}{(b^{\mathrm{T}} P^{-1} b)}$，$x = \pm \frac{r P^{-1} b}{(b^{\mathrm{T}} P^{-1} b)}$时，能得到最小值$\frac{r^2}{(b^{\mathrm{T}} P^{-1} b)}$。

为区域，注意区域是仅对内部而言的，与 S 是与 ∂S 相交无关。如果一个区域不包含任意边界点，那么称该区域为开区域。如果对于任意 x，$y\in S$和任意实数θ，$0<\theta<1$，点 $\theta x+(1-\theta)y\in S$，那么称集合 S 为凸集。如果 $x\in X\subset R^n$，$y\in Y\subset R^m$，则认为(x,y)属于集合 $X\times Y\subset R^n\times R^m$。

连续函数

一个将集合 S_1映射到集合 S_2的函数 f 可表示为f：$S_1\to S_2$。如果当 $x_k\to x$ 的时候，总有 $f(x_k)\to f(x)$，则称函数 f：$R^n\to R^m$在点 x 处连续。与极限描述一样，可以定义成对任意给定 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，使得

$$\|x-y\|<\delta\Rightarrow\|f(x)-f(y)\|<\varepsilon$$

符号"⇒"读作"蕴涵"。称函数 f 在集合 S 上连续是指它在 S 中的任意一点上都连续。如果对任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$(可能和 ε 相关)，使得上面的不等式对于任意 x，$y\in S$ 成立，那么称函数 f 在 S 上一致连续。注意：一致连续是对一个集合而言的，而连续是对点而言的。所谓一致连续性，是指同一个常数 δ 对集合内的所有点都成立上述不等式。显然，如果 f 在 S 上一致连续，那它在 S 上连续。反过来的结论一般不正确。然而，如果 S 是一个紧集，那么其上的连续性和一致连续性是等价的。对于任意两个标量 a_1 和 a_2 和任意两个连续函数 f_1 和 f_2，下列函数

351

$$(a_1f_1+a_2f_2)(\cdot)=a_1f_1(\cdot)+a_2f_2(\cdot)$$

是连续的。

如果 S_1、S_2、S_3为任意集合，有 f_1：$S_1\to S_2$和 f_2：$S_2\to S_3$，那么函数 $f_2\circ f_1$：$S_1\to S_3$ 的定义如下：

$$(f_2\circ f_1)(\cdot)=f_2(f_1(\cdot))$$

并称为 f_1和 f_2的复合。两个连续函数的复合仍然是连续函数。如果 $S\subset R^n$，f：$S\to R^m$，那么集合$\{f(x);\ x\in S\}$称为 S 的像，用 $f(S)$表示。如果 f 是定义在某个紧集 S 上的连续函数，那么 $f(S)$也是紧集。因此，在紧集上的连续函数是有界的。进一步，如果 f 是实函数，也就是说，f：$S\to R$，那么对任意 $x\in S$，在紧集 S 内有点 p 和 q 使得 $f(x)\leqslant f(p)$和 $f(x)\geqslant f(q)$。如果 f 是定义在连通集合 S 上的连续函数，那么 $f(S)$是连通的。如果对于任意的 x，$y\in S$，且 $x\neq y$，$f(x)\neq f(y)$成立，那么称 f 是集合 S 上的一对一函数。如果 f：$S\to R^m$ 是连续的一对一的函数，且 S 是R^n空间内的紧子集，那么 f 在$f(S)$上有连续的逆 f^{-1}。f 和 f^{-1}的复合是恒等映射，也就是说 $f^{-1}(f(x))=x$。如果在 J 的任意有界子区间 $J_0\subset J$ 上，f 最多只在有限个点上不连续，则称函数 f：$R\to R^n$在区间$J\subset R$上是分段连续的。此外，在任一个非连续点 x_0上，左极限$\lim_{h\to 0}f(x_0-h)$和右极限$\lim_{h\to 0}f(x_0+h)$都存在，就称函数在 x_0处有一个有限的跳跃。

可导函数

如果下列极限存在，则称函数 f 在 x 处可导

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

极限 $f'(x)$称为 f 在 x 处的导数。如果对任意的 $1\leqslant i\leqslant m$，$1\leqslant j\leqslant n$，偏导数$\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$存在并在 x_0处连续，则函数 f：$R^n\to R^m$ 称为在 x_0处连续可导。如果函数在集合 S 内的任一点均连续可导，那么称它在集合 S 上连续可导。如果 f_i在集合 S 上有 l 阶连续可导的函数，其中 $l\geqslant 1$，那么称函数 f 为$\mathcal{C}^l$类函数。如果 f 是$\mathcal{C}^\infty$类的，则称它为光滑的。对于一个连续可导

函数 $f: R^n \to R$，$\frac{\partial f}{\partial x}$可定义为下列的行向量

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \cdots \quad, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}\right]$$

f 的梯度用$\nabla f(x)$表示，具体定义如下

352

$$\nabla f(x) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]^{\mathrm{T}}$$

对于一个连续可导函数 $f: R^n \to R^m$，Jacobi 矩阵$\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]$是 $m \times n$ 的，它的第 i 行第 j 列元素为$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$。假定集合 $S \subset R^n$ 为开集，函数 f 将 S 映射到 R^m，f 在点 $x_0 \in S$ 上连续可导，g 将包含 $f(S)$的开集映射到 R^k 上，且 g 在 $f(x_0)$处连续可导。那么，可以定义 S 到 R^k 上的函数 h，为 $h(x)=g(f(x))$，且 $h(x)$在 x_0处连续可导，它的 Jacobi 矩阵可根据链式法则算出，即

$$\left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{\partial g}{\partial f}\right|_{f=f(x_0)} \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_0}$$

中值定理和隐函数定理

如果 x 和 y 是 R^n 中两个不同的点，那么连接 x 和 y 的线段 $L(x, y)$为

$$L(x,y) = \{z \mid z = \theta x + (1-\theta)y, 0 < \theta < 1\}$$

中值定理

假定函数 $f: R^n \to R$ 在开集 $S \subset R^n$ 上的每一点都连续可导，x、y 是 S 上的两点且连接 x 和 y 的线段 $L(x, y) \subset S$，那么，在 $L(x, y)$上有一点 z，使得

$$f(y) - f(x) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=z}(y-x) \tag{B.5}$$

如果 $f: R^n \to R^n$，那么高维形式的中值定理如下

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x+\sigma(y-x))\mathrm{d}\sigma \ (y-x) \tag{B.6}$$

证明：令 $J(x)=\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right](x)$，$h(\sigma)=f(x+\sigma(y-x))$，其中 $0<\sigma<1$，通过链式法则得到 $h'(\sigma)=J(x+\sigma(y-x))(y-x)$，再由于

$$f(y) - f(x) = h(1) - h(0) = \int_0^1 h'(\sigma)\mathrm{d}\sigma$$

即可得到式(B.6)。

隐函数定理

设函数 $f: R^n \times R^m \to R^n$ 在开集 $S \subset R^n \times R^m$ 的任一点(x, y)连续可导。令(x_0, y_0)为 S 上的一点，满足 $f(x_0, y_0)=0$，且其 Jacobi 矩阵$\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right](x_0, y_0)$是非奇异的，那么存在 x_0的邻域 $U \subset R^n$ 和 y_0的邻域 $V \subset R^m$，使得对于任意 $y \in V$，方程 $f(x, y)=0$ 有唯一解 $x \in U$。因此该解可写成函数 $x=g(y)$，并且函数 g 在 $y=y_0$处连续可导。

中值定理和隐函数定理的证明，以及本附录前述内容可以在现代微积分或者数学分析教科书中找到[1]。

353

引理 B.1(Gronwall-Bellman 不等式)[2]　设 $\lambda: [a, b] \to R$ 为连续函数，$\mu: [a, b] \to R$

[1] 例如可参阅文献[3]。

[2] 证明过程可参见文献[74，引理 A.1]

为非负连续函数。对于每个 $t\in[a, b]$，如果连续函数 y：$[a, b]\to R$ 满足

$$y(t)\leqslant\lambda(t)+\int_a^t\mu(s)y(s)\mathrm{d}s$$

那么在区间$[a, b]$上，下式成立：

$$y(t)\leqslant\lambda(t)+\int_a^t\lambda(s)\mu(s)\exp\left[\int_s^t\mu(\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}s$$

特别地，如果 $\lambda(t)\equiv\lambda$ 为常数，那么

$$y(t)\leqslant\lambda\exp\left[\int_a^t\mu(\tau)\mathrm{d}\tau\right]$$

进一步，如果 $\mu(t)\equiv\mu\geqslant 0$ 为常数，那么

$$y(t)\leqslant\lambda\exp[\mu(t-a)]$$

引理 B.2（比较引理）[㊀] 考虑标量微分方程

$$\dot{u}=f(t,u),\quad u(t_0)=u_0$$

其中，对于 $t\geqslant 0$ 和任意的 $u\in J\subset R$，$f(t, u)$关于 t 连续，而且关于 u 是局部的 Lipschitz 函数。令$[t_0, T)$（T 可为无穷大）为解 $u(t)$存在的最大区间，且假定对于所有的 $t\in[t_0, T)$，均有 $u(t)\in J$。令 $v(t)$为连续函数，且其右导数 $D^+v(t)$满足微分不等式

$$D^+v(t)\leqslant f(t,v(t)),\quad v(t_0)\leqslant u_0$$

且对于所有的 $t\in[t_0, T)$均有 $v(t)\in J$，那么，$v(t)\leqslant u(t)$，$t\in[t_0, T)$。

354

㊀ 证明参见文献[74，引理 3.4]。如果 $v(t)$在 t 处可导，那么 $D^+v(t)=\dot{v}(t)$。如果 $\frac{|v(t+h)-v(t)|}{h}\leqslant g(t, h)$，$\forall h\in(0, b]$，且 $\lim\limits_{h\to 0^+}g(t, h)=g_0(t)$，那么 $D^+v(t)\leqslant g_0(t)$。

附录 C

组合 Lyapunov 函数

Lyapunov 理论中最困难的在于构造 Lyapunov 函数。构造 Lyapunov 函数的一个有效手段就是将系统表达成多个相互关联的低阶子系统，对每个子系统构造一个 Lyapunov 函数，然后将它们组合起来成为整个系统的 Lyapunov 函数。我们将以串联系统、有限个子系统组成的互联系统[4,93,126]和奇异摄动系统为例[76]，来介绍这种构造方法。为方便起见，我们仅讨论时不变系统和 4.2 节引进的二次型 Lyapunov 函数。

C.1 串联系统

考虑如下的串联系统

$$\dot{\eta} = f_1(\eta,\xi), \quad \dot{\xi} = f_2(\xi) \tag{C.1}$$

其中，f_1和 f_2是局部 Lipschitz 函数，且 $f_1(0,0)=0$，$f_2(0)=0$。在引理 4.6 中已证明：如果 $\dot{\eta}=f_1(\eta,\xi)$是输入-状态稳定的，且 $\dot{\xi}=f(\xi)$的原点是全局渐近稳定的，那么系统式(C.1)的原点就是全局渐近稳定的。这里来说明如何为这个串联系统构造一个 Lyapunov 函数。简便起见，我们假定 $\dot{\xi}=f(\xi)$ 的原点是指数稳定的，且已知一个连续可导的 Lyapunov函数 $V_2(\xi)$，$V_2(\xi)$在 $\xi=0$ 的某个邻域内满足下列不等式

$$c_1\|\xi\|^2 \leqslant V_2(\xi) \leqslant c_2\|\xi\|^2, \quad \frac{\partial V_2}{\partial \xi}f_2(\xi) \leqslant -c_3\|\xi\|^2, \quad \left\|\frac{\partial V_2}{\partial \xi}\right\| \leqslant c_4\|\xi\| \tag{C.2}$$

355

其中，c_1，…，c_4均为正常数。假定 $\dot{\eta}=f_1(\eta,0)$的原点是渐近稳定的且有一个连续可导的 Lyapunov 函数 $V_1(\eta)$，它在 $\eta=0$ 的某个邻域内满足下列不等式：

$$\frac{\partial V_1}{\partial \eta}f_1(\eta,0) \leqslant -W_1(\eta)$$

其中，$W_1(\eta)$正定并连续。式(C.1)系统可以构造成如下的复合 Lyapunov 函数：

$$V(\eta,\xi) = bV_1(\eta) + \sqrt{V_2(\xi)}$$

其中，b 为待定正常数，则 V 的导数 $\dot{V}$ 可表示成

$$\begin{aligned}\dot{V}(\eta,\xi) &= b\frac{\partial V_1}{\partial \eta}f_1(\eta,\xi) + \frac{1}{2\sqrt{V_2(\xi)}}\frac{\partial V_2}{\partial \xi}f_2(\xi)\\ &= b\frac{\partial V_1}{\partial \eta}f_1(\eta,0) + b\frac{\partial V_1}{\partial \eta}[f_1(\eta,\xi) - f_1(\eta,0)] + \frac{1}{2\sqrt{V_2(\xi)}}\frac{\partial V_2}{\partial \xi}f_2(\xi)\end{aligned}$$

在原点的任意有界邻域中，我们应用 V_1的连续可导性和 f_1的 Lipschitz 性质可得

$$\left\|\frac{\partial V_1}{\partial \eta}[f_1(\eta,\xi) - f_1(\eta,0)]\right\| \leqslant k\|\xi\|$$

其中，k 为正常数。因此

$$\dot{V}(\eta,\xi) \leqslant -bW_1(\eta) + bk\|\xi\| - \frac{c_3}{2\sqrt{c_2}}\|\xi\|$$

选择 $b<\frac{c_3}{2k\sqrt{c_2}}$ 即可保证 $\dot{V}$ 是负定的。函数 $V(\eta, \xi)$ 在原点附近除了 $\eta=0$ 外都是连续可导的。$\dot{V}(\eta, \xi)$ 和 $V(\eta, \xi)$ 在原点周围均有定义且为连续的。可见定理 3.3 的论述依然成立，系统(式(C.1))的原点为渐近稳定的。

前面的分析是限制在原点附近的有界邻域内。如果 $V_1(\eta)$ 为二次型的 Lyapunov 函数，则可以去掉这个限制，并得到一个连续可微的复合 Lyapunov 函数。特别地，假定 $V_1(\eta)$ 在 $\eta=0$ 的邻域内满足如下不等式：

$$\frac{\partial V_1}{\partial \eta}f_1(\eta,0) \leqslant -c\phi^2(\eta), \quad \left\|\frac{\partial V_1}{\partial \eta}\right\| \leqslant k\phi(\eta) \tag{C.3}$$

其中，c、k 为正常数，ϕ 为正定连续函数，构造复合 Lyapunov 函数为

356

$$V(\eta,\xi) = bV_1(\eta) + V_2(\xi)$$

其中，b 是待定的正常数。导数 $\dot{V}$ 满足

$$\begin{aligned}\dot{V}(\eta,\xi) &= b\frac{\partial V_1}{\partial \eta}f_1(\eta,0) + b\frac{\partial V_1}{\partial \eta}[f_1(\eta,\xi) - f_1(\eta,0)] + \frac{\partial V_2}{\partial \xi}f_2(\xi)\\ &\leqslant -bc\phi^2(\eta) + bkL\phi(\eta)\|\xi\| - c_3\|\xi\|^2。\end{aligned}$$

其中，L 是 f_1 对 ξ 的 Lipschitz 常数。上述不等式的右边可写成(ϕ，$\|\xi\|$)的二次型形式，则有

$$\dot{V} \leqslant -\begin{bmatrix}\phi(\eta)\\ \|\xi\|\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} bc & -\frac{bkL}{2}\\ -\frac{bkL}{2} & c_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi(\eta)\\ \|\xi\|\end{bmatrix} \overset{\text{def}}{=} -\begin{bmatrix}\phi(\eta)\\ \|\xi\|\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} Q\begin{bmatrix}\phi(\eta)\\ \|\xi\|\end{bmatrix}$$

选择 $b<\frac{4cc_3}{(kL)^2}$，则可保证 Q 正定，即 $\dot{V}$ 负定。因此，系统式(C.1)的原点渐近稳定。如果上述假定全局成立，且 $V_1(\eta)$ 径向无界，那么原点为全局渐近稳定。如果 $\dot{\eta}=f_1(\eta, 0)$ 的原点是指数稳定且 $V_1(\eta)$ 满足类似式(C.2)的不等式，那么当 $\phi(\eta)=\|\eta\|$ 时式(C.3)成立。在这种情况下，用前面的证明即可得出式(C.1)原点是指数稳定的结论。

考虑下列组合系统

$$\dot{\eta} = f_1(\eta,\xi), \quad \dot{\xi} = f_2(\eta,\xi)$$

如果对所有的 η，$f_2(\eta, 0)=0$，且可找到一个 Lyapunov 函数 $V_2(\xi)$ 满足

$$c_1\|\xi\|^2 \leqslant V_2(\xi) \leqslant c_2\|\xi\|^2, \quad \frac{\partial V_2}{\partial \xi}f_2(\eta,\xi) \leqslant -c_3\|\xi\|^2, \quad \left\|\frac{\partial V_2}{\partial \xi}\right\| \leqslant c_4\|\xi\|$$

那么上面给出的方法同样可以用来构造这类组合系统的复合 Lyapunov 函数。注意：上面的三个不等式蕴含着 $\xi=0$ 是系统 $\dot{\xi}=f_2(\eta, \xi)$ 对 η 的一致指数稳定平衡点。

C.2 互联系统

考虑互联系统

$$\dot{x}_i = f_i(x_i) + g_i(x), \quad i = 1,2,\cdots,m \tag{C.4}$$

其中，$x_i\in R^{n_i}$，$n_1+\cdots+n_m=n$，$x=\mathrm{col}(x_1, \cdots, x_m)$，$f_i$ 和 g_i 都是局部 Lipschitz 函数。假定对于所有 i，$f_i(0)=0$ 和 $g_i(0)=0$，那么原点 $x=0$ 即为系统(式(C.4))的一个平衡点。忽略内联项 g_i，该系统就是 m 个独立子系统：

357

$$\dot{x}_i = f_i(x_i) \tag{C.5}$$

每个子系统在 $x_i=0$ 处有一个平衡点。我们从各个独立子系统的 Lyapunov 函数开始，那些 Lyapunov 函数给出了各自原点的渐近稳定性。假定已知每个子系统有连续可导的 Lyapunov 函数 $V_i(x_i)$，它们沿着独立子系统(式(C.5))的轨线的导数都是负定的。构造函数

$$V(x) = \sum_{i=1}^{m} b_i V_i(x_i), \quad b_i > 0$$

为这个 m 个独立子系统连接后的备选的 Lyapunov 函数，其中 b_i 是待定正常数。如果将互联系统(式(C.4))看成是独立子系统(式(C.5))受到扰动的结果，那么有理由将$V(x)$作为式(C.4)的备选 Lyapunov 函数。$V(x)$沿着式(C.4)的轨线的导数为

$$\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^{m} b_i \frac{\partial V_i}{\partial x_i} f_i(x_i) + \sum_{i=1}^{m} b_i \frac{\partial V_i}{\partial x_i} g_i(x)$$

由于V_i是第 i 个独立子系统的 Lyapunov 函数，右边第一项是负定的，但在一般情况下第二项的符号难以断定。这和我们在 4.2 节对扰动系统的研究很相似，因此可以通过分析最坏的情况来解决，即假定每一项$\left[\frac{\partial V_i}{\partial x_i}\right] g_i$ 有一个非负上界。下面借助于二次型 Lyapunov 函数来阐述这种想法。假定对于 $i=1, 2, \cdots, m$，$V_i(x_i)$在 $x_i=0$ 的某个邻域内满足

$$\frac{\partial V_1}{\partial x_i} f_i(x_i) \leqslant -c_i \phi_i^2(x_i), \quad \left\| \frac{\partial V_i}{\partial x_i} \right\| \leqslant k_i \phi_i(x_i)$$

其中，c_i、k_i都为正常数，ϕ_i 为正定连续函数。进一步，假定在 $x=0$ 的同一个邻域内，内联项 $g_i(x)$有上界

$$\|g_i(x)\| \leqslant \sum_{j=1}^{m} \gamma_{ij} \phi_j(x_j)$$

其中，γ_{ij} 为非负常数。那么 $V(x) = \sum_{i=1}^{m} b_i V_i(x_i)$ 沿着互联系统式(C.4)的轨线上的导数满足如下不等式

$$\dot{V}(x) \leqslant \sum_{i=1}^{m} b_i \left[-c_i \phi_i^2(x_i) + \sum_{j=1}^{m} k_i \lambda_{ij} \phi_i(x_i) \phi_j(x_j) \right]$$

注意，右面是 ϕ_1，ϕ_2，$\cdots$，ϕ_m 的一个二次型，因此可以将其重新写成

358

$$\dot{V}(x) \leqslant -\frac{1}{2} \phi^{\mathrm{T}} (DS + S^{\mathrm{T}} D) \phi$$

其中，$\phi=\mathrm{col}(\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_m)$，$D=\mathrm{diag}(b_1, \cdots, b_{\mathrm{m}})$，$S$ 为 $m \times n$ 矩阵，其元素为

$$s_{ij} = \begin{cases} c_i - k_i \gamma_{ii}, & i = j, \\ -k_i \gamma_{ij}, & i \neq j。\end{cases}$$

如果有一个正对角矩阵 D 使得 $DS+S^{\mathrm{T}}D>0$，那么，因为当且仅当 $x=0$，$\phi(x)=0$，所以 $\dot{V}(x)$是负定的。因此，原点作为该互联系统的平衡点，它是渐近稳定的充分条件为存在一个正对角矩阵 D 使得 $DS+S^{\mathrm{T}}D$ 正定。存在 D 的充分必要条件是 S 是一个 M 矩阵[⊖]，也就是说，S 的顺序主子式都是正数。根据 M 矩阵的这个充分必要条件，可以认为 S 的对角元素具有“整体独大”的性质，作为 M 矩阵，S 的对角元素必须是正的，而非对角元素都是非负的，所谓“整体独大”是一行或一列之和还是正的。可以认为常数 c_i给出了 Lyapunov

---

⊖ 证明参见文献[93]。

函数 V_i 对 $\phi_i^2(x_i)$ 的衰减率的一个下界，因而 S 的对角元素给出了独立子系统稳定度的一种度量。而 S 的非对角元素描述了 $g_i(x)$ 关于 $\phi_j(x_j)$，$j=1$，…，m 的一个上界，它们表征了各独立子系统之间互联的强度。在这个意义上，M 矩阵条件说明：如果独立子系统的稳定度整体上大于内联的强度，那么互联系统的原点依然是渐近稳定的。

C.3 奇异扰动系统

考虑奇异扰动系统

$$\dot{x} = f(x,z), \quad \varepsilon\dot{z} = g(x,z) \tag{C.6}$$

其中，f、g 为在原点某邻域上的局部 Lipschitz 函数，ε 为一个较小的正常数，$f(0, 0)=0$ 和 $g(0, 0)=0$。这类系统有双时间量度结构，因为每当 $|g_i|\geqslant k>0$，在同样时间量度上 $z_i(t)$ 比 $x(t)$ 移动得快。在 $\dot{z}$ 的方程中，令 $\varepsilon=0$，解出 z，它为 x 的函数并代入第一个方程，可以得到描述慢速运动 x 的诱导模型。假定在我们研究的 x 范围内，$z=h(x)$ 是下式的唯一解

$$0 = g(x,z)$$

且 $h(x)$ 连续可导，其偏导数是局部 Lipschitz 的，且 $h(0)=0$。将 $z=h(x)$ 代入 $\dot{x}$ 方程获得如下慢变模型

$$\dot{x} = f(x,h(x)) \tag{C.7}$$

359

将 $\dot{z}$ 方程中的 x 作为常参数处理，便可用 $\dot{z}$ 的方程来描述快变模型。将时间变量从 t 变成 $\tau=\dfrac{(t-t_0)}{\varepsilon}$，并在 $x(t_0+\varepsilon\tau)$ 中令 $\varepsilon=0$，即将 $x(t_0+\varepsilon\tau)$ 锁定于 $x(t_0)$，可得快变模型

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau} = g(x,z) \tag{C.8}$$

我们的目标是用慢变模型和快变模型的 Lyapunov 函数通过加权和来构造奇异扰动系统(式(C.6))的组合 Lyapunov 函数。快变模型在 $z=h(x)$ 处有一个平衡点，为使讨论更为便捷，一般将它转换到 (x, y) 坐标系中研究，设

$$y = z - h(x)$$

此变换将快变模型的平衡点移到了原点。在新的坐标系中，奇异扰动系统可写成

$$\dot{x} = f(x,y+h(x)), \quad \varepsilon\dot{y} = g(x,y+h(x)) - \varepsilon\frac{\partial h}{\partial x}f(x,y+h(x)) \tag{C.9}$$

在 $\dot{y}$ 方程中令 $\varepsilon=0$，得到

$$0 = g(x,y+h(x))$$

上式的唯一解为 $y=0$。将 $y=0$ 代入 $\dot{x}$ -方程即得到慢变模型，见式(C.7)。将 $\dot{y}$ 方程中的时间变量从 t 变成 $\tau=\dfrac{(t-t_0)}{\varepsilon}$，并令右边的 $\varepsilon=0$，得到快变模型

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} = g(x,y+h(x)) \tag{C.10}$$

其中，x 被当做常值参数。慢变模型(式(C.7))在 $x=0$ 处有唯一的平衡点。假定该平衡点是渐近稳定的，且有一个连续可导的 Lyapunov 函数 $V_1(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域满足不等式

$$\frac{\partial V_1}{\partial x}f(x,h(x)) \leqslant -a_1\phi_1^2(x) \tag{C.11}$$

其中，a_1 为正常数，ϕ_1 为连续正定函数。快变模型在 $y=0$ 有一个平衡点。假定该平衡点

是渐近稳定的且有一个连续可导的 Lyapunov 函数 $V_2(x,y)$ 在 $x=0$，$y=0$ 的某个邻域满足不等式

$$\frac{\partial V_2}{\partial y} g(x,y+h(x)) \leqslant -a_2 \phi_2^2(y) \tag{C.12}$$

其中，a_2 为正常数，ϕ_2 为连续正定函数。因为 x 可看成是快变模型的一个参数，所以可认

360

为 V_2 也是 x 的函数，而 Lyapunov 函数一般也和系统参数有关，但我们要求 V_2 满足不等式

$$W_1(y) \leqslant V_2(x,y) \leqslant W_2(y)$$

其中，W_1 和 W_2 是两个正定连续函数。现在考虑备选的复合 Lyapunov 函数

$$V(x,y) = bV_1(x) + V_2(x,y)$$

其中，b 为待选正常数。计算 V 沿着式(C.9)轨线的导数，得到

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x,y) &= b\frac{\partial V_1}{\partial x} f(x,y+h(x)) + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial V_2}{\partial y} g(x,y+h(x)) \\
&\quad - \frac{\partial V_2}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial x} f(x,y+h(x)) + \frac{\partial V_2}{\partial x} f(x,y+h(x)) \\
&= b\frac{\partial V_1}{\partial x} f(x,h(x)) + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial V_2}{\partial y} g(x,y+h(x)) \\
&\quad + b\frac{\partial V_1}{\partial x}[f(x,y+h(x)) - f(x,h(x))] + \left[\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_2}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial x}\right] f(x,y+h(x))
\end{aligned}$$

这里将导数 $\dot{V}$ 表示成四项之和的形式。前面两项分别是 V_1 和 V_2 沿着慢变和快变模型轨线的导数，由不等式(C.11)和(C.12)可知，这两项是 x 和 y 的负定函数。另外两项代表了快变动态和慢变动态之间的内联效应，这两项在 $\varepsilon=0$ 时被忽略掉了。假定这两项满足不等式

$$\frac{\partial V_1}{\partial x}[f(x,y+h(x)) - f(x,h(x))] \leqslant k_1\phi_1(x)\phi_2(y) \tag{C.13}$$

$$\left[\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_2}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial x}\right] f(x,y+h(x)) \leqslant k_2\phi_1(x)\phi_2(y) + \gamma\phi_2^2(y) \tag{C.14}$$

其中，k_1、k_2 和 γ 都是非负常数。由不等式(C.11)到式(C.14)，我们得到

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x,y) &\leqslant -ba_1\phi_1^2(x) - \frac{1}{\varepsilon}a_2\phi_2^2(y) + bk_1\phi_1(x)\phi_2(y) + k_2\phi_1(x)\phi_2(y) + \gamma\phi_2^2(y) \\
&= -\phi^{\mathrm{T}}(x,y)Q\phi(x,y)
\end{aligned}$$

其中，$\phi=\mathrm{col}(\phi_1,\ \phi_2)$，且

361

$$Q = \begin{bmatrix} ba_1 & -\frac{1}{2}bk_1 - \frac{1}{2}k_2 \\ -\frac{1}{2}bk_1 - \frac{1}{2}k_2 & \frac{a_2}{\varepsilon - \gamma} \end{bmatrix}$$

当不等式

$$ba_1\left(\frac{a_2}{\varepsilon} - \gamma\right) > \frac{1}{4}(bk_1 + k_2)^2$$

成立时，$\dot{V}$ 不等式的右边是负定的。因此，对于所有的

$$\varepsilon < \frac{4a_1a_2b}{4a_1b\gamma + (bk_1 + k_2)^2}$$

362

系统式(C.6)的原点是渐近稳定的。

附录 D 证 明

D.1 引理 9.5 的证明

令 $V_1(\eta)$ 是 $\dot{\eta}=f_0(\eta,0)$ 的 Lyapunov 函数，在包含原点的区域 $D_\eta\subset R^{n-\rho}$ 上满足

$$c_1\|\eta\|^2\leqslant V_1(\eta)\leqslant c_2\|\eta\|^2,\quad \frac{\partial V_1}{\partial\eta}f_0(\eta,0)\leqslant -c_3\|\eta\|^2,\quad \left\|\frac{\partial V_1}{\partial\eta}\right\|\leqslant c_4\|\eta\|$$

$V_1(\eta)$ 的存在性由定理 3.8(Lyapunov 逆定理)保证。令 $P=P^{\mathrm{T}}>0$ 为 Lyapunov 方程 $P(A-BK)+(A-BK)^{\mathrm{T}}P=-I$ 的解，令 $D_\xi\subset R^\rho$ 为一个包含原点的区域，且 $D_\eta\times D_\xi\subset D_z$。如 C.1 节所述，标称系统(式(9.9))的 Lyapunov 函数可以取成 $V(z)=bV_1(\eta)+\xi^{\mathrm{T}}P\xi$，其中 b 为足够小的正数。V 沿着扰动系统(式(9.11))的轨线的导数为

$$\begin{aligned}\dot{V}&=b\frac{\partial V_1}{\partial\eta}f_0(\eta,0)+b\frac{\partial V_1}{\partial\eta}[f_0(\eta,\xi)-f_0(\eta,0)]\\&\quad+\xi^{\mathrm{T}}[P(A-BK)+(A-BK)^{\mathrm{T}}P]\xi+2\xi^{\mathrm{T}}PB\Delta(z)\\&\leqslant -bc_3\|\eta\|^2+bc_4L\|\eta\|\|\xi\|-\|\xi\|^2+2\|PB\|\|\xi\|\|\Delta(z)\|\end{aligned}$$

其中，L 是 f_0 在 D_z 上关于 ξ 的 Lipschitz 常数。由 $\|\Delta(z)\|\leqslant k\|z\|+\delta\leqslant k\|\eta\|+k\|\xi\|+\delta$，可得到

$$\begin{aligned}\dot{V}&\leqslant -bc_3\|\eta\|^2+bc_4L\|\eta\|\|\xi\|-\|\xi\|^2+2k\|PB\|\|\xi\|^2+2k\|PB\|\|\xi\|\|\eta\|+2\delta\|PB\|\|\xi\|\\&=-\begin{bmatrix}\|\eta\|\\\|\xi\|\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}bc_3 & -\left(k\|PB\|+\dfrac{bc_4L}{2}\right)\\-\left(k\|PB\|+\dfrac{bc_4L}{2}\right) & 1-2k\|PB\|\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\|\eta\|\\\|\xi\|\end{bmatrix}+2\delta\|PB\|\|\xi\|\\&\overset{\text{def}}{=}-\begin{bmatrix}\|\eta\|\\\|\xi\|\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}(Q+kQ_1)\begin{bmatrix}\|\eta\|\\\|\xi\|\end{bmatrix}+2\delta\|PB\|\|\xi\|\end{aligned}$$

选择 $b<\dfrac{4c_3}{(c_4L)^2}$，则 Q 为正定。于是，存在 $k^*>0$，它可能是 b 的函数，使得对于所有的 $k<k^*$，矩阵 $Q+kQ_1$ 正定。因此，如果 $\delta=0$，我们可以断言，扰动系统(式(9.11))的原点是指数稳定的。当 $\delta>0$ 时，我们可以得出原点的终极有界性。令 $\lambda_m>0$ 为 $Q+kQ_1$ 的最小特征值，那么当 $0<\theta<1$ 时，

$$\dot{V}\leqslant -\lambda_m\|z\|^2+2\delta\|PB\|\|z\|\leqslant -(1-\theta)\lambda_m\|z\|^2,\quad \|z\|\geqslant\frac{2\delta\|PB\|}{\lambda_m\theta}$$

应用定理 4.5 可知，存在正常数 δ^* 和 c，使得当 $\delta<\delta^*$ 时，$\|z\|$ 有终极上界 δc。

D.2 定理 12.5 的证明

我们将状态反馈下的轨线写成 $\chi_r=(\eta_r,\xi_r)$，将输出反馈下的轨线写成 $\chi=(\eta,\xi)$，以示区别。如同引理 11.3 的证明，将观测误差处理如下，令

$$\zeta_i = \frac{\xi_i - \hat{\xi}_i}{\varepsilon^{\rho-i}}, \quad 1 \leqslant i \leqslant \rho \tag{D.1}$$

即其第 i 个分量除以 $\varepsilon^{\rho-i}$，得到

$$\varepsilon\dot{\zeta} = A_0\zeta + \varepsilon B_0 \Delta(t,\chi,\hat{\xi})$$

式中，

$$A_0 = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ -\alpha_{\rho-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_\rho & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

且

$$\Delta(t,\chi,\hat{\xi}) = a(\eta,\xi) - a_0(\hat{\xi}) + [b(\eta,\xi) - b_o(\hat{\xi})]\gamma_s(\hat{\xi}) + \delta(t,\eta,\xi,\gamma_s(\hat{\xi}))$$

其中，A_0已经被设计成为 Hurwitz 矩阵。因为 $a_0(\hat{\xi})$、$b_0(\hat{\xi})$和 $\gamma_s(\hat{\xi})$都是全局有界的，所以有

$$|\Delta(t,\chi,\hat{\xi})| \leqslant L_1, \quad \forall \chi \in \Omega, \quad \hat{\xi} \in R^\rho, \quad t \geqslant 0 \tag{D.2}$$

在整个证明中，L_i，$i=1, 2, \cdots$是和 ε 无关的正常数。令 P 为 Lyapunov 方程 $PA_0 + A_0^{\mathrm{T}}P = -I$的正定解，$W(\zeta)=\zeta^{\mathrm{T}}P\zeta$，且$\Sigma=\{W(\zeta) \leqq k\varepsilon^2\}$。对于证明的第一步，可以选择 $k>0$，使得对于足够小的 ε，集合 $\Omega\times\Sigma$是正不变集。也就是说，如果 $\chi(t_0)\in\Omega$ 和 $\zeta(t_0)\in\Sigma$，则对一切 $t\geqslant t_0$，$\chi(t)\in\Omega$ 和 $\zeta(t)\in\Sigma$成立。根据式(D.2)，对所有 $\chi\in\Omega$，

364

$$\begin{aligned} \varepsilon\dot{W} &= -\zeta^{\mathrm{T}}\zeta + 2\varepsilon\zeta^{\mathrm{T}}PB_0\zeta \leqslant -\|\zeta\|^2 + 2\varepsilon L_1\|PB_0\|\|\zeta\| \\ &\leqslant -\frac{1}{2}\|\zeta\|^2, \quad \forall \|\zeta\| \geqslant 4\varepsilon L_1\|PB_0\| \end{aligned}$$

应用不等式

$$\lambda_{\min}(P)\|\zeta\|^2 \leqslant \zeta^{\mathrm{T}}P\zeta \leqslant \lambda_{\max}(P)\|\zeta\|^2$$

可以得到

$$\varepsilon\dot{W} \leqslant -\sigma W, \quad \forall W \geqslant \varepsilon^2 W_0 \tag{D.3}$$

其中，$\sigma=\frac{1}{2\lambda_{\max}(P)}$，$W_0=\lambda_{\max}(P)(4L_1\|PB_0\|)^2$。取 $k=W_0$，因为 $\dot{W}$ 在Σ的边界上为负，所以 $\zeta(t)$不会离开集合Σ。另一方面，对于 $\zeta\in\Sigma$，$\|\xi-\hat{\xi}\|\leqslant L_2\varepsilon$。根据 β、ψ 都是 Lipschitz 函数和 sat(•)的性质，可以证明$\|\gamma_s(\xi)-\gamma_s(\hat{\xi})\|\leqslant\frac{L_3\varepsilon}{\mu}$，这里之所以出现了参数 μ，是因为饱和函数$\text{sat}\left(\frac{s}{\mu}\right)$中含有 μ。因为在 Ω 上，$\gamma_s(x)=\gamma(x)$，所以可以得到

$$\|\gamma_s(\xi) - \gamma_s(\hat{\xi})\| \leqslant \frac{\varepsilon L_3}{\mu} \tag{D.4}$$

回忆式(12.47)，可知控制量 u 仅仅出现在 $\dot{s}$ 的方程中。应用式(D.4)和回忆 10.1 节中滑模控制的相关内容，可以得到，当$|s|\geqslant\mu$ 时，

$$s\dot{s} \leqslant b(\eta,\xi)\left[-\beta_0|s| + \frac{\varepsilon L_3}{\mu}|s|\right]$$

选取 $\varepsilon \leqslant \frac{\mu\beta_0}{2L_3}$，那么

$$s\dot{s} \leqslant -\left(\frac{b_0\beta_{0(1-\kappa_0)}}{2}\right)|s|$$

根据此不等式，应用10.1节的分析方法，可说明轨线($\eta(t)$、$\xi(t)$)不会离开 Ω，而且会在有限时间内进入 Ω_μ。

证明的第二步是：对于所有的 $\chi(0)\in\Omega_0$ 和 $\hat{\xi}(0)\in X$，轨线($\chi(t)$，$\zeta(t)$)在有限时间区间$[0, \tau(\varepsilon)]$内进入集合 $\Omega\times\Sigma$，其中当 $\varepsilon\to 0$ 时，$\tau(\varepsilon)\to 0$。注意到，由于式(D.1)的变换，初始条件 $\zeta(0)$的无穷大阶次为 $\frac{1}{\varepsilon^{\rho-1}}$。因为 Ω_0 在 Ω 的内部且控制量 $\gamma_s(\hat{\xi})$全局有界，所以存在和 ε 无关的 $T_1>0$，使得当 $t\in[0, T_1]$的时候，$\chi(t)\in\Omega$。在这个时间范围内，式(D.2)成立，随后式(D.3)成立。根据定理4.5，有

$$W(t) \leqslant \max\{e^{-\frac{\sigma t}{\varepsilon}}W(0),\varepsilon^2 W_0\} \leqslant \max\left\{\frac{e^{-\frac{\sigma t}{\varepsilon}}L_4}{\varepsilon^{2(\rho-1)}},\varepsilon^2 W_0\right\}$$

上式表明 $\zeta(t)$在时间区间$[0, \tau(\varepsilon)]$内进入Σ，其中，

$$\tau(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\sigma}\ln\left(\frac{L_4}{W_0\varepsilon^{2\rho}}\right)$$

由 L'Hospital 法则可知，$\lim_{\varepsilon\to 0}\tau(\varepsilon)=0$。通过选择足够小的 ε，可以实现 $\tau(\varepsilon)<T_1$。因此，对于所有的 $t\geqslant 0$，轨线($\chi(t)$，$\zeta(t)$)有界，且在有限时间 T 内进入集合 $\Omega_\mu\times\Sigma$。因为$\gamma_s(\hat{\xi})$全局有界，且 $\chi(0)=\chi_r(0)$，那么 365

$$\|\chi(t)-\chi_r(t)\| \leqslant L_5\tau(\varepsilon), \quad \forall t\in[0,\tau(\varepsilon)]$$

在时间区间$[\tau(\varepsilon), T]$上，输出反馈下的 $\dot{\chi}$ 方程为状态反馈下方程的 $O(\varepsilon)$阶扰动。因此，根据微分方程的解对参数的连续依赖性，可以得到式(12.61)[⊖]。

D.3 定理12.6的证明

经状态反馈后，闭环系统方程如下：

$$\dot{\chi} = f(\chi,\gamma(\xi)) \tag{D.5}$$

在集合 $\Omega_\mu\times\Sigma$内，经输出反馈的闭环系统为

$$\dot{\chi} = f(\chi,\gamma(\xi-D\zeta)), \quad \varepsilon\dot{\zeta} = A_0\zeta+\varepsilon B_0\Delta(t,\chi,\xi-D\zeta) \tag{D.6}$$

其中，D 是一个对角矩阵，它的第 i 个对角元素为 $\varepsilon^{\rho-i}$，且 $\Delta(t, 0, 0)=0$。因为式(D.5)的原点指数稳定，根据定理3.8(Lyapunov逆定理)，存在一个Lyapunov函数 $V(\chi)$，在原点的某个邻域 N 内满足

$$c_1\|\chi\|^2 \leqslant V(\chi) \leqslant c_2\|\chi\|^2, \quad \frac{\partial V}{\partial\chi}f(\chi,\gamma(\xi)) \leqslant -c_3\|\chi\|^2, \quad \left\|\frac{\partial V}{\partial\chi}\right\| \leqslant c_4\|\chi\|$$

其中，c_1，…，c_4为正常数。取足够小的 μ，使得 $\Omega_\mu\subset N$。与附录C.3一样，构造系统式(D.6)的侯选Lyapunov函数 $V_c(\chi, \zeta)=V(\chi)+W(\zeta)$，对它求导可以得到

⊖ 见文献[74，定理3.4]

$$\dot{V}_c \leqslant -c_3\|\chi\|^2 + c_5\|\chi\|\|\zeta\| - \frac{1}{\varepsilon}\|\zeta\|^2 + c_6\|\zeta\|^2$$

其中，c_5、c_6为正常数。上述不等式可以改写成

$$\dot{V}_c \leqslant -\frac{1}{2}c_3(\|\chi\|^2 + \|\zeta\|^2) - \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\|\chi\| \\ \|\xi\|\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} c_3 & -c_5 \\ -c_5 & \dfrac{2}{\varepsilon} - c_3 - 2c_6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\|\chi\| \\ \|\xi\|\end{bmatrix}$$

可以通过选择足够小的 ε，使得不等号右边的第二项的二次型正定，那么 $\dot{V}_c \leqslant -\frac{1}{2}c_3(\|\chi\|^2 + \|\zeta\|^2)$。这表明系统(式(D.6))的原点指数稳定，且所有在集合 $\Omega_\mu \times \Sigma$ 内的轨线收敛到原点。因为所有满足 $\chi(0) \in \Omega_0$ 和 $\hat{\xi}(0) \in X$ 的轨线都会进入 $\Omega_\mu \times \Sigma$，所以 $\Omega_0 \times X$ 为吸引域的子集。

D.4 定理 13.1 的证明

根据假设 13.6，我们可以证明存在两个紧的正不变集 Ω 和 Ω_μ，使得所有从 Ω 出发的轨线在有限时间内进入 Ω_μ。Ω 和 Ω_μ 的构造可以分三步进行。我们将闭环系统写成如下的形式

366

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \tilde{f}_0(z,e,r,w), \\ \dot{\zeta} &= A\zeta + Bs, \\ \dot{s} &= -b(\eta,\xi,w)\beta(\eta,\xi)\,\mathrm{sat}\left(\frac{s}{\mu}\right) + \Delta(\eta,\xi,r,w) \end{aligned}$$

其中，$\zeta = \mathrm{col}(e_0, \cdots, e_{\rho-1})$，$e = A\zeta + Bs$，$A$ 为 Hurwitz 矩阵。当 $|s| \geqslant \mu$ 时，我们有

$$s\dot{s} \leqslant b\left[-\beta + \frac{|\Delta|}{b}\right]|s| \leqslant b[-\beta + \varrho]|s| \leqslant -b_0\beta_0|s|$$

这说明集合 $\{|s| \leqslant c\}$ 为正不变集，其中 $c > \mu$。

第二步，我们用 Lyapunov 函数 $V_2(\zeta) = \zeta^{\mathrm{T}}P\zeta$，其中 P 为 Lyapunov 方程 $PA + A^{\mathrm{T}}P = -I$ 的解，并利用不等式

$$\dot{V}_2 \leqslant -\zeta^{\mathrm{T}}\zeta + 2\|\zeta\|\|PB\||s|$$

来证明，当 $\rho_1 = \left(\frac{2\|PB\|}{\theta}\right)^2 \lambda_{\max}(P)$，$0 < \theta < 1$ 时，集合 $\{V_2 \leqslant c^2\rho_1\} \times \{|s| \leqslant c\}$ 为正不变集。在这个集合里，我们有 $\|e\| = \|A\zeta + Bs\| \leqslant c\|A\|\sqrt{\frac{\rho_1}{\lambda_{\min}(P)}} + c \stackrel{\mathrm{def}}{=} c\rho_2$。最后，我们用不等式

$$\dot{V}_1 \leqslant -\alpha_3(\|z\|), \quad \forall\, \|z\| \geqslant \alpha_4(c\rho_2)$$

来证明

$$\Omega = \{V_1 \leqslant \alpha_2(\alpha_4(c\rho_2))\} \times \{V_2 \leqslant c^2\rho_1\} \times \{|s| \leqslant c\}$$

为正不变集。类似地，也可以证明

$$\Omega_\mu = \{V_1 \leqslant \alpha_2(\alpha_4(\mu\rho_2))\} \times \{V \leqslant \mu^2\rho_1\} \times \{|s| \leqslant \mu\}$$

为正不变集，且所有从 Ω 出发的曲线均在有限时间内进入 Ω_μ。

在 Ω_μ 内部，系统在$(z=0,\ \zeta=\bar{\zeta},\ s=\bar{s})$处有一个平衡点，其中 $\bar{\zeta} = \mathrm{col}(\bar{e}_0, 0, \cdots, 0)$，$\bar{s} = k_0\bar{e}_0$。通过变量替换 $\nu = \zeta - \bar{\zeta}$ 和 $\tau = s - \bar{s}$，将此平衡点平移到原点，系统变成如下形式的奇异扰动系统：

$$\dot{z} = \tilde{f}_0(z, A\nu + B\tau, r, w),$$
$$\dot{\nu} = A\nu + B\tau,$$
$$\mu\dot{\tau} = -b(\eta, \xi, w)\beta(\eta, \xi)\tau + \mu\tilde{\Delta}(z, \nu, \tau, r, w)$$

其中，$\tilde{\Delta}(0, 0, 0, r, w)=0$。令 $\mu=0$，可得 $\tau=0$，并获得慢变模型

$$\dot{z} = \tilde{f}_0(z, A\nu, r, w), \quad \dot{\nu} = A\nu$$

367

这是 $\dot{z}=\tilde{f}_0(z, A\nu, r, w)$和 $\dot{\nu}=A\nu$ 组成的一个串联系统。如果 $z=0$ 为 $\dot{z}=\tilde{f}_0(z, 0, r, w)$的指数稳定平衡点，且 $V_0(z, r, w)$是定理 3.8 给出的 Lyapunov 函数，可以利用附录 C.1 中的方法，构造复合 Lyapunov 函数 $\alpha V_0+\nu^{\mathrm{T}}P\nu$，其中 $\alpha>0$，并用来证明$(z=0, \nu=0)$是慢变系统的指数稳定平衡点。然后我们可以构造复合 Lyapunov 函数 $V=\alpha V_0+\nu^{\mathrm{T}}P\nu+\frac{1}{2}\tau^2$，如同附录 C.3 那样，证明对于足够小的 μ，$(z=0, \nu=0, \tau=0)$为闭环系统的指数稳定平衡点，同时，可以证明 V 的导数满足不等式

$$\dot{V} \leqslant -\begin{bmatrix}\|z\| \\ \|\nu\| \\ |\tau|\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \underbrace{\begin{bmatrix}\alpha k_1 & -\alpha k_2 & -(\alpha k_3+k_4) \\ -\alpha k_2 & 1 & -k_5 \\ -(\alpha k_3+k_4) & -k_5 & \left(\frac{k_6}{\mu}\right)-k_7\end{bmatrix}}_{Q} \begin{bmatrix}\|z\| \\ \|\nu\| \\ |\tau|\end{bmatrix}$$

其中，k_1，…，k_7为正常数。通过选择 $\alpha<\frac{k_1}{k_2^2}$使得 Q 的二阶主子式$(q_{11}q_{22}-q_{12}^2)$为正，再选择足够小的 μ，使 Q 的行列式为正，从而导数 $\dot{V}$ 负定。因此，当 $t\to\infty$时，Ω_μ 上的每一条轨线都将收敛到平衡点$(z=0, \nu=0, \tau=0)$。因为在平衡点上，$e=0$，所以我们可以断定误差趋于零。

368

参考文献

[1] B.D.O. Anderson and S. Vongpanitlerd. *Network Analysis and Synthesis: A Modern Systems Theory Approach.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1973.

[2] P.J. Anstaklis and A.N. Michel. *Linear Systems.* McGraw-Hill, New York, 1997.

[3] T.M. Apostol. *Mathematical Analysis.* Addison-Wesley, Reading, MA, 1957.

[4] M. Araki. Stability of large-scale nonlinear systems–quadratic-order theory of composite-system method using M-matrices. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-23:129–141, 1978.

[5] M. Arcak and P. Kokotovic. Nonlinear observers: a circle criterion design and robustness analysis. *Automatica*, 37:1923–1930, 2001.

[6] B. Armstrong and C. Canudas de Wit. Friction modeling and compensation. In W. Levine, editor, *The Control Handbook*, pages 1369–1382. CRC Press, 1996.

[7] R.B. Ash. *Real Analysis and Probability.* Academic Press, New York, 1972.

[8] A. Astolfi, D. Karagiannis, and R. Ortega. *Nonlinear and Adaptive Control with Applications.* Springer-Verlag, London, 2008.

[9] A.N. Atassi and H.K. Khalil. A separation principle for the stabilization of a class of nonlinear systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 44:1672–1687, 1999.

[10] A. Bacciotti and L. Rosier. *Lyapunov Functions and Stability in Control Theory.* Springer-Verlag, Berlin, 2005.

[11] S. Banerjee and G.C. Verghese, editors. *Nonlinear Phenomena in Power Electronics: Bifurcation, Chaos, Control, and Applications.* IEEE Press, New York, 2001.

[12] J.S. Baras, A. Bensoussan, and M.R. James. Dynamic observers as asymptotic limits of recursive filters: speial cases. *SIAM J. Applied Math*, 48:1147–1158, 1988.

[13] B.R. Barmish, M. Corless, and G. Leitmann. A new class of stabilizing controllers for uncertain dynamical systems. *SIAM J. Control & Optimization*, 21:246–255, 1983.

[14] T. Basar and P. Bernhard. H_∞*-Optimal Control and Related Minimax Design Problems.* Birkhäuser, Boston, second edition, 1995.

[15] R. Bellman. *Introduction to Matrix Analysis.* McGraw-Hill, New York, second edition, 1970.

[16] B.W. Bequette. *Process Dynamics: Modeling, Analysis, and Simulation.* Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1998.

[17] D.P. Bertsekas. *Dynamic Programming.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1987.

[18] F. Blanchini. Set invariance in control–a survey. *Automatica*, 35:1747–1767, 1999.

[19] C.I. Byrnes and A. Isidori. Asymptotic stabilization of minimum phase nonlinear systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 36:1122–1137, 1991.

[20] C.I. Byrnes, A. Isidori, and J.C. Willems. Passivity, feedback equivalence, and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 36:1228–1240, 1991.

[21] F.M. Callier and C.A. Desoer. *Multivariable Feedback Systems.* Springer-Verlag, New York, 1982.

[22] C. T. Chen. *Linear System Theory and Design.* Holt, Rinehart and Winston, New York, 1984.

[23] G. Chesi. *Domain of Attraction: Analysis and Control via SOS Programming.* Springer-Verlag, London, 2011.

[24] S. Ching, Y. Eun, C. Gokcek, P.T. Kabamba, and S.M. Meerkov. *Quasilinear Control: Performance Analysis and Design of Feedback Systems with Nonlinear Sensors and Actuators.* Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2011.

[25] L.O. Chua, C.A. Desoer, and E.S. Kuh. *Linear and Nonlinear Circuits.* McGraw-Hill, New York, 1987.

[26] L.O. Chua and Y. S. Tang. Nonlinear oscillation via volterra series. *IEEE Trans. Circuits Syst.*, CAS-29:150–168, 1982.

[27] C.M. Close and D.K. Frederick. *Modeling and Analysis of Dynamic Systems.* Houghton Mifflin, Boston, second edition, 1993.

[28] M. Corless. Control of uncertain nonlinear systems. *J. Dyn. Sys. Measurement and Control*, 115:362–372, 1993.

[29] M. Corless and G. Leitmann. Continuous state feedback guaranteeing uniform ultimate boundedness for uncertain dynamic systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-26:1139–1144, 1981.

[30] M. Corless and R. Shorten. On the characterization of strict positive realness for general matrix transfer functions. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 55:1899–1904, 2010.

[31] J-M. Coron. *Control and Nonlinearity.* American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.

[32] J-M. Coron, L. Praly, and A. Teel. Feedback stabilization of nonlinear systems: sufficient conditions and Lyapunov and input–output techniques. In A. Isidori, editor, *Trends in Control*, pages 293–347. Springer-Verlag, New York, 1995.

[33] Z. Deng. *Nonlinear and Adaptive Control.* IET, London, 2013.

[34] C. Desoer and Y-T. Wang. Foundation of feedback theory for nonlinear dynamical systems. *IEEE Trans. Circuits Syst.*, 27:104–123, 1980.

[35] C.A. Desoer and M. Vidyasagar. *Feedback Systems: Input–Output Properties.* Academic Press, New York, 1975.

[36] A.B. Dixon, D.M. Dawson, and S. Nagarkatti. *Nonlinear Control Engineering Systems: A Lyapunov-Based Approach.* Birkhauser, Boston, MA, 2003.

[37] J.C. Doyle, K. Glover, P.P. Khargonekar, and B.A. Francis. State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 34:831–847, 1989.

[38] A.F. Filippov. Differential equations with discontinuous right-hand side. *Amer. Math. Soc. Translations*, 42:199–231, 1964.

[39] T.I. Fossen. *Guidance and Control of Ocean Vehicles.* John Wiley & Sons, New York, 1994.

[40] A.L. Fradkov, I.V. Miroshnik, and V.O. Nikiforov. *Nonlinear and Adaptive Control of Complex Systems.* Springer, Netherlands, 1999.

[41] B.A. Francis. *A course in H_∞ control theory*, volume 88 of *Lect. Notes Contr. Inf Sci.* Springer-Verlag, New York, 1987.

[42] R.A. Freeman and P.V. Kokotovic. Optimal nonlinear controllers for feedback linearizable systems. In *Proc. American Control Conf.*, pages 2722–2726, Seattle, WA, 1995.

[43] R.A. Freeman and P.V. Kokotovic. *Robust Nonlinear Control Design: State Space and Lyapunov Techniques.* Birkhauser, Boston, MA, 1996.

[44] F.R. Gantmacher. *Theory of Matrices.* Chelsea Publ., Bronx, NY, 1959.

[45] F.M. Gardner. *Phaselock Techniques.* Wiley-Interscience, New York, 1979.

[46] J-P. Gauthier and I. Kupka. *Observability and Observers for Nonlinear Systems.* Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2001.

[47] A. Gelb. *Applied Optimal Estimation.* MIT Press, Cambridge, MA, 1974.

[48] R. Genesio, M. Tartaglia, and A. Vicino. On the estimation of asymptotic stability regions: state of the rrt and new proposals. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-30:747–755, 1985.

[49] W. Gerstner and W. Kistler. *Spiking Neuron Models.* Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2002.

[50] E. Gilbert and I. Kolmanovsky. Nonlinear tracking control in the presence of state and control constraints: a generalized reference governor. *Automatica*, 38:2063–2073, 2002.

[51] G.H. Golub and C.F. Van Loan. *Matrix Computations.* The John Hopkins University Press, Baltimore, 1983.

[52] J. Guckenheimer and P. Holmes. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields.* Springer-Verlag, New York, 1983.

[53] W.M. Haddad and V. Chellabonia. *Nonlinear Dynamical Systems and Control.* Princeton University Press, Princeton, NJ, 2008.

[54] W. Hahn. *Stability of Motion.* Springer-Verlag, New York, 1967.

[55] J. Hale and H. Kocak. *Dynamics and Bifurcations.* Springer-Verlag, New York, 1991.

[56] J.K. Hale. *Ordinary Differential Equations.* Wiley-Interscience, New York, 1969.

[57] K.M. Hangos, J. Bokor, and G. Szederkenyi. *Analysis and Control of Nonlinear Process Systems.* Springer, London, 2004.

[58] P. Hartman. *Ordinary Differential Equations.* Wiley, New York, 1964.

[59] J. Hespanha. *Linear Systems Theory.* Princeton University Press, Princeton, NJ, 2009.

[60] D. Hill and P. Moylan. The stability of nonlinear dissipative systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-21:708–711, 1976.

[61] D.J. Hill and P.J. Moylan. Stability results for nonlinear feedback systems. *Automatica*, 13:377–382, 1977.

[62] M.W. Hirsch and S. Smale. *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra.* Academic Press, New York, 1974.

[63] J.C. Hsu and A.U. Meyer. *Modern Control Principles and Applications.* McGraw-Hill, New York, 1968.

[64] T. Hu and Z. Lin. *Control Systems with Actuator Saturation: Analysis and design.* Birkhauser, Boston, MA, 2001.

[65] T. Hu and Z. Lin. Composite quadratic Lyapunov functions for constrained control systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 48:440–450, 2003.

[66] A. Isidori. *Nonlinear Control Systems.* Springer-Verlag, Berlin, third edition, 1995.

[67] A. Isidori. *Nonlinear Control Systems II.* Springer-Verlag, London, 1999.

[68] A. Isidori and A. Astolfi. Disturbance attenuation and H_∞ control via measurement feedback in nonlinear systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 37:1283–1293, 1992.

[69] Z.P. Jiang, A.R. Teel, and L. Praly. Small gain theorem for ISS systems and applications. *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, 7:95–120, 1994.

[70] T. Kailath. *Linear Systems.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1980.

[71] L. Karafyllis and Z-P. Jiang. *Stability and Stabilization of Nonlinear Systems.* Springer, London, 2011.

[72] N. Kazantzis and C. Kravaris. Nonlinear observer design using Lyapunov auxiliary theorem. *Syst. Contr. Lett.*, 34:241–247, 1998.

[73] H.K. Khalil. Universal integral controllers for minimum-phase nonlinear systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 45:490–494, 2000.

[74] H.K. Khalil. *Nonlinear Systems.* Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, third edition, 2002.

[75] P. Kokotovic and M. Arcak. Constructive nonlinear control: a historical perspective. *Automatica*, 37:637–662, 2001.

[76] P.V. Kokotovic, H.K. Khalil, and J. O'Reilly. *Singular Perturbations Methods in Control: Analysis and Design.* SIAM, Philadelphia, PA, 1999.

[77] P.V. Kokotović and R. Marino. On vanishing stability regions in nonlinear systems with high-gain feedback. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-31:967–970, 1986.

[78] N.N. Krasovskii. *Stability of Motion.* Stanford University Press, Stanford, 1963.

[79] A.J. Krener. The convergence of the extended Kalman filter. In A. Rantzer and C.I. Byrnes, editors, *Directions in Mathematical Systems Theory and Optimization*, pages 173–182. Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[80] M. Krstic and H. Deng. *Stabilization of Uncertain Systems.* Springer, London, 1998.

[81] M. Krstic, I. Kanellakopoulos, and P. Kokotovic. *Nonlinear and Adaptive Control Design.* Wiley-Interscience, New York, 1995.

[82] H. Kwakernaak and R. Sivan. *Linear Optimal Control Systems.* Wiley-Interscience, New York, 1972.

[83] J.P. LaSalle. An invariance principle in the theory of stability. In J.K. Hale and J.P. LaSalle, editors, *Differential Equations and Dynamical Systems*, pages 277–286. Academic Press, New York, 1967.

[84] W. Leonard. *Control of Electrical Drives.* Springer, Berlin, second edition, 1996.

[85] A. Levant. Higher-order sliding modes, differentiation, and output-feedback control. *Int. J. Contr.*, 76:924–941, 2003.

[86] Z. Lin and A. Saberi. Robust semi-global stabilization of minimum-phase input–output linearizable systems via partial state and output feedback. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 40:1029–1041, 1995.

[87] R. Lozano, B. Brogliato, O. Egeland, and B. Maschke. *Dissipative Systems Analysis and Control: Theory and Applications.* Springer, London, 2000.

[88] D.G. Luenberger. *Optimization by Vector Space Methods.* Wiley, New York, 1969.

[89] D.G. Luenberger. *Introduction to Linear and Nonlinear Programming.* Addison-Wesley, Reading, MA, 1973.

[90] I.M.Y. Mareels and D.J. Hill. Monotone stability of nonlinear feedback systems. *J. Mathematical Systems, Estimation and Control*, 2:275–291, 1992.

[91] R. Marino and P. Tomei. *Nonlinear Control Design: Geometric, Adaptive & Robust*. Prentice-Hall, London, 1995.

[92] H.J. Marquez. *Nonlinear Control Systems: Analysis and design*. Wiley, Hoboken, FL, 2003.

[93] A.N. Michel and R.K. Miller. *Qualitative Analysis of Large Scale Dynamical Systems*. Academic Press, New York, 1977.

[94] A.N. Michel, N.R. Sarabudla, and R.K. Miller. Stability analysis of complex dynamical systems. *Circuits Systems Signal Process*, 1:171–202, 1982.

[95] R.K. Miller and A.N. Michel. *Ordinary Differential Equations*. Academic Press, New York, 1982.

[96] J.B. Moore and B.D.O. Anderson. Applications of the multivariable Popov criterion. *Int.J. Control*, 5:345–353, 1967.

[97] K.S. Narendra and J. Taylor. *Frequency Domain Methods for Absolute Stability*. Academic Press, New York, 1973.

[98] H. Nijmeijer and A.J. van der Schaft. *Nonlinear Dynamic Control Systems*. Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[99] E. Noldus and M. Loccufier. A new trajectory reversing method for the estimation of asymptotic stability regions. *Int. J. Contr.*, 61:917–932, 1995.

[100] H. Olsson. *Control Systems with Friction*. PhD thesis, Lund Institute of Technology, Lund, Sweden, 1996.

[101] R. Ortega, A. Loria, P.J. Nicklasson, and H. Sira-Ramirez. *Passivity-based Control of Euler-Lagrange Systems*. Springer, London, 1998.

[102] B.E. Paden and S.S. Sastry. A calculus for computing Filippov's differential inclusion with application to the variable structure control of robot manipulators. *IEEE Trans. Circuits Syst.-I*, CAS-34:73–82, 1987.

[103] M.A. Pai. *Power System Stability Analysis by the Direct Method of Lyapunov*. North-Holland, Amsterdam, 1981.

[104] T.S. Parker and L.O. Chua. *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems*. Springer-Verlag, New York, 1989.

[105] W.R. Perkins and J.B. Cruz. *Engineering of Dynamic Systems*. John Wiley, New York, 1969.

[106] W. Perruquetti and J-P. Barbot. *Sliding Mode Control in Engineering*. CRS Press, Boca Raton, FL, 2002.

[107] Z. Qu. Robust control of nonlinear uncertain systems under generalized matching conditions. *Automatica*, 29:985–998, 1993.

[108] S. Raghavan and J.K. Hedrick. Observer design for a class of nonlinear systems. *Int. J. Contr.*, 59:515–528, 1994.

[109] R. Rajamani. Observers for Lipschitz nonlinear systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 43:397–401, 1998.

[110] K. Reif, F. Sonnemann, and R. Unbehauen. An EKF-based nonlinear observer with a prescribed degree of stability. *Automatica*, 34:1119–1123, 1998.

[111] N. Rouche, P. Habets, and M. Laloy. *Stability Theory by Lyapunov's Direct Method.* Springer-Verlag, New York, 1977.

[112] H.L. Royden. *Real Analysis.* Macmillan, New York, 1963.

[113] W. Rudin. *Principles of Mathematical Analysis.* McGraw-Hill, New York, third edition, 1976.

[114] W.J. Rugh. *Linear System Theory.* Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, second edition, 1996.

[115] A. Saberi, P.V. Kokotovic, and H.J. Sussmann. Global stabilization of partially linear composite systems. *SIAM J. Control & Optimization*, 28:1491–1503, 1990.

[116] M. Safonov. *Stability and Robustness of Multivariable Feedback Systems.* MIT Press, Cambridge, MA, 1980.

[117] I.W. Sandberg. Global inverse function theorems. *IEEE Trans. Circuits Syst.*, CAS-27:998–1004, 1980.

[118] S. Sastry. *Nonlinear Systems: Analysis, Stability and Control.* Springer, New York, 1999.

[119] L. Sciavicco and B. Siciliano. *Modeling and Control of Robot Manipulators.* Springer-Velag, London, second edition, 2000.

[120] S.D. Senturia. *Microsystem Design.* Kluwer Academic, Norwell, MA, 2001.

[121] R. Sepulchre, M. Jankovic, and P. Kokotovic. *Constructive Nonlinear Control.* Springer, London, 1997.

[122] D. Shevitz and B. Paden. Lyapunov stability theory of nonsmooth systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 39:1910–1914, 1994.

[123] H. Shim, J.H. seo, and A.R. Teel. Nonlinear observer design via passivation of error dynamics. *Automatica*, 39:885–892, 2003.

[124] Y. Shtessel, C. Edwards, L. Fridman, and A. Levant. *Sliding Mode Control and Observation.* Birkhauser, Boston, MA, 2013.

[125] D.D. Siljak. *Nonlinear Systems.* Wiley, New York, 1969.

[126] D.D. Siljak. *Large Scale Dynamic Systems: Stability and Structure.* North-Holland, New York, 1978.

[127] D. Simon. *Optimal State Estimation: Kalman, H-Infinity and Nonlinear Approximation.* Wiley Interscience, New York, 2006.

[128] H. Sira-Ramirez and M. Rios-Bolfvar. Sliding mode control of dc-to-dc power converters via extended linearization. *IEEE Trans. Circuits Syst.*, 41:652–661, 1994.

[129] J-J.E. Slotine and W. Li. *Applied Nonlinear Control.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1991.

[130] E. Sontag and A. Teel. Changing supply functions in input/state stable systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 40:1476–1478, 1995.

[131] E.D. Sontag. Smooth stabilization implies coprime factorization. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 34:435–443, 1989.

[132] E.D. Sontag. *Mathematical Control Theory: Deterministic Finite Dimensional Systems.* Springer, New York, second edition, 1998.

[133] E.D. Sontag. Input-to-state stability: Basic concepts and results. In A.A. Agrachev et.al., editor, *Nonlinear and Optimal Control Theory.* Springer-Verlag, Berlin, 2008.

[134] E.D. Sontag and Y. Wang. On characterizations of the input-to-state stability property. *Syst. Contr. Lett.*, 24:351–359, 1995.

[135] M.W. Spong, S. Hutchinson, and M. Vidyasagar. *Robot Modeling and Control.* Wiley, Hoboken, New Jersey, 2005.

[136] S.H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos.* Addison Wesley, Reading, MA, 1994.

[137] H.J. Sussmann and P.V. Kokotovic. The peaking phenomenon and the global stabilization of nonlinear systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 36:424–440, 1991.

[138] A.R. Teel. A nonlinear small-gain theorem for the analysis of control systems with saturation. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 41:1256–1270, 1996.

[139] A.R. Teel, T.T. Georgiou, L. Praly, and E. Sontag. Input-output stability. In W. Levine, editor, *The Control Handbook.* CRC Press, 1995.

[140] U. Topcu, A.K. Packard, P. Seiler, and G.J. Balas. Robust region-of-attraction estimation. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 55:137–142, 2010.

[141] J. Tsinias. Partial-state global stabilization for general triangular systems. *Syst. Contr. Lett.*, 24:139–145, 1995.

[142] V. Utkin, J. Guldner, and J. Shi. *Sliding Mode Control in Electromechanical Systems.* CRS Press, Boca Raton, FL, second edition, 2009.

[143] A. van der Schaft. *L_2-Gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control.* Springer, London, 2000.

[144] M. Vidyasagar. *Nonlinear Systems Analysis.* SIAM, Philadelphia, PA, second edition, 2002.

[145] C.-J. Wan, D.S. Bernstein, and V.T. Coppola. Global stabilization of the oscillating eccentric rotor. In *Proc. IEEE Conf. on Decision and Control*, pages 4024–4029, Orlando, FL, 1994.

[146] S. Wiggins. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos.* Springer-Verlag, New York, 1990.

[147] J.C. Willems. *The Analysis of Feedback Systems.* MIT Press, Cambridge, MA, 1971.

[148] J.L. Willems. The computation of finite stability regions by means of open Lyapunov surfaces. *Int.J. Control*, 10:537–544, 1969.

[149] H.H. Woodson and J.R. Melcher. *Electromechanical Dynamics, Part I: Discrete Systems.* John Wiley, New York, 1968.

[150] F.F. Wu and C.A. Desoer. Global inverse function theorem. *IEEE Trans. Circuit Theory*, CT-19:199–201, 1972.

[151] V.A. Yakubovich, G.A. Leonov, and A.Kh. Gelig. *Stability of Stationary Sets in Control Systems with Discontinuity.* World Scientific, Singapore, 2004.

[152] T. Yoshizawa. *Stability Theory By Liapunov's Second Method.* The Mathematical Society of Japan, Tokyo, 1966.

[153] K.D. Young, V.I. Utkin, and U. Ozguner. A control engineer's guide to sliding mode control. *IEEE Trans. Contr. Syst. Tech.*, 7:328–342, 1999.

[154] G. Zames. Feedback and optimal sensitivity: model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-26:301–320, 1981.

[155] A. Zecevic and D.D. Siljak. Estimating the region of attraction for large scale systems with uncertainties. *Automatica*, 46:445–451, 2010.

[156] V.I. Zubov. *Methods of A.M. Lyapunov and Their Application.* Noordhoff, Groningen, The Netherlands, 1964.

符 号 表

$\equiv$	恒等于
$\approx$	近似于
$\stackrel{\text{def}}{=}$	定义为
$<(>)$	小于(大于)
$\leqslant(\geqslant)$	不大于(不小于)
$\ll(\gg)$	远小于(远大于)
$\forall$	任意一个
$\in$	属于
$\subset$	被包含于
$\rightarrow$	趋向于
$\Rightarrow$	可导出
$\Leftrightarrow$	等价于
Σ	求和
Π	求积
$\lvert a \rvert$	标量 a 的绝对值
$\lVert x \rVert$	向量 x 的范数
$\lVert A \rVert$	矩阵 A 的诱导范数
max	极大值
min	极小值
sup	上确界
inf	下确界
R^n	n 维 Euclid 空间
B_r	n 维 Euclid 空间中闭球 $\{x \in R^n \mid \lVert x \rVert \leqslant r\}$
$\overline{M}$	集合 M 的闭包
∂M	集合 M 的边界
$(x, y) \in X \times Y$	$x \in X$，$y \in Y$
$\mathrm{dist}(p, M)$	点 p 到集合 M 的距离(55)
$f: S_1 \rightarrow S_2$	f 是将集合 S_1 映射到集合 S_2 的函数
$f_2 \circ f_1$	函数 f_1 和函数 f_2 的复合函数
$f^{-1}(\cdot)$	函数 f 的逆映射
$f'(\cdot)$	实函数 f 的一阶导数
∇f	f 的梯度向量
$\dfrac{\partial f}{\partial x}$	映射 f 的 Jacobi 矩阵
$\dot{y}$	y 关于时间的一阶导数
$\ddot{y}$	y 关于时间的二阶导数
$y^{(i)}$	y 关于时间的 i 阶导数

（续）

$L_f h$	h 沿着向量场 f 的 Lie 导数
$[f, g]$	向量场 f 和 g 的 Lie 括号运算
$ad_f^k g$	就是$[f, ad_f^{k-1} g]$
$\mathrm{diag}[a_1, \cdots, a_n]$	对角矩阵，其对角线上元素依次为 a_1，…，a_n
$\mathrm{block\ diag}[A_1, \cdots, A_n]$	块对角矩阵，其对角线上元素依次为矩阵 A_1，…，A_n
$A^{\mathrm{T}}(x^{\mathrm{T}})$	矩阵 A(向量 x)的转置
$\lambda_{\max}(P)(\lambda_{\min}(P))$	对称矩阵 P 的最大(最小)特征值
$P>0$	正定矩阵 P
$P\geqslant 0$	半正定矩阵 P
$\mathrm{Re}[z]$或 $\mathrm{Re}\ z$	复变量 z 的实部
$\mathrm{Im}[z]$或 $\mathrm{Im}\ z$	复变量 z 的虚部
$\bar{z}$ 或 z^*	复变量 z 的共轭复数
Z^*	复矩阵 Z 的共轭转置矩阵
$\mathrm{sat}(\cdot)$	饱和函数
$\mathrm{Sat}(\cdot)$	向量值饱和函数
$\mathrm{sgn}(\cdot)$	符号函数
$O(\cdot)$	表示阶的大小等价，即 $f(\mu)=O(\mu)\Leftrightarrow \lvert f(\mu) \rvert \leqslant K\mu$
◀	表示例题结束
□	表示证明结束
[xx]	参见参考文献[xx]

索　　引

索引中标注的页码为英文原书页码，与书中边栏的页码一致。

本书是非线性控制的入门教程，内容既严谨，又能让广大读者容易接受。主要内容包括：非线性模型、非线性现象、二维系统、平衡点的稳定性、时变系统和扰动系统、无源性、输入–输出稳定性、反馈系统的稳定性、特殊形式的非线性系统、状态反馈镇定、状态反馈鲁棒镇定、非线性观测器、输出反馈镇定、跟踪和调节。本书可以帮助读者理解和掌握稳定性的各种定义和对应的Lyapunov判据，以及三种系统设计方法与各自的设计特点和适用范围。尤其最后给出的单摆、质量–弹簧系统、隧道二极管电路、负阻振荡器、生化反应器、磁悬浮系统、机械臂等实操案例，可以让读者既加强原理内容的掌握，又明晰它们在具体实践中的应用。书中计算是用MATLAB和Simulink完成的，便于上机学习。

作者简介

哈森 K. 哈里尔（Hassan K. Khalil） 是美国密歇根州立大学电气与计算机工程学院的杰出教授，他是通用汽车公司的顾问，曾发表多篇关于非线性控制的论文。他曾获得2002年IFAC控制工程教材奖、2004年AACC最佳论文奖、2009年最佳导师奖，还是IEEE《Transactions on Automatic Control》、《Automatica and Neural Networks》的副主编、《Automatica for Nonlinear Systems and Control》的编辑，著有《Nonlinear Systems, Third Edtion》一书。





PEARSON
www.pearson.com

投稿热线：(010) 88379604
客服热线：(010) 88378991 88361066
购书热线：(010) 68326294 88379649 68995259

华章网站：www.hzbook.com
网上购书：www.china-pub.com
数字阅读：www.hzmedia.com.cn

封面设计·锡 彬

上架指导：非线性控制

ISBN 978-7-111-52888-3



定价：79.00元